

軽水炉における崩壊熱・核種生成量の評価精度に関する研究

原子炉工学研究室

川本洋右

目次

1	緒言	3
1.1	背景	3
1.2	燃焼計算の基礎	4
1.3	CBZ	6
1.4	課題と目的	7
1.4.1	短半減期核種の計算	7
1.4.2	核データ由来の不確かさ	8
1.5	各章の説明	9
2	行列指数計算手法の改良	10
2.1	燃焼計算と行列指数	10
2.2	行列指数の近似	10
2.3	Remez アルゴリズムを用いたスカラー指数関数の多項式近似	11
2.4	MMPA 法による燃焼計算	16
2.5	マルチステップ計算	17
2.6	検証計算	18
3	核種生成量に対する核データ感度解析	22
3.1	核種生成量と核データ	22
3.2	使用した PIE データ	22
3.3	計算条件	22
3.4	結果	23
3.4.1	C/E 値	23
3.4.2	感度解析	23
4	崩壊熱・核種生成量不確かさの定量化	33
4.1	崩壊熱・核種生成量に生じる不確かさ	33
4.2	核データ誤差情報	33
4.3	燃焼感度計算	34
4.4	誤差伝播計算	37
4.5	崩壊熱不確かさ	38
4.6	核種生成量不確かさ	39
5	炉定数調整法を応用した崩壊熱不確かさの低減	53
5.1	崩壊熱不確かさの低減	53
5.2	炉定数調整法	53
5.3	相関	54
5.4	PIE 解析値を用いた不確かさの低減	55
5.5	瞬時照射崩壊熱測定値を用いた不確かさの低減	61
6	結言	67
	参考文献	69
A	主要元素の崩壊熱表	72

1 緒言

1.1 背景

原子炉の運転に伴いその内部に装荷されている核燃料の組成は核分裂・中性子捕獲反応などにより時々刻々と変化する。そのような現象のことを核燃料の「燃焼」と呼ぶ。組成の変化は、運転に伴う核分裂性物質の減損、核分裂の結果生成する FP(Fission Product、核分裂生成物)の蓄積、それらの核種が中性子と反応することによる別の核種の生成などで説明することができる。

一般に燃焼に伴い核燃料の性質は大きく変化する。新燃料の状態ではウランその他の数核種で構成されていたものが、一旦原子炉で照射されると、1000 を超える FP 核種や中性子捕獲により生じる重核種など非常に多くの核種が生成する。したがって原子炉の運転を通して核燃料の組成は非常に複雑なものへと変化し、それらの核種が崩壊する際に放出する崩壊熱や、原子炉の臨界性などの核特性も変化する。

核燃料を扱う原子力分野の様々な領域において、この燃焼を評価することは重要な役割を担っている。

例えば発電用原子炉において、運転期間中の核特性の変化を把握することは安全性や経済性に直結するため、原子炉の運用上重要な仕事の 1 つである。装荷した燃料をできるだけ長く使い、新規に必要な燃料を低減すること、あるいは運転全期間に渡って原子炉内の出力分布を適正な形に保つことなどがこれに当たる。

また、核燃料中の任意の核種の生成量や、崩壊熱の予測も安全上重要である。炉心で生成されるセシウムやヨウ素などの核種は、事故時に炉心が損傷すると環境中に大量に放出される可能性がある。これを防ぐ設備の設計、または実際に放出された場合の影響の評価には、事故の時点でどのような核種がどれくらいの量炉心に所在しているかといった情報が必須である。FP 核種の崩壊による崩壊熱はまた、それ自体が燃料の損傷の原因にもなり、またプラント全体の挙動にも大きな影響を与える。特に事故時の崩壊熱冷却を担う ECCS(Emergency Core Cooling System、非常用炉心冷却装置)の設計には想定する崩壊熱の値がその不確かさも含めて大きく影響を及ぼす。このような情報は、特に福島第一原子力発電所の事故以降、事故解析や安全設備設計にとってますます重要となっている。また上記の核種の評価には原子炉停止後数秒～数時間における核種生成量を計算する必要があり、従来は考慮されなかったような短半減期核種も含めた量を示す必要がある。

これらに加えて、廃棄物として扱われる使用済核燃料中の核種組成や崩壊熱もバックエンド分野において重要である。例えば廃棄物を地中に埋設した場合に漏出する核種の量や、地下構造に影響を与える崩壊熱が、何万年にも渡って許容しうる範囲内であるかを予め評価しておく必要がある。また使用済燃料中に含まれる核分裂性物質、特にプルトニウムの量はその同位体組成も含め、核不拡散の観点から可能な限り精度良く把握して置かなければならない。

このように様々な目的で核燃料の燃焼を評価することが行われているが、それらに共通する特徴を以下に挙げることができる。

1 つ目は非常に複雑な計算が必要であるということである。前述のように多数の核種を対象としなければならず、しかもそれぞれが核反応により影響し合うことを考慮しなければならない。また各核種の核反応だけではなく、炉心の出力分布や中性子スペクトル、各核種の実効断面積なども核種生成量に影響を及ぼし、また核種生成量の影響を逆に受けるため、それらすべてを精度良く、しかも全運転期間に渡って把握しなければならない。このような計算を「燃焼計算」と呼び、詳細については 1.2 節にて詳しく述べるが、以上述べたような理由により、燃焼計算は原子炉物理分野における計算手法の集合体であると言える。

2 つ目は非常に広い幅の時間スケールを対象としなければならないことである。例えば事故時問題となる崩壊熱は、半減期が数秒から数日の核種の崩壊の寄与がほとんどである。一方、廃棄物中の核種で問題となるのは半減期が少なくとも数年以上の核種であり、しかもそのような核種の数

密度を何万年後まで追跡して計算しなければならない。またいずれの場合でも原子炉の運転期間は数年程度であり、単一の計算の中で対象とする時間スケールの幅が大きいというのが特徴である。

このように核燃料の燃焼の評価の応用範囲は広く、またその評価のために行われる燃焼計算には広範な計算技術が必要と言える。

1.2 燃焼計算の基礎

ここで燃焼計算の原理について説明する。

燃焼計算を行うには、前述のように原子炉物理分野における複数の計算手法を組み合わせる必要がある。なぜならば、ある核種の核反応はその場の中性子束に依存し、中性子束は各核種の中性子反応断面積を基に計算され、実効的な断面積は共鳴自己遮蔽効果により核種組成によって変化する、といったように様々な現象が互いに関係し合っているからである。

具体例としてある時点での核種組成を初期値とする場合を考える。初期組成を基に各核種の実効断面積を計算する「自己遮蔽計算」を行い、得られた実効断面積を基に、「中性子輸送計算」によって考える体系での中性子束を計算する。最後に実効断面積と中性子束を基に各核種の核反応を再現し核種生成量を計算する「核種生成量計算」を行い次のステップの時点での核種組成を得る。このように3つの手法を順番に繰り返し行うことで、任意の時点での核燃料組成を計算することができる。このような方法は「微視的燃焼計算」と呼ばれ、単に燃焼計算と言った場合、断りのない限り本研究ではこれを指すものとする¹⁾。

このように燃焼計算には複数の手法が組み合わされているが、自己遮蔽計算や中性子輸送計算は通常の炉心計算でも用いられる手法であり、説明は省略する。燃焼計算に特有なものは核種生成量計算であり、ここでその原理について説明を行う。核種生成量計算では、入力値として与えられる中性子束や実効断面積と、核分裂収率や崩壊データなどを基に核反応をモデル化する。ある核種 i の時間依存の数密度 n_i に着目する。核種 i は、FP として、あるいは他の核種の娘核種として、または中性子反応の結果生成することが考えられる。また、核種 i 自身の崩壊や中性子反応により他の核種へ変化することにより、消滅することも考えられる。このような生成と消滅のバランスは、以下のような微分方程式で表すことができる。

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = -(\lambda_i + \sigma_{a,i}\phi) n_i(t) + \sum_j (\alpha_{j \rightarrow i} \phi + \beta_{j \rightarrow i} \sigma_{c,i} \phi + \gamma_{j \rightarrow i} \sigma_{f,i} \phi + \delta_{j \rightarrow i} \sigma_{(n,2n)} \phi) n_j(t) \quad (1)$$

$n_i(t)$: 核種 i の数密度 [1/cm³]

ϕ : 中性子束 [1/cm²/s]

λ_i : 核種 i の崩壊定数 [1/s]

$\sigma_{a,i}$: 核種 i の微視的吸収断面積 [cm²]

$\sigma_{c,i}$: 核種 i の微視的捕獲断面積 [cm²]

$\sigma_{f,i}$: 核種 i の微視的核分裂断面積 [cm²]

$\sigma_{(n,2n)}$: 核種 i の微視的 (n,2n) 断面積 [cm²]

$\alpha_{j \rightarrow i}$: 核種 j が崩壊して核種 i になる確率

$\beta_{j \rightarrow i}$: 核種 j が中子を捕獲して核種 i になる確率

$\gamma_{j \rightarrow i}$: 核種 j が核分裂を起こしたときの核種 i の収率

$\delta_{j \rightarrow i}$: 核種 j が (n,2n) 反応により核種 i になる確率

(1) 式は燃焼方程式と呼ばれ、右辺第1項が核種 i の消滅項、第2項が生成項である。実際には核

¹⁾ 「巨視的燃焼計算」と呼ばれる予め計算した実効断面積をライブラリとして保持しておき、それを用いて核種生成量計算を行う方法もある。

種は多数あるため、(1) 式を基にした連立方程式を解くことになる。その連立方程式を行列形式で表現すると、

$$\frac{d\mathbf{n}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{n}(t) \quad (2)$$

となる。ここで $\mathbf{n}(t)$ は各核種の数密度のベクトル、 \mathbf{A} は崩壊定数や反応率などから成る行列で燃焼行列と呼ばれる。実際の燃焼行列の例を図 1 に示す。燃焼行列の各要素は各核種自身の反応や変化パスを表し、そのような情報を燃焼チェーンと呼ぶ。

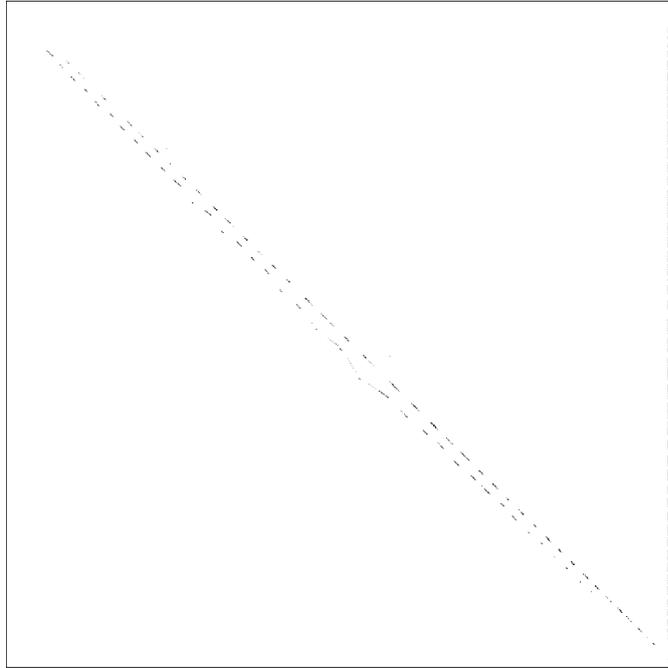


図 1: 燃焼行列 \mathbf{A} の 1 例。FP、アクチニド核種を原子番号・質量数・エネルギー順位順に並べた \mathbf{n} に対応する。

(2) 式の解法には何種類かある [1]。最も簡単なものは時間幅ごとに差分してルンゲ・クッタ法などを用いる方法であるが、近似誤差を小さくするためには時間幅を細かく区切らなければならず計算時間が増大する。したがって代表的な解法として以下のように解析的に解く行列指数法と呼ばれるものがある²。

$$\mathbf{n}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{n}(0) \quad (3)$$

$e^{\mathbf{A}t}$ は行列指数と呼ばれ、以下のように Taylor 展開の形で定義される。

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}t)^k, \quad (4)$$

ただし行列指数は一般に解析的に求めることができないため、何らかの方法で近似的に求める必要がある。現在一般的な燃焼計算コードに用いられているのは Padé 近似や Krylov 部分空間法であり、他にもいくつかの解法が存在する [2]。この行列指数を求めることが核種生成量計算にとって重要な部分であり、これを求めることで任意の時点での核種生成量を得ることができる。

²他にも燃焼行列の構造を簡略化し行列指数を解析的に得る Bateman 法があるが、崩壊形式等に大幅な近似を適用するため詳細な計算には向かない。

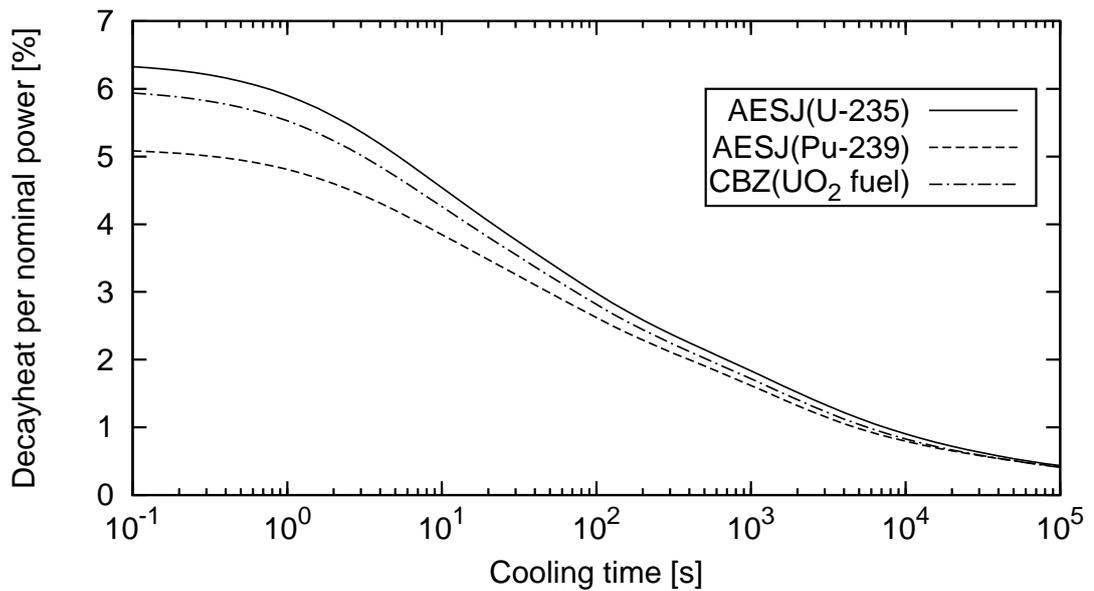


図 2: CBZ による崩壊熱の値と日本原子力学会推奨値との比較 (冷却時間 0.1~10⁵ 秒)

1.3 CBZ

当研究室で開発中の炉物理計算コード CBZ[3] は行列指数法を用いる燃焼計算機能を有している。この機能により計算することのできる体系はいくつかあるが、その内の 1 つとして単一の軽水炉燃料棒を模擬したピンセルモデルによる計算を行うことができる。本研究では軽水炉燃料を模擬した中性子 107 群ピンセルモデルによる燃焼計算機能をベースとして研究・開発を行う。

なお本研究で開発する新しい行列指数近似手法 (MMPA 法) は CBZ に実装され、本研究中の他の燃焼計算における行列指数近似計算に用いられる。

CBZ の燃焼計算により崩壊熱を計算することができるが³、この崩壊熱を日本原子力学会推奨値 [6] と比較したものが図 2 と図 3 である。それぞれ出力 179W/cm、燃焼度 20GWd/t という条件で照射した UO₂ 燃料の短期と長期崩壊熱を、推奨値における U-235、Pu-239 単体の有限照射後の崩壊熱と比較したものである。短期崩壊熱に関しては、U-235 と Pu-239 単体の崩壊熱の間に CBZ の値は位置している。これは UO₂ 燃料の燃焼に伴う Pu-239 生成といった組成変化によるものと考えられる。長期崩壊熱に関しては CBZ の値は U-235、Pu-239 の学会推奨値の間から外れている。しかし学会推奨値では FP 崩壊熱のみ考慮しており、FP の中性子吸収による効果に対しても補正係数を用いていることを考えると、アクチニド崩壊熱や中性子吸収の効果が顕著に現れてくる長期崩壊熱に対しては、それらの効果が正確に反映されている CBZ による計算値の方が妥当であると考えられる。

