# 六因子公式の整理

千葉豪

平成 28 年 7 月 25 日

## 1 はじめに

本メモでは、六因子公式を二群拡散方程式及びフェルミの年齢理論から導出し、両者の比較を行う。

## 2 二群拡散方程式からの導出

### 2.1 四因子公式

燃料と減速材で構成される漏れの無い無限均質媒質の場合、中性子二群の減速方程式は次のように書ける。

$$\left(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}\right)\phi_1 = \frac{1}{k}\epsilon\nu\Sigma_{f,2}\phi_2, \tag{1}$$

$$\Sigma_{a,2}\phi_2 = \Sigma_{1\to 2}\phi_1 \tag{2}$$

この場合、臨界固有値は次のように書ける。

$$k=\frac{\epsilon\nu\Sigma_{f,2}\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,2}\left(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}\right)}=\epsilon\cdot\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\Sigma_{a,2}}\cdot\frac{\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}} \tag{3}$$

$\eta f$ と $p$ をそれぞれ

$$\eta f = \nu\Sigma_{f,2}/\Sigma_{a,2}, \tag{4}$$

$$p = \Sigma_{1\to 2}/(\Sigma_{1\to 2}+\Sigma_{a,1}) \tag{5}$$

と定義することにより、式 (3) から以下の四因子公式が得られる。

$$k=\epsilon\eta f p \tag{6}$$

### 2.2 六因子公式

燃料と減速材で構成される裸の均質原子炉を考える。中性子の漏れを幾何学的バックリング $B^2$ で考慮した場合、この体系の中性子バランス式は式 (1)、(2) の吸収断面積に $DB^2$ を足すことで得られる。この時の臨界固有値は次のように書ける。

$$\begin{aligned} k &= \frac{\epsilon\nu\Sigma_{f,2}\Sigma_{1\to 2}}{\left(\Sigma_{a,2}+D_2B^2\right)\left(\Sigma_{a,1}+D_1B^2+\Sigma_{1\to 2}\right)} \\ &= \epsilon\cdot\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\Sigma_{a,2}}\cdot\frac{\Sigma_{a,2}}{\Sigma_{a,2}+D_2B^2}\cdot\frac{\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}}\cdot\frac{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}+D_1B^2} \\ &= \epsilon\cdot\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\Sigma_{a,2}}\cdot\frac{\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}}\cdot\frac{1}{1+L_T^2B^2}\cdot\frac{1}{1+\tau_T B^2} \end{aligned} \tag{7}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \text{Ł}_T^2 &= D_2/\Sigma_{a,2}, & (8) \\ \tau_T &= D_1/(\Sigma_{1\to 2} + \Sigma_{a,1}) & (9) \end{aligned}$$

としている。$L_T^2$ は拡散面積、$\tau_T$ は核分裂中性子が熱化するまでのフェルミ年齢である。

高速中性子が体系から漏れない確率 $P_F$、熱中性子が漏れない確率 $P_T$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} P_F &= \frac{1}{1+B^2\tau_T}, & (10) \\ P_T &= \frac{1}{1+B^2L_T^2} & (11) \end{aligned}$$

とおくことにより、式 (7) から以下の六因子公式を得ることができる。

$$k = \epsilon\eta f p \frac{1}{(1+B^2L_T^2)\,(1+B^2\tau_T)} \tag{12}$$

## 3 フェルミの年齢理論からの導出

本節の記述は、ラマーシュの「原子炉の初等理論」を参考にしている。

核分裂により生まれた高速中性子の減速を考える際、体系が有限であるとするならば、中性子の減速と同時に拡散も考えなければならない。この問題を解析的に扱うためにフェルミが導出したモデルが「フェルミの年齢理論」である。中性子の原子核との散乱反応による減速は離散的な現象であるが、このモデルでは、衝突回数や衝突によって得る中性子のレサジーを連続変数として扱う。従って、このモデルは「連続減速モデル」とも呼ばれる。

ここで、位置 $\mathbf{r}$, レサジー $u$ の中性子カレントを $\mathbf{J}(\mathbf{r},u)$ と書くと、$\mathrm{div}\mathbf{J}(\mathbf{r},u)dudV$ は、レサジー幅 $du$ にある中性子が体積要素 $dV$ から流出する正味の割合に対応する。

