Gauss-Legendre 求積公式の導出 *

千葉豪

平成 28 年 12 月 15 日

以下の $(N-1)$ 次の多項式 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = a_{N-1}x^{N-1} + a_{N-2}x^{N-2} + ... + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

この多項式について、区間 $[-1,1]$ の積分を以下のガウス求積（Gaussian quadrature）で求めるとする。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{m=1}^{M} f(x_m) w_m \tag{2}$$

上式右辺における x_m が求積公式の離散点、w_m がその重みに対応する。

式 (2) の左辺は、以下のように解析的に解くことが出来る。

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} \left(a_{N-1}x^{N-1} + a_{N-2}x^{N-2} + ... + a_1 x + a_0 \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{N} a_{N-1}x^{N} + \frac{1}{N-1} a_{N-2}x^{N-1} + ... + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_0 x \right]_{-1}^{1} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} a_n \alpha_n
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで、α_n は定数であり、次のように書ける [1] 。

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1}, & (n = \text{even}), \\ 0, & (n = \text{odd}) \end{cases} \tag{4}$$

一方、式 (2) の右辺も以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M} f(x_m) w_m &= \sum_{m=1}^{M} \left(a_{N-1}x_m^{N-1} + a_{N-2}x_m^{N-2} + ... + a_1 x_m + a_0 \right) w_m \\
&= a_{N-1} \left(\sum_{m=1}^{M} x_m^{N-1} w_m \right) + ... + a_1 \left(\sum_{m=1}^{M} x_m w_m \right) + a_0 \left(\sum_{m=1}^{M} w_m \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} a_n \beta_n
\end{aligned} \tag{5}$$

* /Document/Education/GaussLegendreQuadrature

[1] n が奇数であるとき $\alpha_n = 0$ となるのは、$a_n x^n$ は $x=0$ について対称であり $[-1,1]$ における積分がゼロとなることに対応する。

ここで、

$$\beta_n = \sum_{m=1}^{M} x_m^n w_m \tag{6}$$

である。

以上より、式 (2) が任意の多項式で成り立つ、すなわち任意の a_n の値について成り立つためには、以下の条件が必要となることが分かる。

$$\alpha_n = \beta_n, \qquad n = 0, 1, ..., N-1 \tag{7}$$

いま我々は求積セットとして、M 点の (x_m, w_m) のセットを考えているが、式 (7) から明らかなように方程式の本数は N であるため、未知数の数と方程式の本数が一致するとき、すなわち $2M = N$ のとき、未知数である x_m、w_m の値を一意的に決めることが出来る。つまり、$N/2$ 点の求積セットにより $(N-1)$ 次の多項式の求積を厳密に行える（N 点の求積セットにより $(2N-1)$ 次の多項式の求積を厳密に行える）ことが分かる。

一方、$(2N-1)$ 次多項式の積分が N 点の Gauss-Legendre 求積により厳密に求まることが知られている。ここでは、$(2N-1)$ 次多項式の積分が N 点の Gauss-Legendre 求積により厳密に求まることを、文献 [1] の記述を参考に示す。

$(2N-1)$ 次の任意の多項式 $g_{2N-1}(x)$ が $[-1, 1]$ で定義されているとし、この区間における $g_{2N-1}(x)$ の積分を求積により求めるとしよう。

ここで、区間 $[-1, 1]$ に存在する N 点の x_m において $g_{2N-1}(x)$ と値が一致する $(N-1)$ 次の多項式 $G_{N-1}(x)$ を考える [2]。これを数式で記述すると以下となる。

$$G_{N-1}(x_m) = g_{2N-1}(x_m), \quad x_m \in [-1, 1], \quad m = 1, 2, ..., N \tag{8}$$

このとき、$f_{2N-1}(x)$ という新たな $(2N-1)$ 次の多項式を、$g_{2N-1}(x)$ と $G_{N-1}(x)$ の差異として以下のように定義する。

$$f_{2N-1}(x) = g_{2N-1}(x) - G_{N-1}(x) \tag{9}$$

式 (8) より、$f_{2N-1}(x)$ は x_m においてゼロとなるので、$f_{2N-1}(x)$ は新たな $(N-1)$ 次の多項式 $F_{N-1}(x)$ を用いて以下のように記述できる。

$$f_{2N-1}(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_N)F_{N-1}(x) \tag{10}$$

ここで、以下のように、$[-1, 1]$ における積分値が $G_{N-1}(x)$ と $g_{2N-1}(x)$ とで同一となるように x_m を決めるものとする。

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} G_{N-1}(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_{2N-1}(x)dx \tag{11}$$

[2] N 点の x_m においてとる値が決められている多項式は、多項式が $(N-1)$ 次の場合は一意に決められる（2 点を通る一次多項式は一意に決められることから分かるであろう）。

この場合、$G_{N-1}(x)$ の積分値が求積により正しく求まれば、$g_{2N-1}(x)$ の積分値も以下のように正しく求められることになる。

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_{2N-1}(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} G_{N-1}(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} w_m G_{N-1}(x_m) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} w_m g_{2N-1}(x_m) \tag{12}$$