CBZ は一般化摂動論に基づく燃焼感度計算機能も有している。これにより関係する核データの数が膨大な燃焼計算において、核データに対する核種生成量の感度を効率良く計算できる。

³後述するように短い冷却期間での崩壊熱計算は MMPA 法の導入により可能となった。

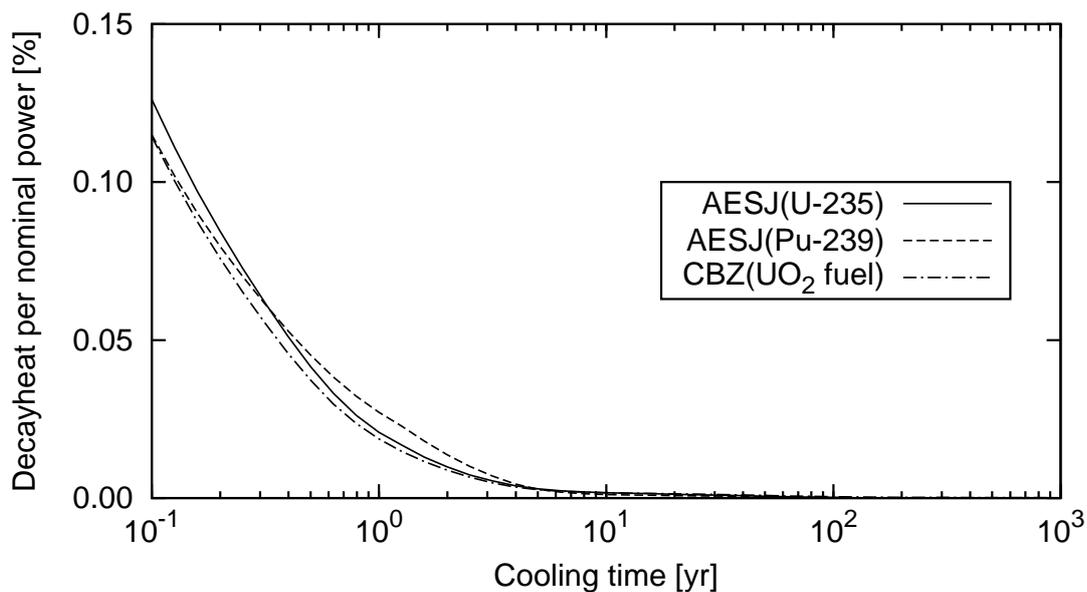


図 3: CBZ による崩壊熱の値と日本原子力学会推奨値との比較 (冷却時間 0.1~10³ 年)

1.4 課題と目的

燃焼計算には現時点でいくつかの課題が存在する。本研究ではその内の 2 つを採り上げる。1 つ目が短半減期核種を扱う核種生成量計算が難しいという点、2 つ目が核種生成量に核データ由来の不確かさが生じる点である。本研究ではこれら 2 つの課題の解決を目的とする。

1.4.1 短半減期核種の計算

1 つ目の課題は対象核種に短半減期核種が含まれる場合、核種生成量計算が難しいという点である。例えばすべての FP を考慮した計算を行うことを考えると、考えられる半減期の範囲は無限大と考えられる安定核から 1 秒以下の超短半減期核種まで非常に幅広い。そのうち超短半減期の存在は、行列指数計算を不安定にするという問題がある。

ある時間幅 Δt の前後での計算を考える。 Δt 秒後の核種生成量は (3) 式より、

$$\mathbf{n}(\Delta t) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{n}(0) \quad (5)$$

と表される。もし対象とする核種に短半減期のものが含まれると、その崩壊定数が大きいいため、 \mathbf{A} のノルムが大きくなる。従来の行列指数解法では、 $\|\mathbf{A}\Delta t\|$ が 1 よりも大幅に大きくなると解が発散し計算精度が悪化する。これは差分化する場合も同様で、一般的な事柄に当てはめると変化の激しい現象に対して解析の時間幅を狭く設定する必要があることに相当する。

1 つの解決法は Δt をいくつか分割し小さくすることで $\|\mathbf{A}\Delta t\|$ を小さくすることである。ただしこれは Δt を小さくしただけ行列指数計算の回数が増えることになる。例えば FP の中には 1 秒よりも大幅に半減期の短いものがあり、1 例として半減期 0.0003 秒の Y-88m⁴ を考えると、崩壊定数は 2.3×10^3 となり、単純に考えると Δt を 10^{-3} 程度にしなければならないことになる。商用原子炉の運転は 1 サイクルで 1 年程度あり、このような短い時間幅は計算時間の観点から現実的では

⁴JENDL/FPD-2011 で評価されている FP 中、半減期が最も短い。

ない。この性質は $\|A\|$ が小さい場合でも Δt が大きい場合には精度が悪化するため自由な長さの時間幅を設定できないことを意味する。またいずれの場合でも計算時間増大の要因となる。

そのため短半減期核種を省略して計算することが広く行われている。例えば原子炉の臨界固有値など核特性のみを知りたい場合、短半減期核種のほとんどは影響を与えないため、それらを省略した燃焼チェーンが用いられる。核特性に影響を与える核種の半減期は短くても数十秒程度であるので、 $\|A\|$ を大幅に小さくすることができる。また A のサイズ自体も小さくできるため、メモリ使用量や行列演算の計算上も効率が良い。しかしそれぞれの核種は互いに崩壊パスで繋がっており、必要な核種の選定には高度な知識と工学的判断が必要である。その作成アルゴリズム自体が1つの研究テーマになるほどである [4]。また短半減期核種の生成量や崩壊熱を評価したい場合には当然この方法は使うことができない。

もう1つの方法が短半減期核種が平衡状態に達していると仮定する方法である。半減期の短い核種は原子炉の運転開始後すぐに生成量と崩壊量がバランスし平衡状態に達する。すなわち (1) 式の右辺が0になるので、簡単に核種数密度を求めることができる。このように短半減期核種を別扱いすることで、すべての核種を計算しつつ計算速度を現実的なものとすることができる。しかしあくまで短半減期核種については近似的な扱いをしており、例えば非常に短い時間での数密度変化は見ることができない。加えて後述する燃焼感度における随伴数密度計算への適用も困難である。

またこれらの対処法でも $\|A\Delta t\|$ が計算精度に影響していることは変わらず、精度を保つ範囲内で Δt を設定しなければならない。

以上述べたような背景より、近年 CRAM (Chebyshev Rational Approximation Method) と呼ばれる手法が提案されている [5]。この手法は、 $\|A\Delta t\|$ に関係なく行列指数を精度良く求めることのできる手法であり、上述したような問題点を解消することができるため今後利用が広がっていくと考えられる。しかしこの CRAM にもいくつかの問題点がある。最も大きな問題点は複素数計算が必要であることであり、この点が CRAM の利用を妨げていると考えられる。そのため実数計算だけで済む新しい近似手法の開発が求められる。

本研究では1つ目の目的として、超短半減期核種の存在や時間幅によらず安定に解の得られる行列指数解法の開発を行うこととする。また同時に CRAM の問題点も解消し、特に複素数計算の不要な実数計算のみの手法を開発することとする。

1.4.2 核データ由来の不確かさ

2つ目の課題は核種生成量に核データ由来の不確かさが生じる点である。

燃焼計算は前述のように中性子輸送計算と核種生成量計算を交互に行うが、それぞれにおいて様々な核データを用いる。輸送計算においては各核種の中性子反応断面積を基に中性子束を算出する。核種生成量計算では (1) 式で示したように断面積に加えて核分裂収率や崩壊定数なども用いられる。したがってそのような計算を何回も繰り返した結果得られる核種生成量の精度は、それら核データの精度に強く依存する。

核データの測定は難しく、未だに真値が分かっているとは言い難い状況である。評価された核データ自体もまた不確かさを持っており、いくつかの核種については非常に大きな不確かさを持っている。そのため核種生成量にも大きな不確かさが生じる。

崩壊熱に生じる不確かさは原子力発電所の安全審査において特に重要な意味を持っている。例えば ECCS の設計の前提となる FP 崩壊熱の値には、原子力学会推奨値に核データ由来の誤差⁵を 3σ 上乗せした値が用いられている。また MOX 燃料のアクチニド崩壊熱には ORIGEN2 コード [7] により計算した値に不確かさとして一律に 20% 上乗せした値を用いている [8]。原子力学会推奨値の不確かさは FP の崩壊のみを考慮した簡易的なモデルに基づき算出されたもので、その 3σ は上乗

⁵FP 核種の崩壊のみを考慮するなど単純化されたモデルに基づいて計算された値。

せと合わせてその妥当性が常に議論の対象となっている。ORIGEN2の不確かさ20%については明らかに改善の余地がある。CBZによる詳細な計算に基づきこれらの不確かさをより詳細に定量化すれば、不確かさ自体の妥当性の確認やさらなる安全性の向上、合理化が期待できる。

また近年原子力分野に限らず解析コードの計算結果に生じる不確かさを定量化し精度を保証する動きが活発である。崩壊熱や核種生成量の不確かさについても各方面で定量化に向けた研究が行われ始めているが、ほとんどが感度計算において確率論的に核データを変動させるアプローチを採っており、関係する核データの数が膨大になる燃焼計算に対しては有効な手段とは言えない。CBZでは不確かさ計算を決定論的手法で行うことができるため、先行研究とは異なるアプローチを採ることができ、また計算時間の点でも有利である。

さらに不確かさは定量化するだけでなく低減することもできる。最も単純な方法は核データの測定をより精緻に行い不確かさを減らすことであるが、新規に測定を行うことは困難である。近年原子炉設計の分野において、種々の炉物理実験値を核データにフィードバックすることで新規に設計する原子炉の不確かさを低減する炉定数調整という手法が用いられている。燃焼計算にもそういった手法が適用できる可能性がある。

以上より、本研究の2つ目の目的として、核種生成量や崩壊熱に生じる不確かさを定量化し、またその低減を図ることとする。

1.5 各章の説明

2章では本研究において新しく開発した行列指数解法であるMMPA法について述べる。近似の原理や計算方法の説明を行い、実際の燃焼計算に適用し従来手法との比較を行う。

3章では核種生成量不確かさの前段階として、使用する核データの違いがどの程度核種生成量に影響するかを評価する。主要な核データライブラリとしてJENDL、ENDF、JEFFの最新版を用いて使用済燃料中の核種組成を計算し、それらの間に生じる差異の評価と感度係数を用いた要因の究明を行う。

4章では崩壊熱と核種生成量に生じる不確かさの定量化を行う。CBZの機能をそのために拡張し、最終的に実際の核燃料を想定したいくつかのケースに対して不確かさを算出する。

5章では4章で定量化した不確かさの低減を行う。4章と同様に不確かさ低減のためにCBZの機能を拡張し、使用済核燃料組成の破壊測定データや瞬時照射崩壊熱測定値など現状で入手可能な実験データを用いて不確かさを低減する。

2 行列指数計算手法の改良

2.1 燃焼計算と行列指数

1章で述べたように、燃焼計算は行列指数の近似を行うことでその解を得ることができる。その際短半減期核種の存在により行列指数の解が発散し、近似精度が悪化するという問題がある。そのため従来は短半減期核種を省略したり別扱いとしたりしてきた。

しかし、もし短半減期核種の存在を許す行列指数計算手法を用いれば、すべてのFPを考慮した核燃料の燃焼を計算機上に再現できることになり、精度の点で大きな改善につながる。また燃焼感度計算にこれを応用すれば、従来は核特性にのみ用いられてきたものが、短半減期核種や崩壊熱などのパラメータにも適用範囲を広げることができる。さらに近似誤差に拘らず時間幅を自由に設定できるため、計算時間や利便性の点で大きなメリットがある。

本研究では短半減期核種に対しても安定な新しい行列指数近似手法を開発し、燃焼計算に適用することを目的とする。

2.2 行列指数の近似

ここでは行列指数を任意の関数で近似する原理について述べる。

2.1節で述べた燃焼計算式中の行列指数 e^{At} を、行列の関数 $f(A_t)$ で近似することを考える。燃焼行列 A のサイズを $m \times m$ とし、それに時間幅を乗じた行列 A_t の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \in \mathbb{C}$ とする⁶。 A_t は適当な正則行列 P によって以下のようにジョルダン標準形に変形できる。

$$A_t = PJP^{-1} = P \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_s) \end{pmatrix} P^{-1} \quad (6)$$

$J(\lambda_i)$ は固有値 λ_i に対応するジョルダン細胞である。 P と P^{-1} は以下のように各固有値に対応した行列またはベクトルに分割することができる。

$$P = (P_1 | \dots | P_s), \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1^T \\ \vdots \\ Q_s^T \end{pmatrix} \quad (7)$$

もし関数 f と、 f の $(k_i - 1)$ 階までの導関数がすべての固有値 λ_i について定義されるなら、関数 $f(A_t)$ のスペクトル分解は以下のように表される。

$$f(A_t) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_i)}{j!} (A_t - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{G}_i \quad (8)$$

ただし $f^{(j)}$ は関数 f の j 階微分、 k_i は $J(\lambda_i)$ の最大次数である⁷。 \mathbf{G}_i は $\mathbf{G}_i = P_i Q_i^T$ と定義される行列で、値域 $R((A_t - \lambda_i \mathbf{I})^{k_i})$ に沿った、一般化固有空間である零空間 $N((A_t - \lambda_i \mathbf{I})^{k_i})$ へのスペクトル射影と呼ばれるものである [9]。同様に行列指数 e^{A_t} のスペクトル分解は、

$$e^{A_t} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{k_i-1} \frac{e^{\lambda_i t}}{j!} (A_t - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{G}_i \quad (9)$$

⁶後述するジョルダン細胞において同一の細胞に属する重複する複数の固有値が存在し、これを1つとして数えるため $s \neq m$ となる。

⁷ m 、 s 、 k_i の間には等式 $m = \sum_{i=1}^s k_i$ が成り立つ。

と表される。

(8) 式と (9) 式を比較すると、もし $f(\lambda_i)$ とその $(k_i - 1)$ 階までの導関数 $f^{(j)}(\lambda_i)$ ($j = 1, 2, \dots, k_i - 1$) がすべての固有値において $e^{\lambda_i t}$ を十分に小さい誤差で良く近似できれば、 e^{At} を $f(At)$ で良く近似できることが分かる。すなわち、行列指数の近似という問題を、スカラーの指数関数 $\exp(x)$ の近似の問題に置き換えることができる。また (8)、(9) 式中の階乗 $j!$ より、導関数の近似誤差は階数が上がるに連れて急激に低減されることも予想できる。

文献 [5][10] によると、燃焼行列の固有値は複素平面上において負の実軸周辺に存在しているとされる。したがって行列指数の近似には、以下の 2 条件を満たす関数 f を見つけられれば良い。

1. $|f(z) - e^z|$ が負の実軸周辺で十分に小さい
2. $|f^{(j)}(z) - e^z|/j!$ ($j = 1, 2, \dots$) が負の実軸周辺で十分に小さい

条件 2 について、どれだけの階数を考慮すれば良いのかは行列 At の固有値の重複度に左右される。もし At が対角化可能であれば全ての固有値は互いに異なり $k_i = 1$ となるため、条件 2 は考慮しなくても良い。しかし燃焼行列は常に対角化可能ではなく、固有値の重複に明らかな上限は無いため、汎用性を考えると行列のサイズ m まで階数を考慮すべきである。

2.3 Remez アルゴリズムを用いたスカラー指数関数の多項式近似

2.2 節で行列指数の近似をスカラーの指数関数 $\exp(x)$ の近似に置き換えることができた。ここでは Remez⁸ アルゴリズム [12][13] を用いて 2.2 節で示された 2 条件に合致する関数 f を求める。