一方、$q(\mathbf{r},u)dV$ を、体積要素 $dV$ において $u$ 以上のレサジー領域へ単位時間あたりに減速されていく中性子の数とすると、以下の方程式が成り立つ。

$$[q(\mathbf{r},u+du) - q(\mathbf{r},u)]\,dV = \frac{\partial q(\mathbf{r},u)}{\partial u}dudV \tag{13}$$

定常状態においては、レサジー $u$ において中性子源も中性子吸収もないとするならば以下の式が成り立つ。

$$\mathrm{div}\mathbf{J}(\mathbf{r},u) + \frac{\partial q(\mathbf{r},u)}{\partial u} = 0 \tag{14}$$

この方程式に対して以下の拡散近似、すなわちフィックの法則を適用する。

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},u) = -D(u)\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r},u) \tag{15}$$

ここで $\phi(\mathbf{r},u)$ は中性子束、$D$ は拡散係数を示す。

さらに、中性子のレサジーが原子核との一回の散乱で $\xi$ だけ増加するとするならば、レサジー $u$ における減速密度は以下の式で求められる。

$$q(\mathbf{r},u) = \int_{u-\xi}^{u} F(\mathbf{r},u')du' \tag{16}$$

ここで $F(\mathbf{r},u)$ は衝突密度を示す。この衝突密度がレサジー幅 $\xi$ の中で一定と見做せるならば、減速密度はさらに簡略化して記述できる。

$$q(\mathbf{r},u) = \xi F(\mathbf{r},u) = \xi\Sigma_s(u)\phi(\mathbf{r},u) \tag{17}$$

以上より、式 (14) は以下のように書き直せる。

$$\frac{D(u)}{\xi\Sigma_s(u)}\nabla^2 q(\mathbf{r},u) = \frac{\partial q(\mathbf{r},u)}{\partial u} \tag{18}$$

この方程式は、以下で定義される新しい変数 $\tau(u)$ を導入することによって、さらに簡略化することができる。

$$\tau(u) = \int_0^u \frac{D(u')}{\xi\Sigma_s(u')}du' \tag{19}$$

この変数を用いると、式 (18) は次のように書き直せる。

$$\nabla^2 q(\mathbf{r},\tau) = \frac{\partial q(\mathbf{r},\tau)}{\partial \tau} \tag{20}$$

この式が「フェルミの年齢方程式」と呼ばれているものであり、$\tau$ は「フェルミ年齢」（単位は長さの 2 乗）と呼ばれている。

次に、燃料と減速材で構成される均質媒質からなる一次元の裸の原子炉を考え、この原子炉が臨界定常状態にあるとする。また、この臨界状態の原子炉における熱中性子束分布 $\phi_T(x)$ は以下の拡散方程式に従うものとする。

$$-D\frac{d^2\phi_T(x)}{dx^2} + \Sigma_a\phi_T(x) = pq(x,\tau_T) \tag{21}$$

ここで、$q(x,\tau_T)$ は共鳴吸収が無い場合の熱中性子減速密度であり、共鳴吸収を逃れる確率 $p$ を乗ずることにより、共鳴吸収を考慮している。一方、減速密度 $q(x,\tau)$ は以下のフェルミの年齢方程式で記述されるものとする。

$$\frac{\partial^2 q(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial q(x,\tau)}{\partial \tau} \tag{22}$$

熱中性子束分布 $\phi_T(x)$、減速密度分布 $q(x,\tau)$ の両者について、原子炉の両端でゼロという境界条件を与え、かつ原子炉内で正の値のみを取り得る（臨界定常状態のため）ものとすると、解が以下のように得られる。

$$q(x,\tau) = T\exp(-B^2\tau)\cos Bx, \tag{23}$$

$$\phi_T(x) = A\cos Bx \tag{24}$$

ここで、原子炉の中心位置を $x=0$ としている。また、年齢方程式における初期条件は核分裂により発生する中性子数として与えられるため、四因子公式のいくつかの因子を用いて以下のように記述される。

$$q(x,0) = \Sigma_a\phi_T(x)\cdot f\eta\epsilon \tag{25}$$

従って、

$$\frac{q(x,0)}{\phi_T(x)} = \frac{T}{A} = \Sigma_a f\eta\epsilon \tag{26}$$

より $T = \Sigma_a f\eta\epsilon A$ が得られ、減速密度と熱中性子束は以下の関係で記述できることが分かる。

$$q(x,\tau) = \exp(-B^2\tau)f\eta\epsilon\Sigma_a\phi_T(x) \tag{27}$$

熱中性子になる減速密度の全炉心積分値は

$$\int q(x,\tau_T)dx = \exp(-B^2\tau_T)\int f\eta\epsilon\Sigma_a\phi_T(x)dx \tag{28}$$

