指数実験の基礎

千葉豪

平成 28 年 5 月 20 日

指数実験（指数法）について、文献 [1] では以下のように説明されている。

> 燃料集合体のように、一方向の燃料組成が一様な体系の未臨界度を測定する方法として指数法がある。組成が一様な方向を鉛直方向とするとき、水平方向の幾何学的バックリング B_h^2 が燃料の材料バックリング B_m^2 よりも大きければ、中性子束分布は高さ方向の座標を z とすると線源から遠ざかるにつれて $\exp(-\gamma z)$ で減衰する。この分布を測定して、それを指数関数にフィッティングすることで減衰定数 γ が求められる。

指数実験では、こうして求まった γ から最終的に体系の未臨界度を求めることが出来る。本稿は、「なぜ高さ方向について中性子束が指数関数で減衰するのか」という、上記の説明では省略されている基本的な事項を説明するものである。

簡単のため、組成が一様である 2 次元矩形の未臨界の原子炉を考え、この原子炉内の中性子束分布が、以下のエネルギー 1 群の中性子拡散方程式で記述されるものとする。

$$-D\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)\phi(x,y)+\Sigma_a\phi(x,y)=\nu\Sigma_f\phi(x,y) \tag{1}$$

指数実験では、外部源が原子炉の外に局所的に配置されるので、外部源からの中性子の流れ込みは境界条件（中性子カレント [1] ）で扱うこととする。**Fig. 1** の左図に考えている未臨界原子炉と中性子源との関係を、右図に、以降で考える系を示す。この図のように、$x=X$、$y=Y$ にゼロ中性子束条件を与え、$x=0$、$y=0$ に対しては中性子カレントに境界条件を課すこととする。

ここで、$x=0$ についてはゼロ中性子カレント条件を課すこととする。これは、外部中性子源からの x 方向についての中性子の流れ込みが無視できると仮定するものであり、外部中性子源から y 方向に十分離れた領域について考えるならば妥当な仮定と言えるであろう。なお、$x=0$ について、ある有限の値をもった中性子カレントを境界条件として課した場合の考察は後ほど行なうこととする。

さて、今考えている領域についての中性子拡散方程式は次のように書ける。

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)\phi(x,y)+B_m^2\phi(x,y)=0 \tag{2}$$

[1] 例えば x 方向のカレントは $-D\dfrac{d\phi}{dx}$ と書ける。

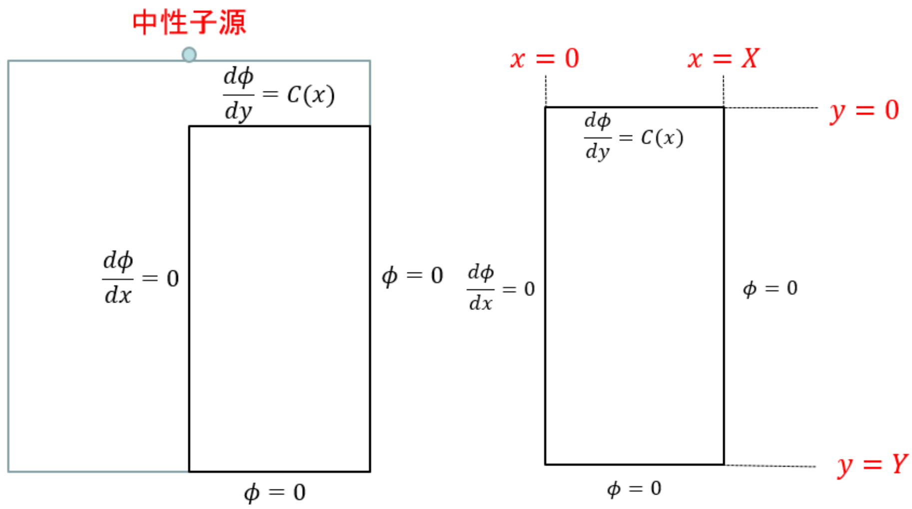

Fig. 1: Sub-critical system with point neutron source

ここで、B_m^2 は材料バックリングに対応し、

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} \tag{3}$$

と定義される。この時点では、$\nu\Sigma_f$ や Σ_a にいかなる条件も与えていないため、B_m^2 は正負いずれの値をとることもありうる。

さて、式 (2) の一般解 $\phi(x,y)$ は次のように変数分離できる。

$$\phi(x,y) = \phi_x(x)\phi_y(y) \tag{4}$$

これを式 (2) に代入すると、以下の式を得る。

$$\frac{1}{\phi_x(x)}\frac{d^2\phi_x(x)}{dx^2} + \frac{1}{\phi_y(y)}\frac{d^2\phi_y(y)}{dy^2} + B_m^2 = 0 \tag{5}$$