最初に以下のような多項式の関数を定義する。

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i t^i \quad (10)$$

ここで $a_i \in \mathbb{R}$ は係数、 n は多項式の次数である。そして以下のような指数関数を定義する。

$$e^{c \frac{t+1}{t-1}} \quad (11)$$

$c \in \mathbb{R}$ は正の任意定数である。(11) 式中のべき指数にある有理式 $(t + 1)/(t - 1)$ は変数 t を $[-1, 1)$ で定義するためのものである。

係数 a_i を、 $[-1, 1)$ において、(10) 式と (11) 式との間の誤差の絶対値

$$|f(t) - e^{c \frac{t+1}{t-1}}| \quad (12)$$

の最大値を最小化するように Remez アルゴリズムにより決定する。

Remez アルゴリズムとは、ある区間での近似誤差の最大値が最小 (Mini-Max) になるような近似式を計算するためのアルゴリズムである。これは、交代定理と呼ばれるものに基づいている。交代定理とは、ある区間においてある関数を n 次多項式で近似しようとする場合、区間内における近似誤差の最大値を最小にするような多項式近似式はただ 1 つ存在し、その多項式と関数の誤差は区間内で両端を含めて $(n + 2)$ 個の極値を持ち、各点における値は正負を交代しつつ絶対値は互いに等しい、というものである。図 4 に交代定理における近似誤差のイメージを示す。交代定理を用いることで Mini-Max 近似式を数値的に得ることができる。最初に Mini-Max 近似式に十分に近い n 次の初期近似式を設定し、その近似誤差の $(n + 2)$ 個の極値を求める。そしてより Mini-Max 近似に近い n 次多項式の係数を求めるのであるが、その際未知数は n 次多項式の係数 $(n + 1)$ 個に加えてまだ分からない Mini-Max 近似誤差の $(n + 2)$ 個となる。各極点で Mini-Max 近似誤差、次の多項

⁸「レメツツ」

式の係数を未知数とした式が $(n+2)$ 本立てることができるため、その連立方程式を解くことで次の近似多項式の係数を得ることができる。また 1 回の計算では不十分なため、これを何回か繰り返し、得られる近似誤差の値が変化しなくなるまで繰り返すと Mini-Max 近似式が得られるのである⁹。以上のようにこのアルゴリズムの重要な要素は極値を見つける球根計算と連立方程式を解く部分である。本研究で作成したプログラムにおいては、前者には二分法とニュートン法を組み合わせたものを、後者にはガウスの消去法を用いる。また初期近似式には Chebyshev 補間近似式を用いる。文献 [13] によると、Remez アルゴリズムは非常に高精度の計算環境を要するため、任意精度計算ライブラリ Exflib[14] を用いて 300 桁計算を行う。

係数決定後、以下のように変数変換を行う。

$$t = \frac{x+c}{x-c}. \quad (13)$$

その結果、指数関数 $\exp(x)$ を $(-\infty, 0]$ において以下のように有理式の多項式で近似することができる。

$$e^x \approx f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^i \quad (14)$$

この式に基づく行列指数近似手法を MMPA(Mini-Max Polynomial Approximation) 法と名付ける。(12) 式の係数 a_i と近似誤差は任意定数 c に影響される。そのため定数 c は近似誤差を最小化するようにパラメータ探索により決定される。近似次数 32 次の場合、 $c = 24.1$ の時近似誤差が 2.22×10^{-14} となり最小化される。

図 5 は 32 次の MMPA 法の近似式 ((14) 式) にスカラー x を代入し、指数関数 $\exp(x)$ に対する近似誤差 $(f(x) - e^x)$ を負の実軸上においてプロットし、14 次の CRAM の場合と比較したものである。 $(-\infty, 0]$ において MMPA 法の近似誤差は CRAM と同程度であることが分かる。図 6 は 32 次 MMPA 法の近似式にスカラーの複素数 z を代入し、近似誤差 $|f(z) - e^z|$ を複素平面上にプロットしたものである。負の実軸周辺において、近似誤差は非常に小さい事が分かる。以上より (14) 式は 2.2 節で示された条件の内 1 つ目の条件を満たす。

2 つ目の条件に対しては、(14) 式の導関数も負の実軸周辺において e^z に対してよく近似されていなければならない。図 7 は 32 次 MMPA 法近似式と 14 次 CRAM 近似式それぞれについて、 e^x に対する 1、4、7、10、13 階導関数の近似誤差を負の実軸上においてプロットしたもので、図 7(a) が MMPA 法、図 7(b) が CRAM の場合を示している。またそれぞれの誤差は各階数の階乗で除されており、プロットされている誤差を式で表すと $|f^{(j)}(x) - e^x|/j!$ となる。図 7(a) を見るとそれぞれの誤差はいずれも $x = 0$ 付近で大きく、 $x < -1$ において急激に小さくなっている。また階数が 1 階から 7 階に上がるにつれ $x = 0$ における誤差の最大値は最大で 2.2×10^{-9} まで上昇し、7 階より階数が上がるにつれ逆に誤差は 0 に収束していく。これは階数の階乗 $j!$ による効果である。14 次の CRAM の場合 (図 7(b)) も同様の挙動を示しており、最大誤差も同程度である。このことから、32 次 MMPA 法の式は、2.2 節で示された条件の内 2 つ目に対して、少なくとも 14 次の CRAM の式と同程度の精度で条件を満たすということが言える。

以上より、32 次の MMPA 法は、負の実軸周辺に固有値のあるすべての行列に対し、14 次の CRAM と同程度の精度を有することを明らかにした。

表 1 は $c = 24.1$ のときの 32 次 MMPA 法の係数 a_i である。

⁹詳細は文献 [12] 参照

表 1: 32 次 MMPA 近似式の係数 $a_i (c = 24.1)$

Coefficient a_i			
a_0	$3.41366034346810763441 \times 10^{-11}$	a_{17}	$2.40742697969870662426 \times 10^{-1}$
a_1	$-1.64648752802981232517 \times 10^{-9}$	a_{18}	$-7.60967222595908615166 \times 10^{-2}$
a_2	$3.80465674795813706161 \times 10^{-8}$	a_{19}	$-1.58220954609283804027 \times 10^{-1}$
a_3	$-5.59799382133376361074 \times 10^{-7}$	a_{20}	$1.32429922343368914663 \times 10^{-1}$
a_4	$5.88558416643299794299 \times 10^{-6}$	a_{21}	$7.69052976527847896194 \times 10^{-2}$
a_5	$-4.69954781431498324372 \times 10^{-5}$	a_{22}	$-1.14189797653561609782 \times 10^{-1}$
a_6	$2.95331252981155031018 \times 10^{-4}$	a_{23}	$-3.06105871275143780464 \times 10^{-2}$
a_7	$-1.49342612561658940208 \times 10^{-3}$	a_{24}	$7.30162061991511174207 \times 10^{-2}$
a_8	$6.16185418583114456893 \times 10^{-3}$	a_{25}	$9.95181782801371819122 \times 10^{-3}$
a_9	$-2.08884457395397287047 \times 10^{-2}$	a_{26}	$-3.55155454832496982106 \times 10^{-2}$
a_{10}	$5.81666843649626684195 \times 10^{-2}$	a_{27}	$-2.48870477891655009776 \times 10^{-3}$
a_{11}	$-1.31988170767468710376 \times 10^{-1}$	a_{28}	$1.23929263457145990096 \times 10^{-2}$
a_{12}	$2.39594549098354306472 \times 10^{-1}$	a_{29}	$4.21590406862371374909 \times 10^{-4}$
a_{13}	$-3.34580286145275369457 \times 10^{-1}$	a_{30}	$-2.74111882594745761616 \times 10^{-3}$
a_{14}	$3.25793940419810518947 \times 10^{-1}$	a_{31}	$-3.57929539250313916141 \times 10^{-5}$
a_{15}	$-1.47667478685995070947 \times 10^{-1}$	a_{32}	$2.86523961626939505591 \times 10^{-4}$
a_{16}	$-1.19600677614316509554 \times 10^{-1}$		

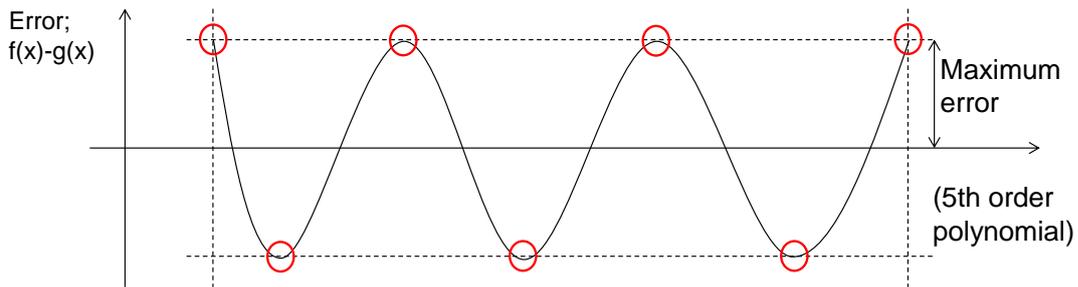


図 4: 交代定理における近似誤差のイメージ (例として関数 $g(x)$ を 5 次多項式 $f(x)$ で近似している様子を示す)

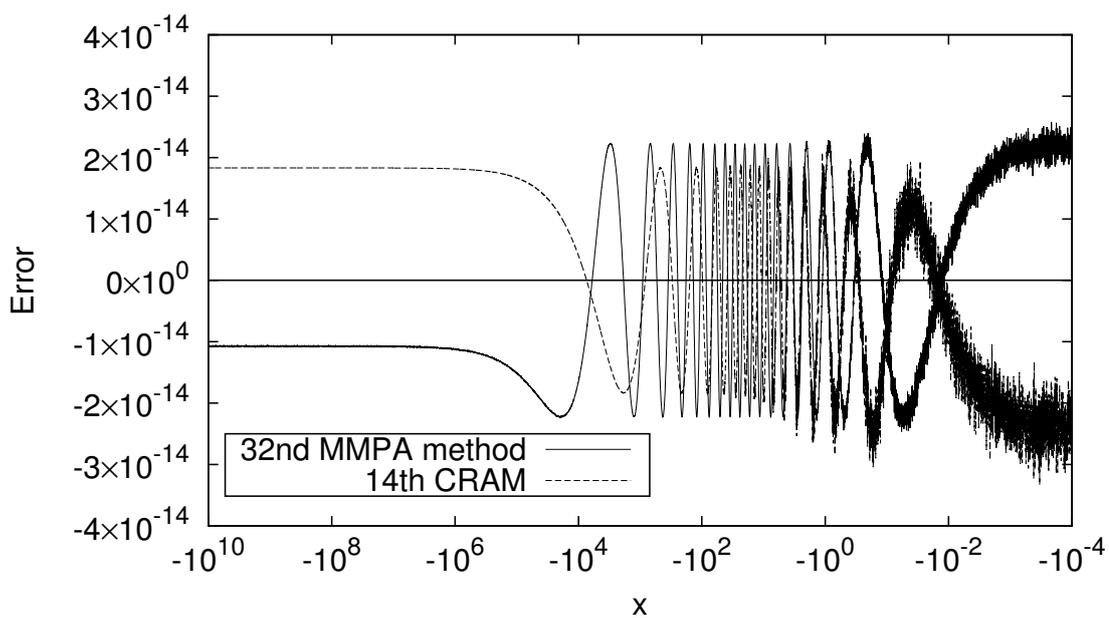


図 5: 負の実軸上における 32 次 MMPA 法、14 次 CRAM 近似式の $\exp(x)$ に対するスカラー近似誤差

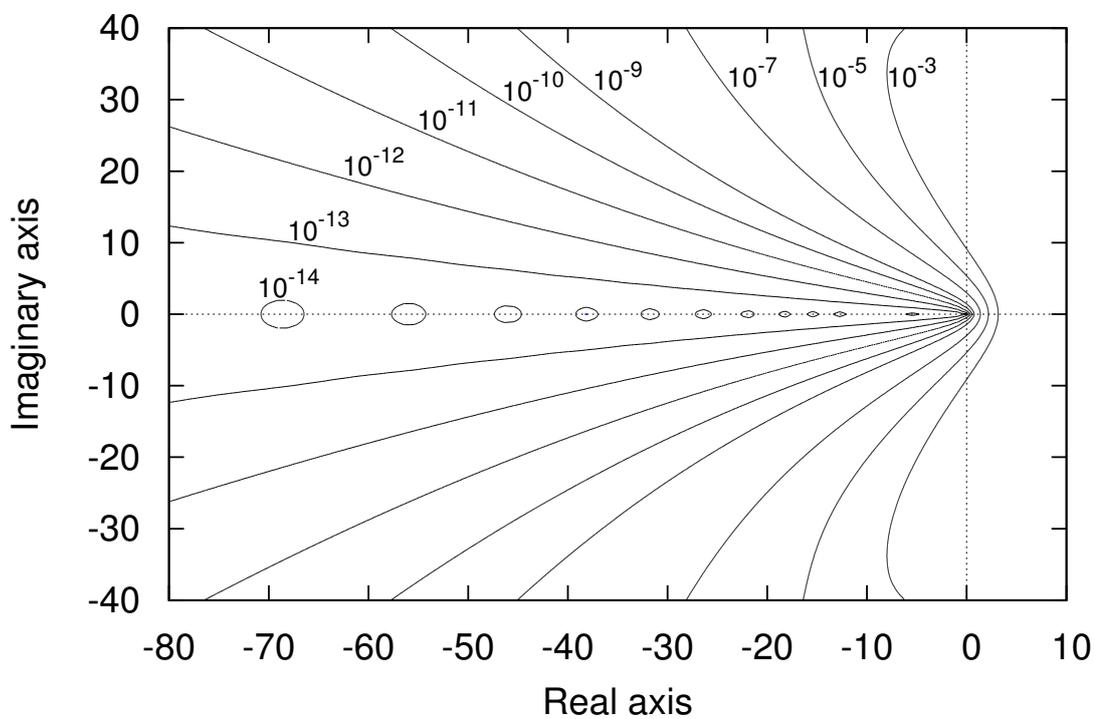
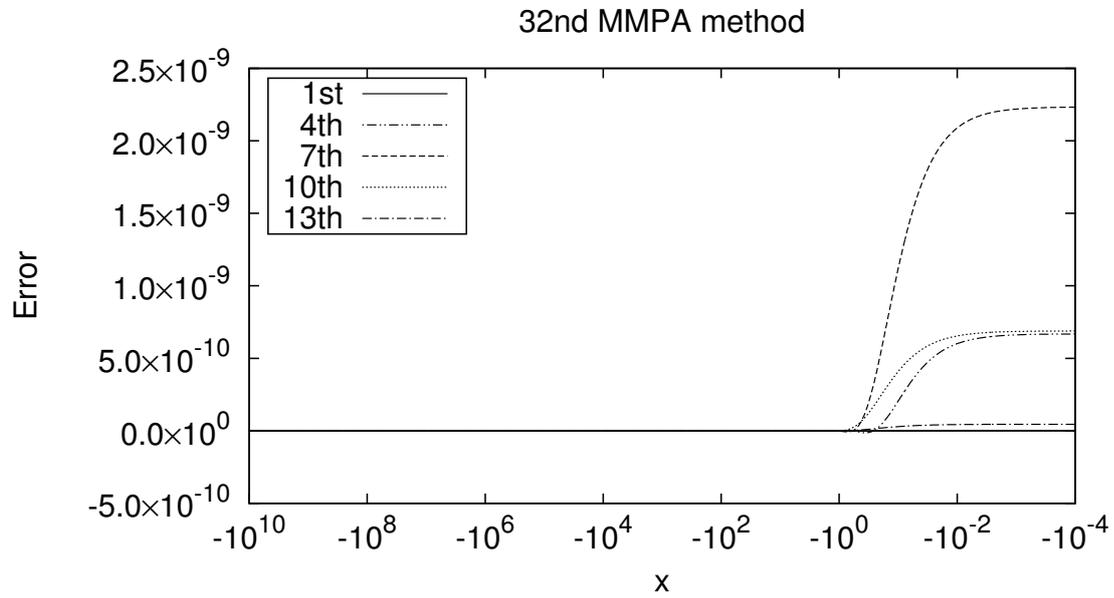
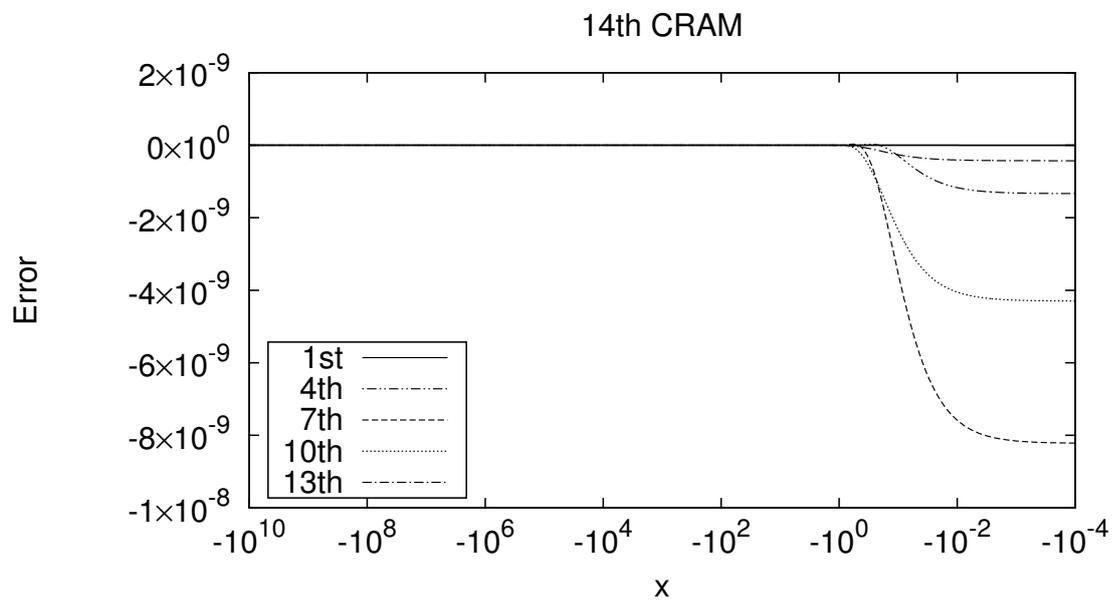