任意の $G_{N-1}(x)$ に対して求積により厳密に積分が計算できるためには式 (7) が成り立つ必要があるが、この方程式の本数は N となるので、未知数 w_m の個数 N と一致する。従って、N 点の求積により、$G_{N-1}(x)$ の積分は以下のように厳密に行うことが出来ることが分かる。

$$\int_{-1}^{1} G_{N-1}(x)dx = \sum_{m=1}^{N} w_m G_{N-1}(x_m) \tag{13}$$

さて、次に、x_m の決め方について考えよう。式 (11) は以下の式と同義となる。

$$\int_{-1}^{1} f_{2N-1}(x)dx = \int_{-1}^{1} (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_N)F_{N-1}(x)dx = 0 \tag{14}$$

さて、$F_{N-1}(x)$ は $(N-1)$ 次の多項式であるため、以下のように $(N-1)$ 次までの Legendre 多項式で記述することが出来る [3]。

$$F_{N-1}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i P_i(x) \tag{15}$$

ここで、$P_i(x)$ は i 次の Legendre 多項式を示す。もし、$(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_N)$ が N 次の Legendre 多項式 $P_N(x)$ の定数倍であれば、式 (14) の左辺は Legendre 多項式の直交性を用いて次のように書ける。

$$\int_{-1}^{1} bP_N(x)\sum_{i=0}^{N-1} a_i P_i(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} ba_i \int_{-1}^{1} P_N(x)P_i(x)dx = 0 \tag{16}$$

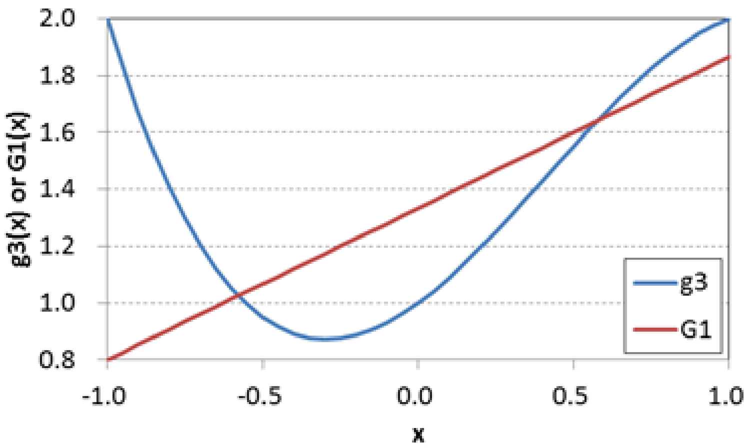
従って、式 (14) が任意の $F_{N-1}(x)$ について成り立つためには、$(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_N)$ が N 次の Legendre 多項式 $P_N(x)$ の定数倍であればよいことになる。すなわち、x_m が N 次の Legendre 多項式 $P_N(x)$ の零点に対応することが分かる。

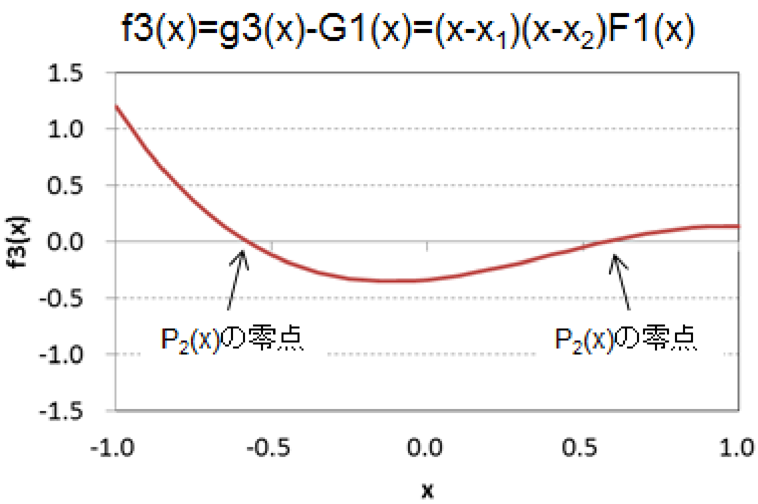
本稿についてコメントしてくれた平成 27 年度の「原子炉物理学」を受講した学生さんに感謝します。

参考文献

[1] Alcouffe R. E., O'Dell R. D., 'Transport calculations for nuclear reactors,' *CRC Handbook of Nuclear Reactors Calculations,* Vol.1, p.380, CRC Press, Boca Raton, Florida (1986).

[3] 任意の N 次多項式は N 次までの Legendre 多項式で記述できる。


g3(x) or G1(x)
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
x
g3
G1


f3(x)=g3(x)-G1(x)=(x-x$_1$)(x-x$_2$)F1(x)
f3(x)
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
P$_2$(x)の零点
P$_2$(x)の零点
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
x