この式が成り立つためには、左辺第一項、第二項ともに定数でなければならないので、それぞれを $-B_x^2$、$-B_y^2$ とおくと、以下の式を得ることが出来る。

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi_x(x) + B_x^2\phi_x(x) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\phi_y(y) + B_y^2\phi_y(y) = 0 \tag{7}$$

ここで、

$$B_x^2 + B_y^2 = B_m^2 \tag{8}$$

の関係が成り立つ。なお、B_m^2 は正負いずれの値もとりうるとしていることから、B_x^2、B_y^2 も正負いずれの値もとりうる。これらが負となる場合には、それらの平方根 B_x、B_y は虚数となる。

式 (6)、(7) の一般解はそれぞれ

$$\phi_x(x) = C_{x,1}\exp(iB_x x) + C_{x,2}\exp(-iB_x x), \tag{9}$$
$$\phi_y(y) = C_{y,1}\exp(iB_y y) + C_{y,2}\exp(-iB_y y) \tag{10}$$

と書ける。これらの関数は、具体的には、B^2 が正となる場合は三角関数、負となる場合は双曲線関数（指数関数）となる。

なお、式 (8) が満足されなければならないことから、式 (2) の一般解は以下となる。

$$\phi(x,y) = \sum_j \left(C_{x,j,1}\exp(iB_{x,j}x) + C_{x,j,2}\exp(-iB_{x,j}x)\right)\cdot \left(C_{y,j,1}\exp(iB_{y,j}y) + C_{y,j,2}\exp(-iB_{y,j}y)\right) = \sum_j \phi_{x,j}(x)\phi_{y,j}(y) \tag{11}$$

ここで、

$$B_{x,j}^2 + B_{y,j}^2 = B_m^2 \tag{12}$$

が成り立つ。

以上のようにして得られた一般解に対して境界条件を課すことにより一意解を得ることが出来る。

任意の y について、$x = X$ においてゼロ中性子束条件、$x = 0$ においてゼロ中性子カレント条件が課される場合、$\phi_{x,j}$ は双曲線関数となり得ない [2]。これは $B_{x,j}^2$ が負の値となり得ないことを意味するので、$B_{x,j}^2$ については正の値のみを考えればよいことになる。すると、境界条件より、$B_{x,j}^2$ は以下のように x 方向に関する幾何学的バックリング $B_{g,x,j}^2$ のみをとり得ること、$\phi_{x,j}(x)$ は三角関数となることが分かる。

$$B_{x,j}^2 = B_{g,x,j}^2 = \left(\frac{(2j+1)\pi}{X}\right)^2, \quad j = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

さて、$B_{x,j}^2$ がとりうる値が決まったので、次は $B_{y,j}^2$ について考えよう。式 (12) より、$B_{y,j}^2 = B_m^2 - B_{g,x,j}^2$ として求められ、かつ $B_{g,x,j}^2 > 0$ であることが分かっている。以下、B_m^2 について場合分けして考える。

(1) $B_m^2 = -\gamma_m^2 < 0$ の場合：

この場合は、式 (3) より $\nu\Sigma_f < \Sigma_a$ となるので $k_\infty < 1$ となる。

B_m^2 が負、$B_{g,x,j}^2$ が正であるため、$B_{y,j}^2$ は必ず負となる。そこで $\gamma_{y,j}^2 = -B_{y,j}^2$ と書くとすると、式 (12) より

$$-\gamma_{y,j}^2 = -B_{g,x,j}^2 - \gamma_m^2, \tag{14}$$
$$\gamma_{y,j}^2 = B_{g,x,j}^2 + \gamma_m^2 \tag{15}$$

[2] 双曲線関数が $x = X$ でゼロとなるならば、その関数は $\sinh(\alpha(x-X))$ のように記述される。従って、$x = X$ での中性子束がゼロであれば $\phi_{x,j}$ は $\sinh(B_{x,j}(x-X))$ でなければならない。ただし、この関数は $x = 0$ におけるゼロカレント条件を満足することが出来ないので、$\phi_{x,j}$ は双曲線関数となり得ないことになる。

が得られる。$B^2_{g,x,j} > B^2_{g,x,0}$ なので $\gamma_{y,j} \geq \gamma_{y,0}$ が成り立つ。$y = Y$ でのゼロ中性子束条件を課すと、$\phi_{y,j}(y)$ は

$$\phi_{y,j}(y) = C_j \sinh(\gamma_{y,j}(y - Y)) \tag{16}$$

と書け、式 (11) は

$$\phi(x, y) = \sum_{j=0} C_j \cos(B_{g,x,j}x) \sinh(\gamma_{y,j}(y - Y)) \tag{17}$$