図 6: 複素平面上における 32 次 MMPA 法の $\exp(z)$ に対するスカラー近似誤差



(a) 32 次 MMPA 法



(b) 14 次 CRAM

図 7: 負の実軸上における 32 次 MMPA 法、14 次 CRAM 導関数の $\exp(x)$ に対するスカラー近似誤差

2.4 MMPA 法による燃焼計算

MMPA 法による行列指数近似計算を適用すると、燃焼方程式は以下のように表される。

$$\mathbf{n}(t) \approx a_0 \mathbf{n}_0 + \sum_{i=1}^n a_i \left\{ (\mathbf{A}t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}t - c\mathbf{I})^{-1} \right\}^i \mathbf{n}_0 \quad (15)$$

(15) 式より、一度行列 $(\mathbf{A}t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}t - c\mathbf{I})^{-1}$ を計算すれば、その行列とベクトルの乗算を繰り返すことでより高次の項を計算できる。したがってこの手法に必要な計算は、1 回の逆行列計算と、 n 回の行列とベクトルの乗算、そして $(n+1)$ 個のベクトルの線形結合のみである。CRAM のような有理式近似のアプローチを採る手法と比べ、逆行列計算の回数を大幅に減らすことができる¹⁰。

また、行列 $(\mathbf{A}t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}t - c\mathbf{I})^{-1}$ が疎行列の場合、1 度計算した行列の零要素を排除し非零要素のみを圧縮して保持することで、行列とベクトルの乗算の際の計算時間を簡単に低減することができる。図 8 は実際の行列の 1 例であるが、比較的 0 要素が多く計算時間の短縮が期待される。MMPA 法と CRAM の計算時間の比較は 2.6 節で行う。

MMPA 法の利点の 1 つとして複素数計算が不要なことが挙げられる。MMPA 法は多項式近似に基づいているため、全ての係数 a_i は実数であり、全ての計算を実数計算により行うことができるため計算コードへの実装や計算時間の点で非常に有利である。これは CRAM のような有理式近似のアプローチを採る手法に対する大きな利点である。

MMPA 法には情報落ちに対して安定であるという利点もある。通常燃焼行列のように非常に大きい数と小さい数が混在している行列のべき乗にはその過程での情報落ちの可能性がある。しかし MMPA 法は 32 次という高次のべき乗計算を行うにも関わらず解は安定である。その理由は行列の固有値の範囲で説明できる。行列 $(\mathbf{A}t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}t - c\mathbf{I})^{-1}$ の固有値は、

$$\lambda'_i = \frac{\lambda_i + c}{\lambda_i - c}, \quad i = 1, \dots, m \quad (16)$$

と表される。2.2 節より全ての λ_i は $(-\infty, 0]$ の範囲内にあるので、全ての λ'_i は $[-1, 1)$ の範囲内にある。したがって行列 $(\mathbf{A}t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}t - c\mathbf{I})^{-1}$ を何回べき乗したとしても全ての固有値は $[-1, 1]$ の範囲内にあり、このことが MMPA 法の安定性につながっていると考えられる。これは CRAM に対する利点でもある。すなわち、CRAM を実数計算によって計算しようとする場合、CRAM の複素計算の基礎式を実数計算の式に展開するのであるが、その際に燃焼行列同士の乗算の項 $(\mathbf{A}t)^2$ が生じるのである。固有値の範囲が $(-\infty, 0]$ の行列同士の乗算により固有値の範囲が一気に広がり、情報落ちの可能性が生じる¹¹。そのため、そのような心配の無い MMPA 法は情報落ちに対してより安定であると言える。

図 5、7 で示されているように、 x がどれだけ $-\infty$ に近づいても、誤差は発散せずある一定の最大値を保っている。これは、どれほど短い半減期の核種でも、あるいはどれほど長い時間幅に対しても、誤差を増加させることなく MMPA 法が適用できることを意味する。行列指数計算のために短い時間幅を設定する必要がなくなり計算時間の点で非常に有利であり、また任意の時間幅を自由に設定できるため、計算の利便性という点も大きな長所である。

¹⁰ただし行列指数自体を求めたい場合、 n 回の行列同士の乗算を行わなければならない、CRAM と比べて計算時間の点で不利になる。

¹¹何回ものべき乗では無いため、直ちに深刻な情報落ちにつながる訳では無く、今のところ目立った情報落ちは見られない。現在使用している JENDL の FP データよりも更に短い半減期の核種を考慮する場合には問題が生じてくる可能性はある。

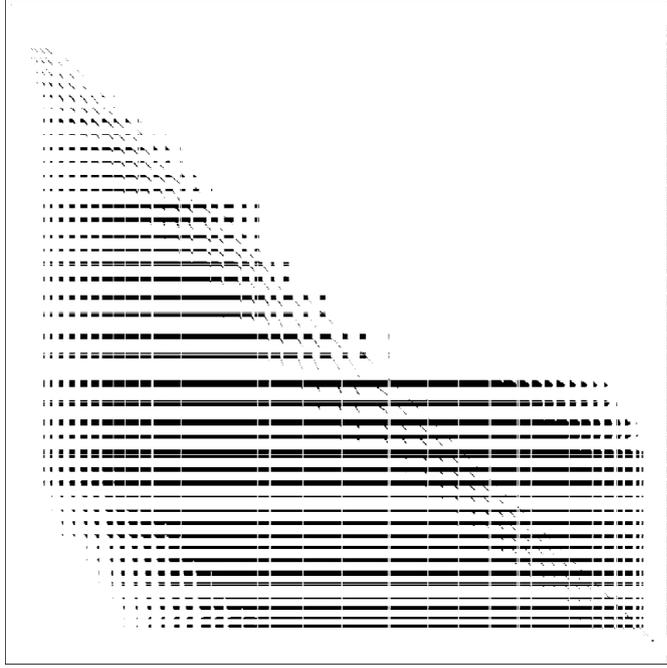


図 8: 行列 $(\mathbf{A}t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}t - c\mathbf{I})^{-1}$ の 1 例

2.5 マルチステップ計算

図 9 は 48 次 MMPA 法の近似式において、任意定数 c と誤差の絶対値 $|f(x) - e^x|$ の $(-\infty, 0]$ における最大値との関係を示している。 c が最適と思われる値よりもある程度離れていても、近似誤差は比較的小さいままである。近似次数を十分に大きく取ることによって、近似精度の大幅な悪化を招くことなく任意定数 c をある程度変化させることができる。

燃焼行列が時間に依存せず不変である場合、この性質を用いることにより複数のタイムステップ幅に対応した燃焼計算を 1 度に行うことができる。まず、時間幅 Δt に対応する燃焼計算による数密度の計算結果は以下のように表される。

$$\mathbf{n}(\Delta t) \approx a_0 \mathbf{n}_0 + \sum_{i=1}^n a_i \{(\mathbf{A}\Delta t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}\Delta t - c\mathbf{I})^{-1}\}^i \mathbf{n}_0 \quad (17)$$

そして異なる時間幅 $p\Delta t$ に対応する数密度は、任意定数 c を $c' = pc$ に置き換えることにより、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(p\Delta t) &\approx a'_0 \mathbf{n}_0 + \sum_{i=1}^n a'_i \{(\mathbf{A}p\Delta t + c'\mathbf{I})(\mathbf{A}p\Delta t - c'\mathbf{I})^{-1}\}^i \mathbf{n}_0 \\ &= a'_0 \mathbf{n}_0 + \sum_{i=1}^n a'_i \{(\mathbf{A}\Delta t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}\Delta t - c\mathbf{I})^{-1}\}^i \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (18)$$

と表される。ただし a'_i ($i = 1, \dots, n$) は Remez アルゴリズムにより近似係数を決定する際に任意定数 c の代わりに c' を用いた際の値である。(17) 式と (18) 式を比較すると、以下のような Δt に対応した n 個のベクトル

$$\{(\mathbf{A}\Delta t + c\mathbf{I})(\mathbf{A}\Delta t - c\mathbf{I})^{-1}\}^i \mathbf{n}_0, \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

を計算し、任意定数として pc を用いた係数 a'_i を Remez アルゴリズムにより計算すれば、時間幅 $p\Delta t$ に対応する燃焼計算の結果を、 n 個のベクトルを a'_i を重みにして線形結合することで得ることができる。これは、様々な時間幅に対応した係数 a'_i を予め準備しておくことで、複数の時間幅に

対応した燃焼計算をベクトルの線型結合で一度に計算できることを意味する。

1例として、48次MMPA法の近似式を考える。図9に示されているように、 $c = 5 \sim 100$ の範囲内では、負の実軸上における最大誤差は 1.0×10^{-14} 以下であり、これは14次のCRAMと比較して同等の精度である。これは、 c が5から100の範囲内では、48次MMPA法近似式は14次のCRAMと同程度の精度で2.2節で示された2条件の内1つ目を満たす。しかし、2つ目の条件に関しては、 c が小さい場合、導関数の階数が大きくなるにつれて誤差が大きくなり条件を満たさなくなる。図10は14次CRAM近似式及び任意定数 $c = 5, 16, 100$ のMMPA法近似式導関数の $\exp(x)$ に対する $x = 0$ における近似誤差を階数の階乗で割ったもの $|f^j(0) - e^0|/j!$ と階数の関係を示している。 $c = 5$ のとき、MMPA法導関数の誤差は $j > 1$ においてCRAMのものを上回っている。これは、行列指数近似において固有値の重複度が2を上回ると、14次のCRAMよりも近似精度が悪化する可能性があるということを示している。一方で $c \geq 16$ では、MMPA法導関数の誤差はどのような階数においても14次CRAM導関数の最大誤差を超えていない。したがって任意定数 c が16から100の間では、すべての行列に対して48次MMPA法は14次CRAMと同程度の行列指数近似精度を持つと言える。

任意定数 $c = 16, 32, \dots, 96$ に対応した係数 a_i のセット6つを予め用意しておくことで、6つの燃焼計算結果 $\mathbf{n}(\Delta t), \mathbf{n}(2\Delta t), \dots, \mathbf{n}(6\Delta t)$ を1度のMMPA法計算で得ることができる。言い換えると、ある時間幅を6等分したそれぞれの時点での数密度を1度に計算することができることになる。さらに、図11のように c の値のとり方を工夫することにより、43時点での数密度を2回のMMPA法で得ることができる。この図では、 c を16から100まで変化させることにより、まず Δt を基準として6つの時点での値を計算し、次に $7\Delta t$ を基準として残りの37時点での値を得ている。これと同様にしてより多くの時点での値を少数回のMMPA計算で得ることができる。この手法を「マルチステップ計算」と名付けることとする。

このような計算は、燃焼行列が不変である冷却計算や、燃焼計算において1つのタイムステップ間の数密度の詳細な変化を得たいときに応用することができる。後者の例としては一般化摂動論に基づく燃焼感度計算を挙げることができる。燃焼感度計算では、核種数密度、随伴数密度、変動パラメータの積が全サイクルに渡って積分されることで感度が計算される¹²。数密度や随伴数密度の値が時間に対して激しく変動する場合¹³、積分結果の離散化誤差を低く抑えるために時間幅を非常に細かく設定しなければならず、通常の燃焼計算と比べて燃焼感度計算の計算時間が大幅に増大する。燃焼感度計算にマルチステップ計算を適用することで、複数の時間幅での数密度、随伴数密度を同時に計算し、離散化誤差を低減しつつ計算時間を短縮することができる。

このような計算をCRAMや他の行列指数近似手法で計算しようとする場合、1度行列指数自体を計算し、その後行列指数と核種数密度ベクトルとの乗算を複数回行うことになる。このような方法は行列指数自体の計算や複数回の行列とベクトルの乗算により計算時間を要する。マルチステップ計算では少数回のMMPA計算を行えば良く、計算時間を短縮できる可能性がある。詳細な計算時間の比較については2.6節で述べる。

2.6 検証計算

ここでは、開発したMMPA法の精度を検証するため、CBZの燃焼計算機能にMMPA法とCRAMを実装し、これによる燃焼計算の結果を比較する。考慮する核種はJENDL/FPD-2011にデータの存在するすべてのFP1284核種と、アクチニド21核種である。FPの中で最も短い半減期はY-88mの0.0003秒であり、もしMMPA法やCRAM以外の従来の行列指数計算手法を用いれば値が発散し燃焼計算自体が不可能となる条件である。