と書けるが、この式の右辺の $\int f\eta\epsilon\Sigma_a\phi_T(x)dx$ は単位時間あたりの高速中性子発生量の全炉心積分値となっていることから、$\exp(-B^2\tau_T)$ は「核分裂中性子が熱中性子に減速される割合」、つまり高速中性子が体系から漏れない確率 $P_F$ に対応することになる [1]。

## 4　材料バックリングの導出

ここでは、無限中性子増倍率 $k_\infty$ から材料バックリングを求める方法について述べる。

これまでの節と同様の臨界定常状態にある裸の原子炉を考える。このとき、式 (23)、(24) で与えられた定数 $B^2$ が幾何学的バックリングおよび材料バックリングに対応する（臨界状態では両バックリングは同一となるため）。従って、材料バックリングを知るためにはこの $B^2$ の表式を求めればよい。

式 (24) と (27) を式 (21) に代入すると以下の式を得ることができる。

$$DB^2\left(A\cos Bx\right)+\Sigma_a\left(A\cos Bx\right)=p\Sigma_a f\eta\epsilon\exp(-B^2\tau_T)\left(A\cos Bx\right) \tag{29}$$

この式は四因子公式 (6) を用いることで以下のように簡略化される。

$$DB^2+\Sigma_a\left\{1-k_\infty\exp(-B^2\tau_T)\right\}=0 \tag{30}$$

この式より、$k_\infty$ から材料バックリング $B^2$ を求めることができる。

なお、この式はあまり実用的ではないので、以下の近似式を用いるのが一般的のようである。$B^2\approx 0$ のとき、すなわち体系が大きいとき、$\exp(-B^2\tau_T)\approx 1/(1+B^2\tau_T)$ と近似することができる。これを用いると、以下の式を得ることができる。

$$B^2=\frac{k_\infty-1}{D/\Sigma_a+\tau_T}=\frac{k_\infty-1}{L^2+\tau_T} \tag{31}$$

この式は六因子公式 (12) からも以下のようにして求めることができる。六因子公式 (12) は $k_\infty$ を用いて次のように書き直せる。

$$k_{\mathrm{eff}}=k_\infty\frac{1}{\left(1+B^2L_T^2\right)\left(1+B^2\tau_T\right)} \tag{32}$$

ここで $k_{\mathrm{eff}}$ は実効中性子増倍率を示す。臨界状態、すなわち $k_{\mathrm{eff}}=1$ のとき、幾何学的バックリングと材料バックリングは同一となることから、以下の式を得ることができる。

$$k_\infty=(1+B^2L_T^2)(1+B^2\tau_T) \tag{33}$$

$B^2\approx 0$ なので $B^4$ はゼロとみなすことができ、式 (31) が得られる。

## 5　高速中性子が体系から漏れない確率 $P_F$ における違いについて

これまで述べたように、高速中性子が体系から漏れない確率 $P_F$ は、二群拡散方程式からは $1/(1+B^2\tau_t)$ として得られる一方、フェルミの年齢理論からは $\exp(-B^2\tau_T)$ として得られることが分かった。

一体、どちらが「より正確」と言えるのだろうか？

前節で述べた通り、$B^2$ が小さい場合には両者は一致するため、一見、フェルミの年齢理論に基づくほうがより正確なようにも思える。

しかし、フェルミの年齢理論についてはさまざまな仮定が導入されており、そうも言っていられない気もする。

[1] この結論については、式 (23) からそのまま得ることができるが、テキスト「原子炉物理実験」の付録 1B、2-2 節を補足する意味でこのような記述とした。

## 6　おわりに

六因子公式の導出について整理した。