と書けることになる。$y = Y$ からある程度離れた位置ではこの式は

$$\phi(x, y) = \sum_{j=0} C'_j \cos(B_{g,x,j}x) \exp(-\gamma_{y,j}y) \tag{18}$$

と書き直すことができる [3] 。また、$y \gg 0$ では $j \geq 1$ の項は減衰し

$$\phi(x, y) \approx C'_0 \cos(B_{g,x,0}x) \exp(-\gamma_{y,0}y) \tag{20}$$

と書けることになる。

一般的に、指数実験はこのような条件の下で行われる。

(2) $B^2_{g,x,0} > B^2_m > 0$ の場合：

この場合は、$k_\infty > 1$ であるが、x 方向の漏れが大きく、たとえ y 方向が無限大であったとしても臨界にはなり得ない。また、冒頭に挙げた文献 [1] の記述（「水平方向の幾何学的バックリング B^2_h が燃料の材料バックリング B^2_m よりも大きければ」）に該当している。

この場合は、$B^2_{g,x,j} > B^2_{g,x,0}$ より、全ての $B^2_{y,j}$ は負となり、上記 (1) の場合と同様の議論が成り立つことになる。このことは、無限増倍率が 1 を越えるような燃料を利用したとしても、このような条件の下であれば指数実験が行えることを示している。

(3) $B^2_m > B^2_{g,x,0} > 0$ の場合：

この場合は、$k_\infty > 1$ であり、仮に y 方向の幾何学的バックリングが $B^2_{g,y,0} < B^2_m - B^2_{g,x,0}$ を満たすならば臨界超過となる。ただし、ここで考えている原子炉は未臨界であるので、$B^2_{g,y,0} > B^2_m - B^2_{g,x,0}$ が成り立たなければならない。

この場合、$B^2_{y,0}$ は正となるが、j が大きくなるに従って $B^2_{g,x,j}$ が大きくなることから、j がある程度の大きさとなったときに $B^2_{y,j}$ は負となる。そこで、$B^2_{y,j}$ が負となる最小の j を

[3] $\sinh(x - a)$ は

$$\sinh(x - a) = \frac{e^{x-a} - e^{-(x-a)}}{2} = \frac{e^{-a}e^{x} - e^{a}e^{-x}}{2}$$

と書ける。$x = a$ で $\sinh(x - a)$ はゼロとなることから、上式分子の第一項と第二項は $x = a$ で等しくなるが、$x < a$ では第一項は x に対して単調増加関数、第二項は単調減少関数であるから、$x \ll a$ では第一項に対して第二項が卓越し、

$$\sinh(x - a) \approx -\frac{e^{a}e^{-x}}{2} \propto e^{-x} \tag{19}$$

と書ける。

j' と記述することとする。$j \geq j'$ については ϕ_y は双曲線関数となるが、$j < j'$ については三角関数となる。つまり、式 (11) は

$$\phi(x, y) = \sum_{j=0}^{j'-1} C_j \cos(B_{g,x,j}x) \sin(B_{y,j}(y - Y)) + \sum_{j=j'} C_j \cos(B_{g,x,j}x) \sinh(\gamma_{y,j}(y - Y)) \quad (21)$$

と書けることになる。仮に $j' = 1$ であるとするならば、$\gamma_{y,1}$ が十分に大きければ、$y \gg 0$ において $j \geq j'$ の項は減衰するので

$$\phi(x, y) \approx C_0 \cos(B_{g,x,0}x) \sin(B_{y,0}(y - Y)) \quad (22)$$

と書くことが出来る。一方、そうでない場合は、$y \gg 0$ において $\phi(x, y)$ を単一のモード成分で記述することは必ずしも出来ない（つまり三角関数と指数関数の和になる）ことになる。

最後に、$x = 0$ についての境界条件をゼロ中性子カレントとしない場合について考えよう。

ϕ_x に対しては $x = X$ でのゼロ中性子束条件が課されることから、$\sin(B(x - X))$ と $\sinh(B(x - X))$ がとりうる関数形となる。$x = 0$ についてゼロ中性子カレント条件が課されるならば sinh を落とすことが出来るが、そうでない場合はこの成分も考慮しなければならない。また、$\sin(B(x - X))$ についても、B がとりうる値は幾何学的バックリングとは限らない。従って、$\phi(x, y)$ の一般解は複雑なものとなることが容易に想像できよう。

謝辞

毎度のことながら、名古屋大学の遠藤先生にはいろいろ教えていただいて、とても助かっています。どうも有難うございます。

参考文献

[1] 山本俊弘、「未臨界系の炉物理と測定原理」、第 46 回炉物理夏期セミナーテキスト、(2014).