¹²4.3節参照。

¹³短半減期核種によく見られる。

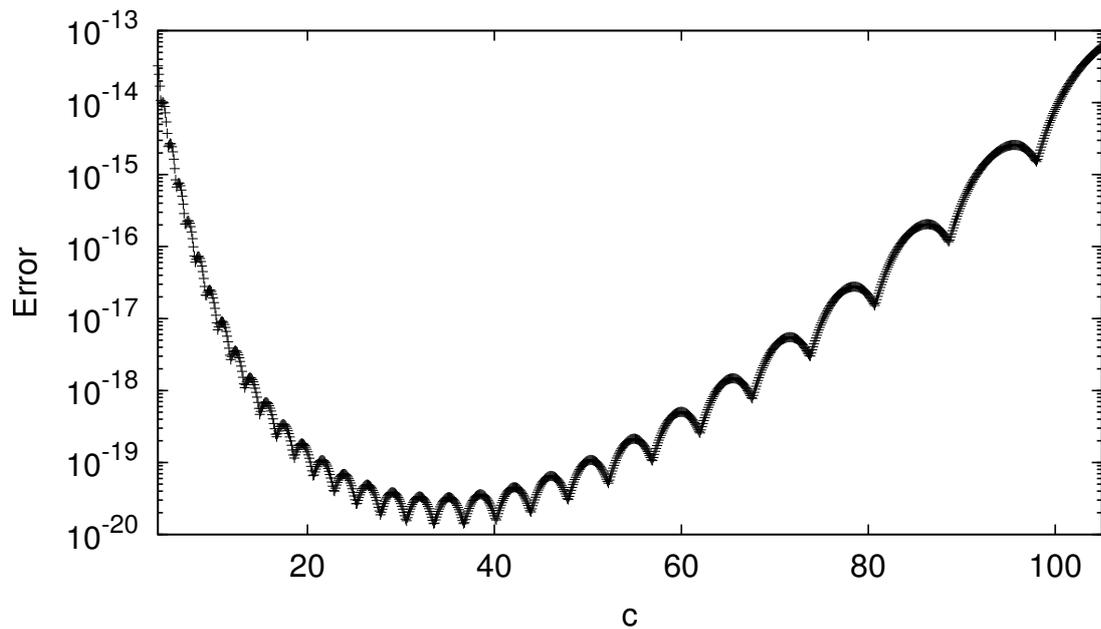


図 9: 48 次 MMPA 法近似式における近似誤差の最大値と任意定数 c との関係

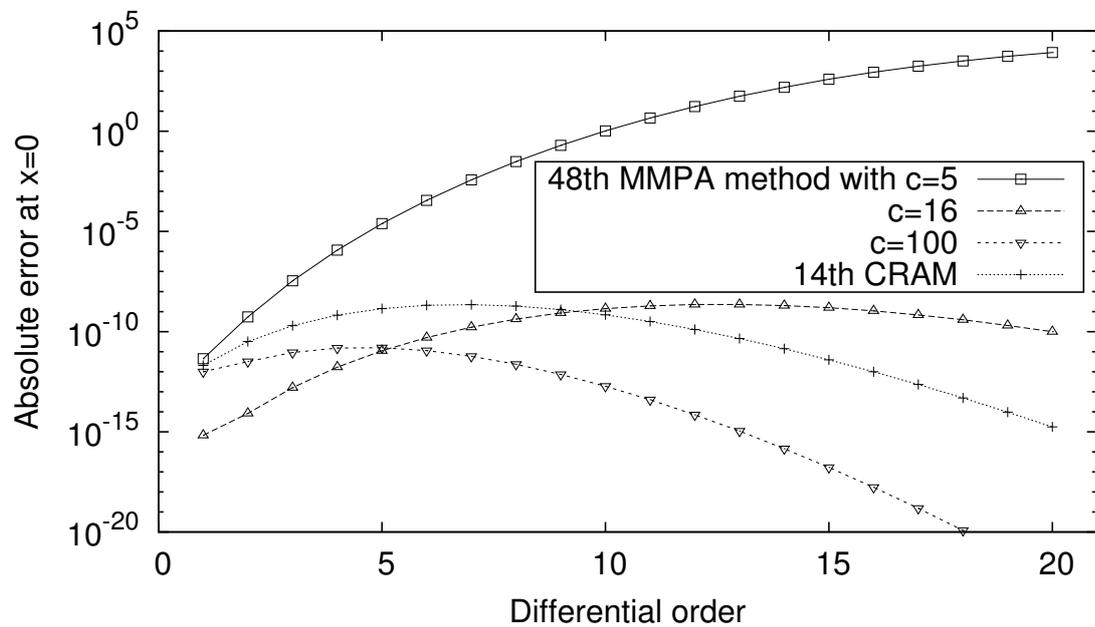


図 10: 48 次 MMPA 法 ($c = 5, 16, 100$) と 14 次 CRAM 近似式導関数の $x = 0$ における $\exp(x)$ に対する近似誤差と階数の関係

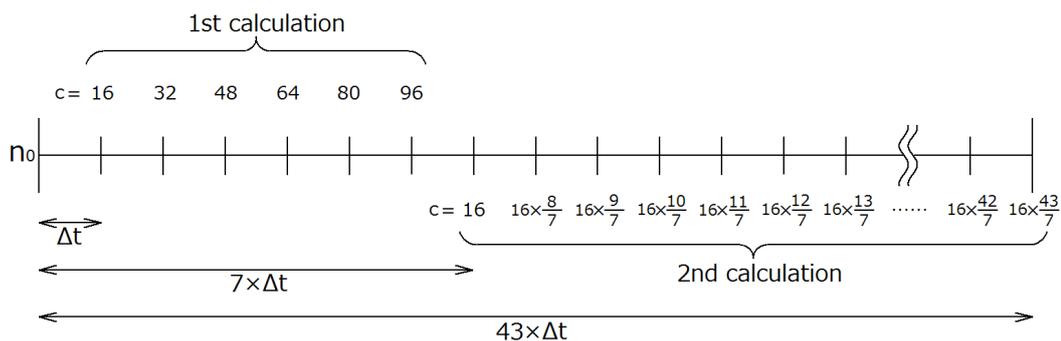


図 11: 43 点の値を 2 回の計算で求める場合のマルチステップ計算における任意定数 c の設定方法の考え方

計算体系は 5%濃縮 UO_2 ピンセルモデルとする。燃焼条件を単純化するため、中性子束 $6.0 \times 10^{15} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ で一定とし、燃焼行列は全サイクル中不変とする。

参照計算としては 16 次の CRAM による値を用いる¹⁴。CRAM の計算方法としては、前述のように複素数計算をそのまま行うものと基礎式を展開して実数計算式に変換する方法とがあるが、この計算では後者の方法で CRAM を実装する。

まず、32 次の MMPA 法 ($c = 24.1$) と 14 次の CRAM による燃焼計算を行い、サイクル末期での核種数密度の誤差を比較する。サイクル長は 1000 日、ステップ幅 Δt は 1 日とする。各ステップにおいて、燃焼方程式が MMPA 法または CRAM によって解かれる。図 12 はサイクル末期における全核種生成量の相対誤差の絶対値を各核種の半減期に対してプロットしたものである。MMPA 法と CRAM の精度はほとんど同程度であり、誤差の値自体も非常に小さいことが分かる。また誤差と半減期との間に相関関係が見られず、半減期が 1 秒未満の核種の誤差も非常に小さい。計算時間は MMPA 法が 171 秒、CRAM が 281 秒となり、MMPA 法のほうが短い結果となった¹⁵。

次に、マルチステップ計算を検証するため、1000 日間のサイクルを 43 等分し、それぞれの時点での核種数密度の計算を行う。マルチステップ計算を用いることで、各 43 点での核種数密度は 2 回の MMPA 計算により得られる。マルチステップ計算には 48 次 MMPA 法を用い、任意定数 c は図 11 で示されたものとする。また各 c に対応した係数 a_i を 43 セット用意しておく。1 つ目の検証と同様に比較のために 14 次の CRAM による計算も行うが、1 つ目の検証と異なり、まず $\Delta t = 1000/43$ に対応した行列指数自体を CRAM により計算し、その後行列指数と核種数密度ベクトルとの乗算を 43 回行う。これは可能な限り CRAM による計算時間を減らし、実際の計算に可能な限り則して比較を行うためである。図 13 は各 43 点において最も誤差の大きかった核種の、相対誤差の絶対値をプロットしたものである。マルチステップ計算による結果は、すべての点において CRAM による結果と同等の精度を持っている。この計算をそれぞれ 100 回行い計算時間を比較すると、マルチステップ計算では 28 秒、CRAM では 89 秒という結果になった¹⁶。

¹⁴他の手法による参照計算が難しいため。

¹⁵Intel i7 2.1 GHz CPU

¹⁶Intel i7 2.1 GHz CPU

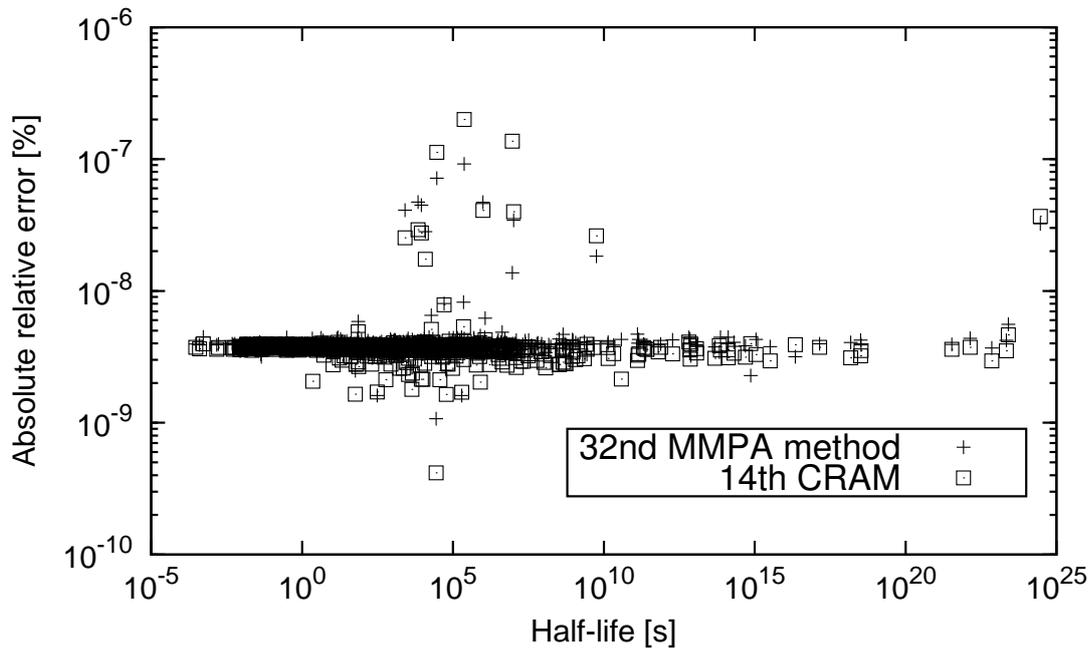


図 12: 32 次 MMPA 法と 14 次 CRAM によるサイクル末期における核種数密度の相対誤差の絶対値と各核種の半減期との関係

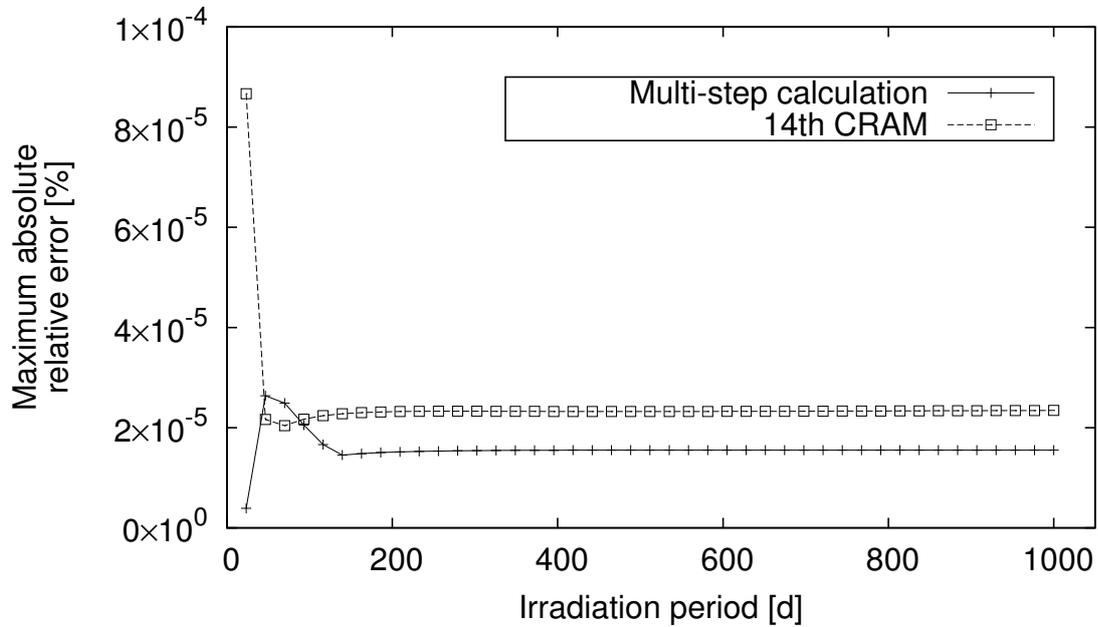


図 13: マルチステップ計算と CRAM による 43 点における核種数密度の相対誤差の絶対値の最大値

3 核種生成量に対する核データ感度解析

3.1 核種生成量と核データ

燃焼計算では中性子輸送計算と核種生成量計算が交互に繰り返し行われる。その際には各核種の中性子反応断面積や核分裂収率、崩壊定数などが用いられる。したがって核種生成量の精度は使用する核データに強く依存する。

核データの測定は難しく、その真値は未だに求まっているとは言い難い状況である。核データは全世界で測定され、それらのデータを基に評価済み核データライブラリが作成される。核データライブラリは各国で作成されており、代表的なものは日本の JENDL、アメリカの ENDF、ヨーロッパの JEFF が挙げられる。核データが十分に精度良く測定され、その評価も完璧なものであれば各ライブラリの値は一致するはずである。しかし現実にはライブラリ間には大小の差異が存在し、それらを用いた計算結果にも差異が存在する。核種生成量も同様であり、いくつかの核種については無視できない大きさの差異が見られる [16][17]。

本研究では核データの不確かさによる核種生成量不確かさの定量化を行うのであるが、その前段階として、そもそも現時点でライブラリ間の不一致がどの程度であるのかを把握することは有益であると考えられる。また核種生成量に生じる差異が、ライブラリ間のどの核種のデータ差異に由来するものなのかを明らかにすることで、核データライブラリの進歩に貢献することができる。

本章では主要ライブラリの最新版である JENDL-4.0[18]、ENDF/B-VII.1[19]、JEFF-3.1.1[20]¹⁷の核データを用いて実際の軽水炉燃料を模擬した燃焼計算を行いライブラリ間の核種生成量差異を明らかにする。その際得られた核種生成量は使用済燃料組成の測定値である PIE(照射後試験) データと比較した C/E 値として評価する。

またそれらの差異の要因を明らかにするため、燃焼感度解析も行う。核種生成量の核データに対する感度係数とライブラリ間の核データの差を乗ずることで、核データ差異が核種生成量評価にどの程度影響しているのかを定量的に明らかにする。

3.2 使用した PIE データ

本章で用いる PIE データは、文献 [16][17] から引用するそれぞれ UO₂ 燃料と MOX 燃料のものである。

UO₂ 燃料のデータでは、4つのサンプルに対してアクチニド 17 核種と FP38 核種が測定されている。MOX 燃料のデータでは、2つのサンプルに対して FP40 核種と U-238 が測定されている。どちらのデータにおいても測定誤差がすべての核種に対して与えられている。測定手法の詳細については文献 [22] に記載されている。

これらのサンプルはヨーロッパの商用 PWR で照射されたものであり、UO₂ 燃料と MOX 燃料はそれぞれ異なる炉で照射されている。各々のサンプルは同じ炉、同じサイクルで照射されているが炉心での位置が異なる。従って各サンプルの燃焼度と周囲の減速材温度は異なる。文献 [16][17] にはサンプルごとの減速材温度とサンプルの破壊同位体測定から得られた局所燃焼度が記載されている。

3.3 計算条件

本章ではまず文献 [16][17] に記載されている UO₂ 燃料と MOX 燃料の照射を模擬した燃焼計算を CBZ にて行う。

¹⁷本研究中に JEFF-3.2[21] がリリースされたため、本章と同様の計算条件において JEFF-3.1.1 と-3.2 との比較を別途行った [15]。

この計算で用いる燃焼チェーンは、FP197 核種とアクチノイド 21 核種から成るものである。これは FP4 核種 (Sn-125、I-133、Nd-149、Gd-153) を除き SRAC2006 開発者用詳細チェーンと同じものである。燃焼度や出力等の条件は文献 [16][17] に記載されているものを再現するように設定する。記載されていない条件は文献 [23] や文献 [24] から一般的な条件として引用する。

文献 [16][17] に記載されているサンプルの測定値は「溶液 1g 中の数密度」で与えられている。計算値と測定値を比較するため、核種数密度の測定値を各サンプルの U-238 量で規格化する。

核データライブラリ間での比較のためそれぞれのサンプルに対して JENDL-4.0、ENDF/B-VII.1、JEFF-3.1.1 を用いて 3 回の計算を行う。中性子反応断面積は JENDL-4.0、ENDF/B-VII.1、JEFF-3.1.1 のものをそれぞれ用いる。ただし JENDL-4.0 の計算においては、Eu-156 捕獲断面積は JENDL-4.0 アップデートファイル (JENDL-4.0u) のものを用いる。核分裂収率と崩壊定数は ENDF と JEFF に関しては ENDF/B-VII.1、JEFF-3.1.1 のものを用いるが、JENDL に関しては JENDL/FPY-2011 と FPD-2011 のものを用いる。

感度係数の計算には CBZ の一般化摂動論に基づく燃焼感度計算機能を用いる。この感度係数と核データ差異を乗じることにより核種生成量差異への寄与を定量的に評価する。

3.4 結果

3.4.1 C/E 値

UO₂ 燃料と MOX 燃料について、計算値と計測値との相対比を C/E-1 として図 14 と図 15 に示す。それぞれの値はサンプル間の平均値である。計算値と計測値との差異はいくつかの核種を除き 20% 以下である。

Sr-86 のデータは図に載せていない。UO₂、MOX 燃料ともに Sr-86 の (C/E-1) 値は約 0.7 と著しく小さく、またライブラリ間の差異は比較的小さい。Sr-86 の測定値のあるサンプルは UO₂、MOX 燃料ともに 1 つしかなく、溶液中数密度の絶対値は非常に小さい。そのため Sr-86 のデータは信頼できないと判断したためである。

図 14、15 より、いくつかの核種においてライブラリ間に大きな差異が生じている。表 2 に JENDL-4.0 に対する ENDF/B-VII.1 と JEFF-3.1.1 の値の差異の内 5% 以上のものを示す。表 2 より、Rb-85、Sb-125、Gd-158、Gd-160 についてライブラリ間の差異が非常に大きいことが分かる。全体的に JENDL と JEFF との間の差異が、JENDL と ENDF との間のものに比べて大きい傾向がある。

3.4.2 感度解析

表 2 で示された差異に対して、その要因を特定するため感度解析を行う。表 3、4 は感度解析の結果であり、20% 以上の核種生成量差異の要因である核種と反応の種類、それぞれの寄与割合を表している。この寄与割合は核データ差異と感度係数の積であり、全反応の寄与の合計によって規格化されている。表 3、4 より、捕獲、核分裂断面積、核分裂収率の差異が核種生成量に大きな影響を与えている一方、崩壊定数の差異による大きな影響は無い。

核分裂収率の差異による影響を見ると、Pu-239、-241 の核分裂収率の差異が大きな影響を与えていることが分かる。ライブラリ間の核分裂収率の違いを表 5 に示す。本章で行った燃焼計算には FP197 核種燃焼チェーンを用いているため、これらの収率の値は累積収率であり、ライブラリに収納されている独立収率ではない。すなわち 1000 以上存在する FP 核種の内、チェーンを構成する 197 核種以外の核種の収率は崩壊パスに沿って 197 核種いずれかに足しこまれている。したがって表 5 で示された FP 自体の独立収率のライブラリ間差異が核種生成量に影響している場合と、その核種の崩壊パス上流の核種の独立収率の差異が影響している場合の 2 通りが考えられる。

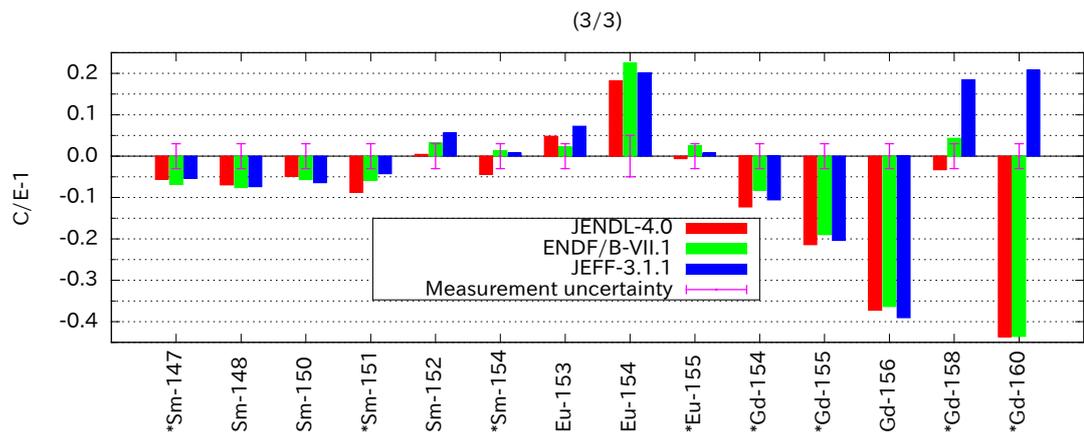
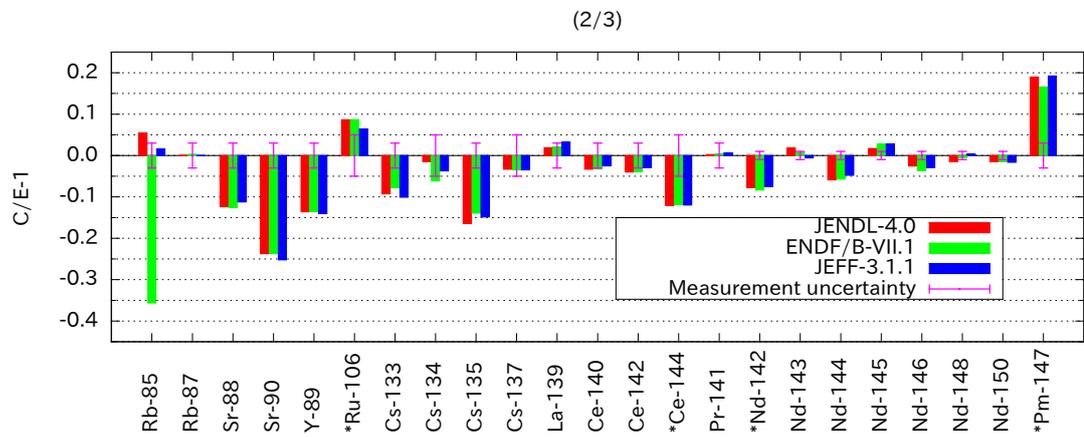
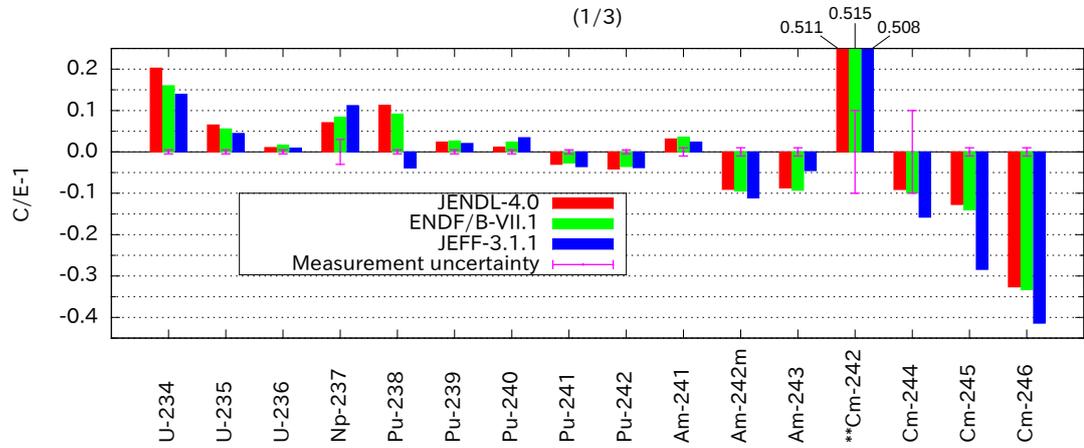


図 14: UO₂ 燃料における計算値と実験値の比較 (*:サンプル数 1、**:サンプル数 3)

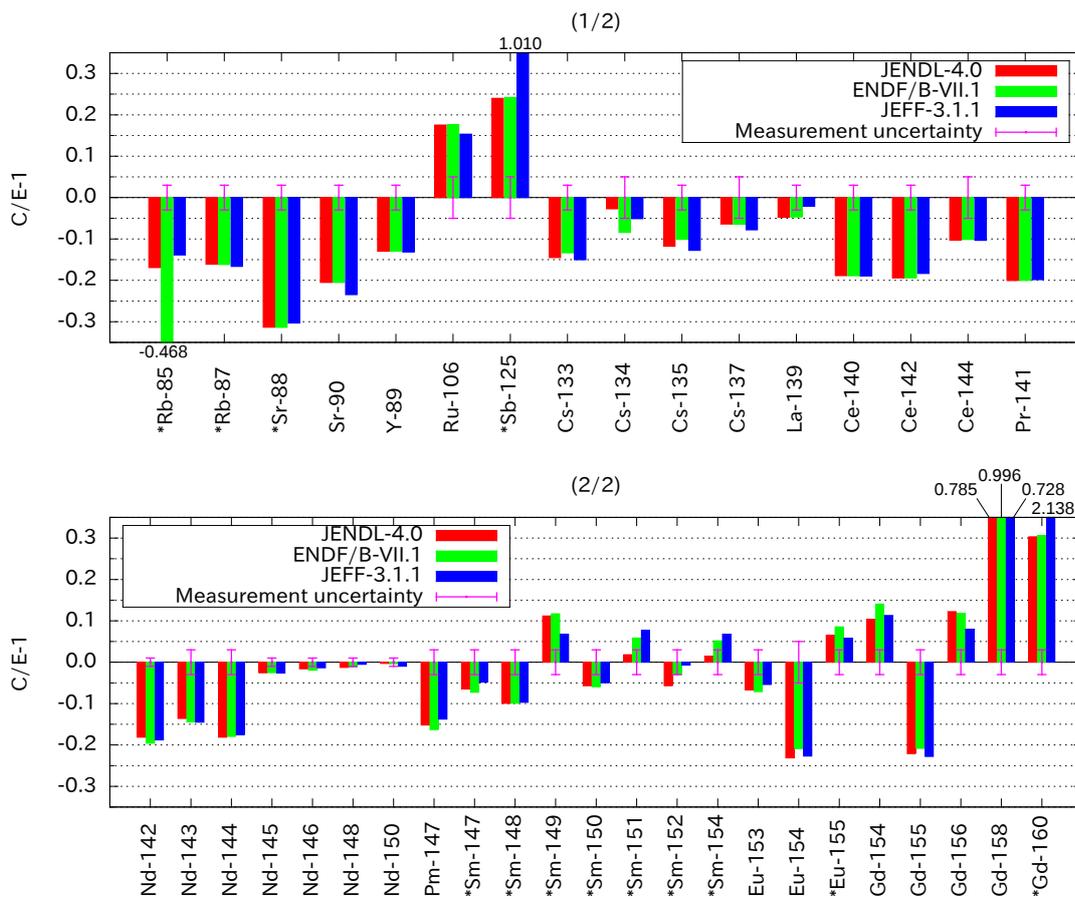


図 15: MOX 燃料における計算値と実験値の比較 (*:サンプル数 1、**:サンプル数 3)

表 2: UO₂、MOX 燃料における JENDL-4.0 と比較した ENDF/B-VII.1 と JEFF-3.1.1 の核種生成量の差異 (5%以上)

Fuel	Nuclide	Difference [%]	
		ENDF/B-VII.1	JEFF-3.1.1
UO ₂	U-234		-5.3
	Pu-238		-13.6
	Cm-244		-7.4
	Cm-245		-18.0
	Cm-246		-13.1
	Sm-152		5.1
	Sm-154	5.9	5.7
	Gd-158	7.9	22.5
	Gd-160		114.2
MOX	Rb-85	-36.0	
	Cs-134	-5.9	
	Sb-125		62.1
	Sm-151		5.8
	Sm-152		5.3
	Sm-154		5.2
	Gd-158		15.5
	Gd-160		140.8

表 5 より、Rb-85 を除いて、JEFF-3.1.1 と他 2 ライブラリの間の差異が大きい。特に JEFF-3.1.1 の Pu-241 からの Gd-160 の収率が他 2 ライブラリと比べて非常に大きい。これが図 14、15 に示されている Gd-160 生成量差異が UO₂ 燃料より MOX 燃料で大きくなることの原因である。

表 3、4 より中性子反応断面積の差異も大きな影響を与えている。より詳細な評価のため、いくつかの特徴的なケースを取り上げ、中性子エネルギー群ごとの感度解析を行う。図 16 から 21 にかけて、採り上げたライブラリ間の反応断面積の違いと、核種生成量に対する単位レサジー当たりの寄与をプロットしたものを示す。

図 16 は JENDL-4.0 と ENDF/B-VII.1 の Cs-133 捕獲断面積と、MOX 燃料における Cs-134 生成量差異に対する両断面積差異の寄与をエネルギー群ごとにプロットしたものである。生成量差異の要因は、5.91eV における共鳴ピークが ENDF/B-VII.1 の方が小さいことにある。

図 17 は JENDL-4.0 と ENDF/B-VII.1 の Sm-153 捕獲断面積と、UO₂ 燃料における Sm-154 生成量差異に対する両断面積差異の寄与をエネルギー群ごとにプロットしたものである。生成量差異の要因は、ENDF/B-VII.1 では存在する 1.92eV における共鳴ピークが JENDL-4.0 では存在しないことにある。

図 18 は JENDL-4.0 と JEFF-3.1.1 の Pu-238 捕獲断面積と、UO₂ 燃料における Pu-238 生成量差異に対する両断面積差異の寄与をエネルギー群ごとにプロットしたものである。生成量差異の要因は、熱中性子領域における両ライブラリ間の差異によるものである¹⁸。0.1eV 付近に寄与のピークがあるのは、UO₂ 燃料における熱中性子ピークによるものと考えられる。

図 19、20 は JENDL-4.0 と JEFF-3.1.1 の Eu-156 捕獲断面積と、UO₂、MOX 燃料における Gd-158 生成量差異に対する両断面積差異の寄与をエネルギー群ごとにプロットしたものである。生成量差異の要因は、両ライブラリ間の熱中性子領域における差異と、熱・共鳴領域境界付近の差異によるものである。0.1eV 付近の寄与を見ると、UO₂ 燃料の方が MOX 燃料と比べて大きい。これは UO₂ 燃料のスペクトルが MOX 燃料と比べてより軟らかいためと考えられる。

図 21 は JENDL-4.0 と JEFF-3.1.1 の Cm-245 核分裂断面積と、UO₂ 燃料における Cm-245 生成量差異に対する両断面積差異の寄与をエネルギー群ごとにプロットしたものである。生成量差異の要因は、Pu-238 生成量のケースと同様であると考えられる。

¹⁸JENDL-4.0 の Pu-238 熱領域捕獲断面積は過小評価であるという指摘がある [25]。もし過小評価であるならば、実験値と比べた Pu-238 生成量の過大評価、JEFF-3.1.1 との間の生成量差異を共に説明することができる。

表 3: UO₂ 燃料における核種生成量差異の要因

Library	Nuclide	Cause		
		Nuclide	Reaction	Contribution ratio [%]
ENDF/B-VII.1	Sm-154	Sm-153	Capture	97.5
	Gd-158	Eu-156	Capture	81.6
JEFF-3.1.1	U-234	U-234	Capture	54.3
		Pu-238	Capture	30.4
	Pu-238	Pu-238	Capture	81.2
	Cm-244	Am-243	Capture	123.1
	Cm-245	Am-243	Capture	42.4
		Cm-244	Capture	33.5
		Cm-245	Fission	21.6
	Cm-246	Am-243	Capture	67.3
		Cm-244	Capture	49.7
		Cm-245	Fission	28.0
		Cm-245	Capture	-45.0
	Sm-152	Pm-151	Yield from Pu-239	23.1
		Sm-150	Capture	50.8
	Sm-154	Sm-153	Capture	23.1
		Sm-154	Yield from Pu-239	76.0
	Gd-158	Eu-156	Capture	79.7
Gd-160	Gd-160	Yield from Pu-241	96.2	

表 4: MOX 燃料における核種生成量差異の要因

Library	Nuclide	Cause		
		Nuclide	Reaction	Contribution ratio [%]
ENDF/B-VII.1	Rb-85	Rb-85	Yield from Pu-239	59.1
	Cs-134	Cs-133	Capture	89.0
		Cs-134	Capture	21.9
JEFF-3.1.1	Sb-125	Sn-125	Yield from Pu-239	31.7
		Sb-125	Yield from Pu-239	62.7
	Sm-151	Pm-151	Yield from Pu-239	30.0
		Sm-150	Capture	46.8
	Sm-152	Pm-151	Yield from Pu-239	32.3
		Sm-150	Capture	32.3
		Sm-152	Yield from Pu-239	22.4
	Sm-154	Sm-154	Yield from Pu-239	85.8
		Eu-156	Capture	31.7
	Gd-158	Eu-157	Yield from Pu-241	28.7
		Gd-158	Yield from Pu-241	44.7
		Gd-160	Gd-160	Yield from Pu-241

表 5: 核種生成量に大きな影響を与えるライブラリ間累積核分裂収率差異

Fissile nuclide	FP	Cumulative fission yield ($\times 10^{-3}$)		
		JENDL/FPY-2011	ENDF/B-VII.1	JEFF-3.1.1
Pu-239	Rb-85	4.427	2.843	4.525
	Sn-125	0.589	0.577	0.546
	Sb-125	0.527	0.539	0.623
	Pm-151	7.307	7.384	7.757
	Sm-152	5.762	5.763	6.081
	Sm-154	2.597	2.597	2.808
	Eu-157	1.354	1.354	1.694
Pu-241	Gd-158	0.923	0.922	1.448
	Gd-160	0.205	0.205	0.906

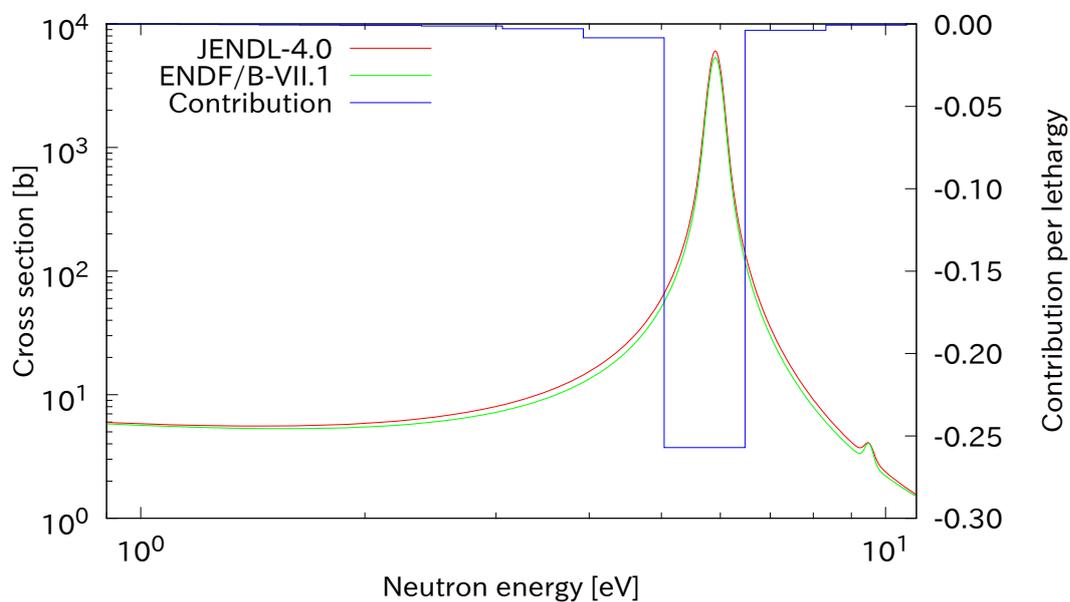


図 16: JENDL-4.0 と ENDF/B-VII.1 の Cs-133 捕獲断面積、及び MOX 燃料における Cs-134 生成量に対する両断面積間差異の寄与

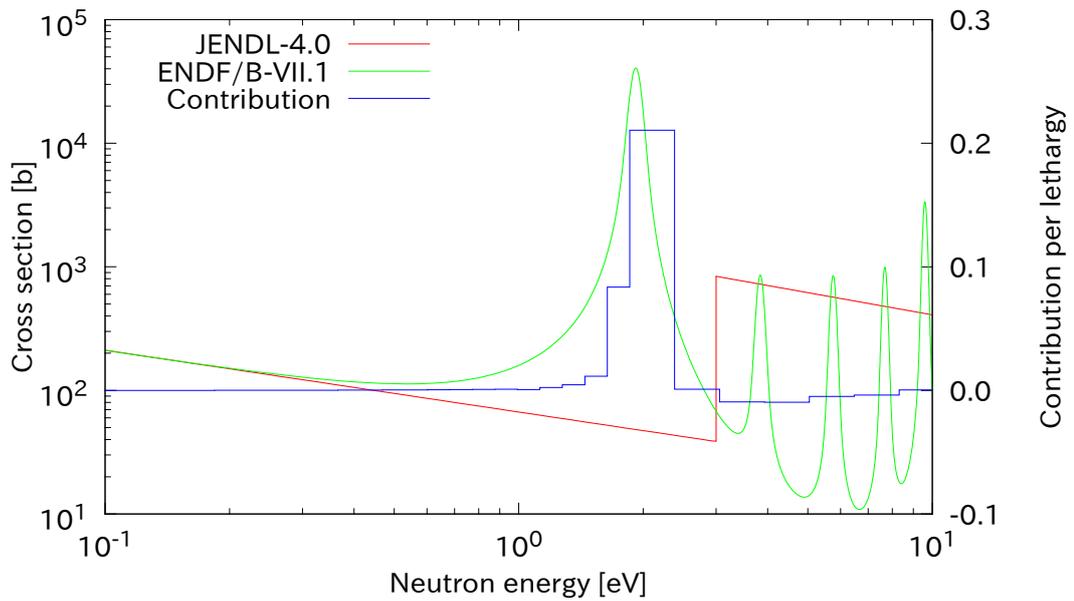


図 17: JENDL-4.0 と ENDF/B-VII.1 の Sm-153 捕獲断面積、及び UO_2 燃料における Sm-154 生成量に対する両断面積間差異の寄与

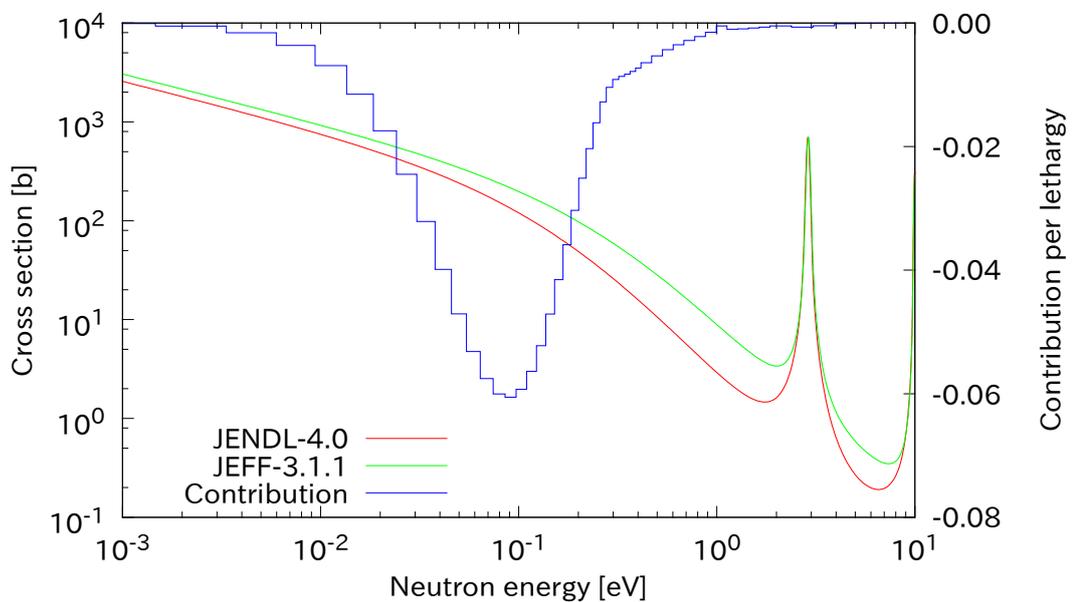


図 18: JENDL-4.0 と JEFF-3.1.1 の Pu-238 捕獲断面積、及び UO_2 燃料における Pu-238 生成量に対する両断面積間差異の寄与

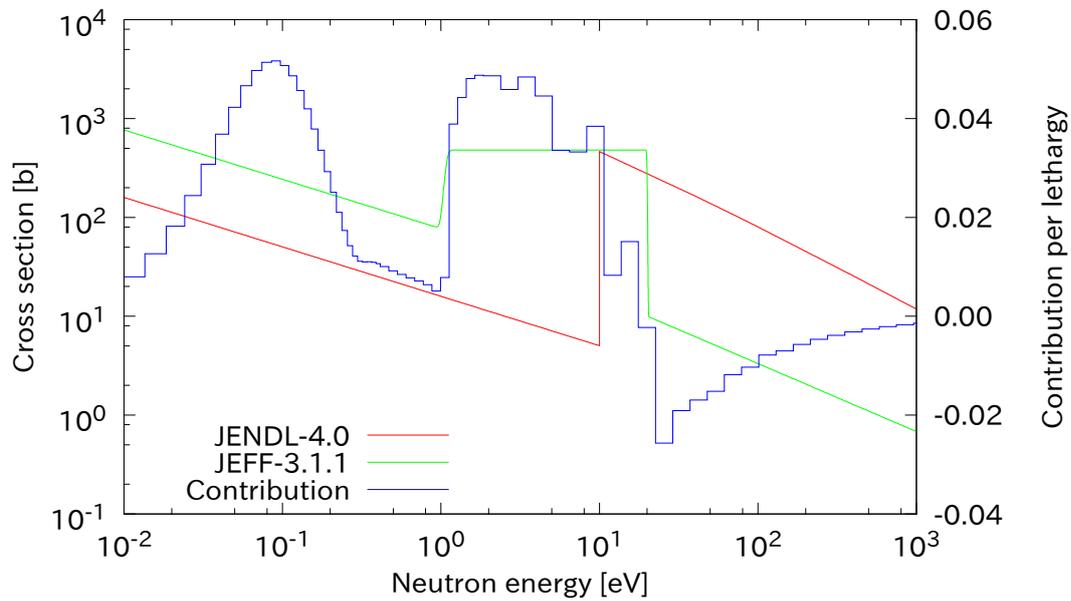


図 19: JENDL-4.0 と JEFF-3.1.1 の Eu-156 捕獲断面積、及び UO_2 燃料における Gd-158 生成量に対する両断面積間差異の寄与

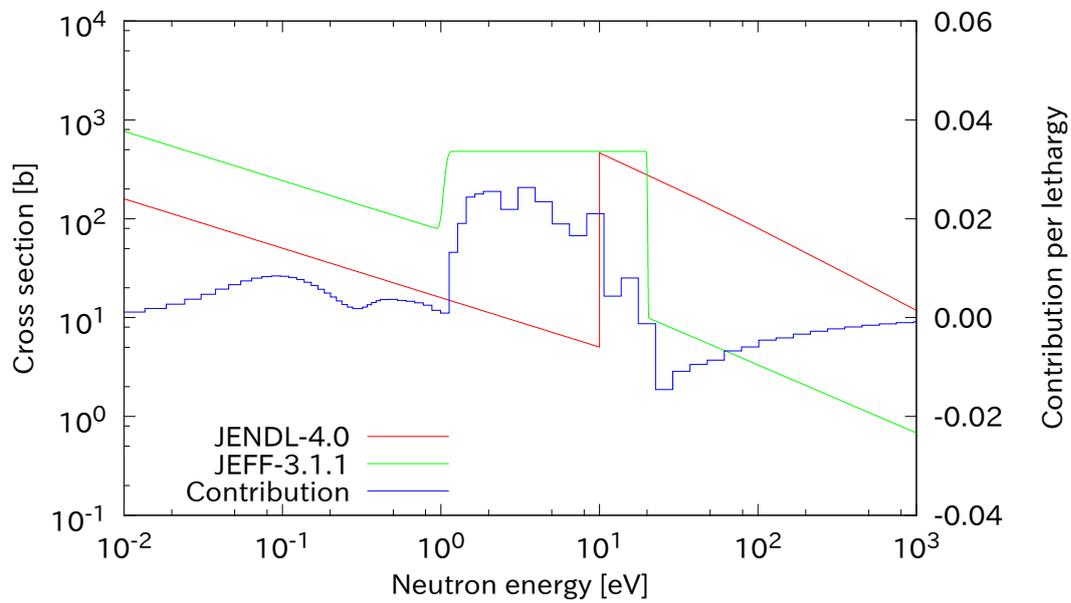


図 20: JENDL-4.0 と JEFF-3.1.1 の Eu-156 捕獲断面積、及び MOX 燃料における Gd-158 生成量に対する両断面積間差異の寄与

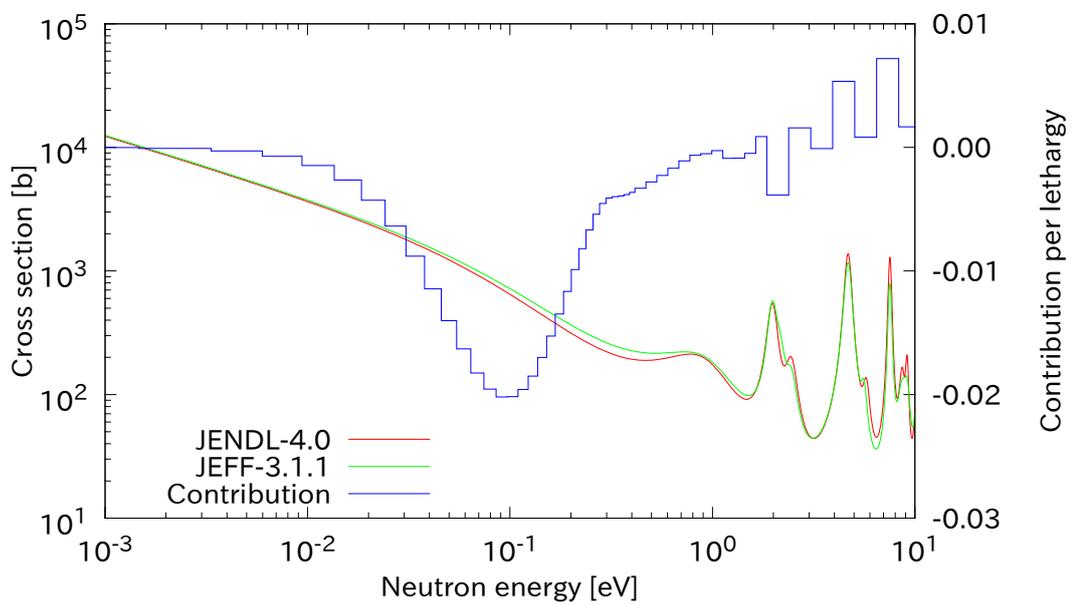


図 21: JENDL-4.0 と JEFF-3.1.1 の Cm-245 核分裂断面積、及び UO_2 燃料における Cm-245 生成量に対する両断面積間差異の寄与

4 崩壊熱・核種生成量不確かさの定量化

4.1 崩壊熱・核種生成量に生じる不確かさ

核データは不確かさを持っており、それを基に計算した崩壊熱・核種生成量にも核データ由来の不確かさが生じる。そのような不確かさを定量化することは、崩壊熱・核種生成量の値を利用する上で値自体の精度を明らかにすることとなり非常に有益である。例として崩壊熱を挙げると、1章で述べたように、現状で安全審査に用いられている不確かさについても、種々の近似を基にした値や大幅に保守的な値が用いられている。本研究ではCBZの燃焼計算機能により、実際の核燃料の燃焼を計算機上で模擬し、またFPやアクチニドといった全ての核種を統一的に扱った計算を行うことで、実現象に詳細に再現したモデルにより不確かさの定量化を行う。これにより不確かさ自体の妥当性の確認やさらなる安全性の向上、合理化が期待できる。

不確かさの定量化は誤差伝播計算によって行われる。すなわち、核データの持つ不確かさが、燃焼計算を通して結果である崩壊熱・核種生成量にどの程度伝播するのかを評価するのである。したがって燃焼計算において誤差伝播計算をするには、核データの不確かさである共分散と燃焼感度の2つを用意すれば良い。

なお以下単に不確かさと言った場合、その定義は 1σ とする。

4.2 核データ誤差情報

核データの誤差情報はライブラリに与えられているものを用いる。

核データライブラリには一部の重要な核種に対しては、中性子反応断面積などに共分散データという形で誤差情報が与えられている。本章ではJENDL-4.0で与えられている共分散データを用いることとする。ただしJENDL-4.0ではアクチニド核種にしか共分散データは与えられていないため、FP核種に関してはTENDL-2014[26]のものを用いることとする。以下これら中性子エネルギー依存核データの共分散を断面積共分散と呼ぶこととする。

核分裂収率や半減期、崩壊分岐比、崩壊エネルギーなどの崩壊データについては、値の標準偏差として誤差情報が与えられている。本章ではJENDL/FPY、FPD-2011でFP核種に対して与えられている値を用いることとする。アクチニド核種に対する崩壊データの不確かさはJENDLで与えられていないが、文献[30]によるとアクチニド核種の崩壊データ誤差は無視できる程度であるため、誤差要因としては無視することとする。またこれら収率・崩壊データの誤差には標準偏差のみで相関に関する情報は与えられていないため、基本的に相関は無いものとする。ただし核分裂収率に関しては核種間の相関を考慮しないことにより崩壊熱不確かさを過大評価することが知られている。そこで文献[27]のベイズ理論に基づき独立収率間の相関を与える式を用い、核分裂独立収率の共分散行列を計算し使用する(図22)。その際どの核種がどの質量チェーン¹⁹に属しているか、またそのチェーンにおける質量収率²⁰を得なければならない。本章の計算では、基本的に同じ質量数の核種は同じチェーンに属しているとし、質量収率はそのチェーン上の安定核種の累積収率とする。また同チェーン上に安定核種が複数存在する場合、安定核においてチェーンが複数に分断されていると考え、ある安定核種より原子番号が小さい核種はその安定核種の質量チェーンに属しているとし、複数ある安定核種のうち最も原子番号の大きい核種に残りの核種がすべて属しているとする²¹。なお短半減期核種など理論計算によって得られた崩壊データには誤差が与えられていないため、そのようなデータの誤差は100%と仮定する。

本章での計算で考慮する核データの誤差を表6に示す。

¹⁹FPが β 崩壊する崩壊経路。

²⁰その質量チェーンにおける最も下流の核種の累積収率。

²¹同じ質量数で原子番号が大きい場合、 β^+ 崩壊も考えられるため。

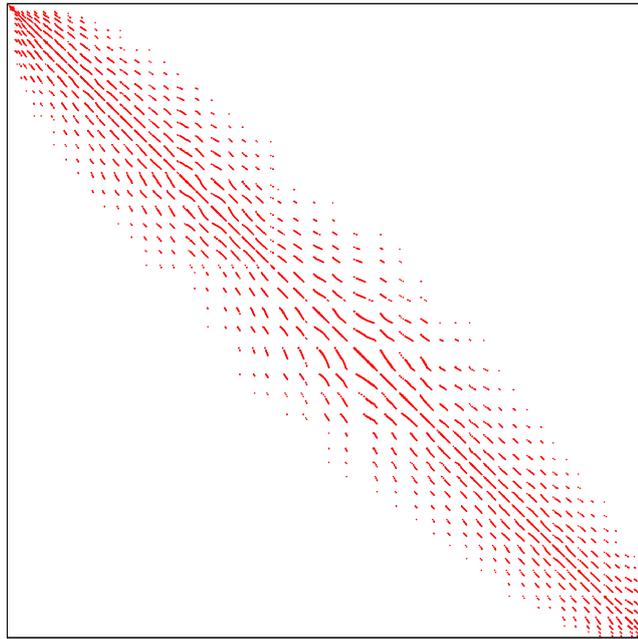


図 22: U-235 独立収率の共分散行列

また本章の計算で用いる核データは基本的にすべて JENDL-4.0、JENDL/FPY、FPD-2011-2011 のものとする。

表 6: 考慮する核データ誤差情報の一覧

Name	Nuclide	Form	Library
Capture cross section	Actinide	Covariance	JENDL-4.0
Capture cross section	FP	Covariance	TENDL-2014
Fission cross section	Actinide	Covariance	JENDL-4.0
(n,2n) cross section	Actinide	Covariance	JENDL-4.0
(n,2n) cross section	FP	Covariance	TENDL-2014
Fission yield	FP	Covariance	JENDL/FPY-2011
Half life	FP	Standard deviation	JENDL/FPD-2011
Decay energy	FP	Standard deviation	JENDL/FPD-2011
Decay branching ratio	FP	Standard deviation	JENDL/FPD-2011

4.3 燃焼感度計算

感度を計算したいパラメータの値を R 、核データの値を σ とすると、相対感度係数 S_{σ}^R は以下のように定義される。

$$S_{\sigma}^R = \frac{\partial R}{\partial \sigma} \cdot \frac{\sigma}{R} \quad (20)$$

この感度係数は、CBZ の燃焼計算により計算する。

CBZ の燃焼計算機能は一般化摂動論に基づいている。ここで一般化摂動論に基づく燃焼感度計

算の原理を説明する。1例として崩壊定数 λ に対する核種数密度の感度を考える。核種数密度ベクトルを \mathbf{n} 、燃焼行列を \mathbf{A} とすると、燃焼方程式は

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{n} \quad (21)$$

と表される。(21) 式に摂動 $\Delta\lambda$ を加えると、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n}) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n}) \quad (22)$$

となる。(22) 式から (21) 式を引き、 $\Delta\mathbf{A}\Delta\mathbf{n}$ は十分に小さいとみなして無視すると、

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{n} = \Delta\mathbf{A}\mathbf{n} + \mathbf{A}\Delta\mathbf{n} \quad (23)$$

となる。ここで時間依存の重み関数 \mathbf{w} を (23) 式の両辺に掛ける。

$$\mathbf{w}^T \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{n} = \mathbf{w}^T \Delta\mathbf{A}\mathbf{n} + \mathbf{w}^T \mathbf{A}\Delta\mathbf{n} \quad (24)$$

ただし上添字 T は転置を意味する。

考える燃焼期間を 0 ~ P 秒とし、式 (24) の両辺を時間で積分する。

$$\int_0^P \mathbf{w}^T \frac{d\Delta\mathbf{n}}{dt} dt = \int_0^P \mathbf{w}^T \Delta\mathbf{A}\mathbf{n} dt + \int_0^P \mathbf{w}^T \mathbf{A}\Delta\mathbf{n} dt \quad (25)$$

ここで \mathbf{w} を以下のように定義する。

$$\mathbf{A}^T \mathbf{w} = -\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \quad (26)$$

この \mathbf{w} を代入することで、(25) 式の右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} \int_0^P \mathbf{w}^T \mathbf{A}\Delta\mathbf{n} dt &= \int_0^P \Delta\mathbf{n}^T \mathbf{A}^T \mathbf{w} dt \\ &= -\int_0^P \Delta\mathbf{n}^T \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (27)$$

と変形できる。よって (25) 式は、

$$\begin{aligned} \int_0^P \mathbf{w}^T \frac{d\Delta\mathbf{n}}{dt} dt + \int_0^P \Delta\mathbf{n}^T \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} dt &= \int_0^P \mathbf{w}^T \Delta\mathbf{A}\mathbf{n} dt \\ \int_0^P \frac{d}{dt}(\mathbf{w}^T \Delta\mathbf{n}) dt &= \int_0^P \mathbf{w}^T \Delta\mathbf{A}\mathbf{n} dt \\ \mathbf{w}(P)^T \Delta\mathbf{n}(P) - \mathbf{w}(0)^T \Delta\mathbf{n}(0) &= \int_0^P \mathbf{w}^T \Delta\mathbf{A}\mathbf{n} dt \\ \mathbf{w}(P)^T \Delta\mathbf{n}(P)^T &= \int_0^P \mathbf{w}^T \Delta\mathbf{A}\mathbf{n} dt \quad (\because \Delta\mathbf{n}(0) = 0) \end{aligned} \quad (28)$$

と変形できる。ここで、燃焼期間末期における重み関数 $\mathbf{w}(T)$ を \mathbf{e}_i とおく。ただし \mathbf{e}_i は核種 i の位置のみ 1 で残りは 0 の単位ベクトルである。式 (28) は、

$$\Delta n_i(P) = \int_0^P \mathbf{w}^T \Delta\mathbf{A}\mathbf{n} dt \quad (29)$$

となる。ある核種の崩壊定数 λ_j に対する核種 i の数密度 n_i の感度は (29) 式を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{dn_i}{d\lambda_j} &\approx \frac{\Delta n_i}{\Delta \lambda_j} \\ &= \frac{\int_0^P \mathbf{w}^T \Delta \mathbf{A} \mathbf{n} dt}{\Delta \lambda_j}\end{aligned}\quad (30)$$

と表すことができる。これは崩壊定数以外の他の核データに対しても同様である。 \mathbf{w} は随伴数密度と呼ばれる量で、(26) 式を解析的に解いた式

$$\mathbf{w}(t) = \exp(\mathbf{A}^T (P - t)) \mathbf{w}(P) \quad (31)$$

により計算される。(31) 式は初期随伴数密度をステップ末端とし、そこから時間を遡るように随伴数密度を計算する。

分岐比に対する感度についても崩壊定数などと同様であるが、分岐比の総和が 1 になるように得られた感度を規格化する必要がある。この規格化には文献 [28] より以下の式を用いる。

$$\bar{S}_{b_j}^R = S_{b_j}^R - b_j \sum_{i=1}^N S_{b_i}^R \quad (32)$$

ただし \bar{S} は規格化後の感度、 b_i は分岐チャンネル i 番目の分岐比、 N はチャンネルの総数である。

燃焼感度計算では、一度通常の数密度を計算し、次にサイクル末端において \mathbf{e}_i を初期随伴数密度をとり時間を遡るように随伴数密度を計算する。数密度と随伴数密度が得られれば、(30) 式に従い任意の核データに対する着目する核種生成量の感度を得ることができる。

崩壊熱の感度を計算する場合は、初期随伴数密度を \mathbf{e}_i ではなく各核種の崩壊定数と崩壊エネルギーの積のベクトルとして計算する。また数密度変化による崩壊熱への影響に加えて、崩壊定数と崩壊エネルギーの変化が崩壊熱に直接影響する効果も考えなければならない。崩壊熱の値を DH 、核種 i の崩壊エネルギーを E_i 、崩壊定数を λ_i とすると、崩壊熱は

$$DH = \sum_i (E_i \lambda_i n_i) \quad (33)$$

と表される。崩壊エネルギーの場合、その変動は (33) 式の係数が変動する直接的な効果によってのみ崩壊熱の値に影響を与える。したがって崩壊エネルギー E_j に対する崩壊熱 DH の感度は、

$$\begin{aligned}S_{E_j}^{DH} &= \frac{\partial DH}{\partial E_j} \cdot \frac{E_j}{DH} \\ &= \frac{E_j \lambda_j n_j}{DH}\end{aligned}\quad (34)$$

と (33) 式を E_j で微分することにより表すことができる。半減期の場合は、その変動が (33) 式の係数の変動に加え、数密度 n_i の変動を介して崩壊熱に影響する間接的な効果も考えなければならない

い。したがって崩壊定数 λ_j に対する崩壊熱 DH の感度は、

$$\begin{aligned}
S_{\lambda_j}^{DH} &= \frac{\partial DH}{\partial \lambda_j} \cdot \frac{\lambda_j}{DH} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\sum_i E_i \lambda_i n_i \right) \cdot \frac{\lambda_j}{DH} \\
&= \sum_i \left(E_i \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} (\lambda_i n_i) \right) \right) \cdot \frac{\lambda_j}{DH} \\
&= \sum_i \left(E_i \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda_j} n_i + \lambda_i \frac{\partial n_i}{\partial \lambda_j} \right) \right) \cdot \frac{\lambda_j}{DH} \\
&= \left(E_j n_j + \sum_i \left(E_i \lambda_i \frac{\partial n_i}{\partial \lambda_j} \right) \right) \cdot \frac{\lambda_j}{DH} \\
&= \frac{E_j \lambda_j n_j}{DH} + \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\sum_i (E_i \lambda_i n_i) \right) \right)_{indir} \cdot \frac{\lambda_j}{DH} \\
&= \frac{E_j \lambda_j n_j}{DH} + \left(\frac{\partial DH}{\partial \lambda_j} \right)_{indir} \cdot \frac{\lambda_j}{DH} \tag{35}
\end{aligned}$$

と表される。ただし下添字 *indir* は間接的な効果による感度の項を表す。(35) 式中の間接項

$$\left(\frac{\partial DH}{\partial \lambda_i} \right)_{indir} \tag{36}$$

は核種数密度の感度の場合と同様に随伴数密度を用いた計算により求める。

以上述べた燃焼感度は核データの摂動が燃焼行列を通して直接崩壊熱・核種生成量に影響する効果によるものであるが、実際の燃焼計算では核種生成量計算に加えて中性子反応断面積を用いて中性子輸送計算も行われるため、例えば断面積が変化したことにより中性子束が変化し、核種生成量に影響するといったような中性子束場を介した効果も考えられる。そのため、CBZ では中性子輸送計算における随伴中性子束、随伴出力といった量も計算され、最終的に考慮するすべての核データを反映した感度係数が計算される。随伴中性子束や随伴出力、及び最終的な感度の計算については文献 [29] に詳細が記述されている。

従来 CBZ に実装されていた燃焼感度計算には分岐比に対する感度計算機能、崩壊熱の感度計算機能が無かったので、両機能を新たに CBZ に追加する。

4.4 誤差伝播計算

誤差伝播計算式は以下のように表される。

$$v = G^T M G \tag{37}$$

ここで v は着目するパラメータ (ここでは崩壊熱やある核種の生成量) の相対分散、 G はパラメータの核データに対する相対感度係数を並べたベクトル、 M は核データの相対共分散行列である。またパラメータが複数ある場合は以下のようにパラメータの共分散行列 V が得られ、パラメータ間の相関も評価できる。

$$V = G^T M G \tag{38}$$

この場合 G は (核データの数)×(パラメータの数) の行列となる。

これらの式に基づき、4.2、4.3 節で得られた核データ共分散と感度係数より、崩壊熱・核種生成量に生じる不確かさを定量化する。

従来 CBZ に実装されていた誤差伝播計算機能は断面積共分散に対するもののみであった。そのため核分裂収率、半減期、崩壊エネルギー、分岐比誤差の誤差伝播計算機能を新たに CBZ に追加する。

4.5 崩壊熱不確かさ

以上述べた原理に基づき、崩壊熱に生じる不確かさを計算する。燃料の種類は 20GWd/t 照射 UO_2 燃料、20GWd/t 照射 MOX 燃料、60GWd/t 照射 UO_2 燃料の 3 通りとする。崩壊熱の時間スケールは、事故解析などで問題となる原子炉停止後 1 日後までの短期崩壊熱、使用済燃料貯蔵や地層処分などで問題となる 1000 年後までの長期崩壊熱の 2 通りを考える。

計算における燃料の組成や体系形状等の計算条件は、実際の核燃料照射の例として 3 章におけるものと同じ値を用いる。出力は 179W/cm 一定とし、中間停止など複雑な燃焼履歴は考慮しない。

図 23 に、3 通りの燃料における短期崩壊熱を示す。また、図 24-26 にはそれぞれの短期崩壊熱に生じる不確かさを示す。いずれの燃料においても不確かさの値や内訳は同じ傾向を示している。全体的に見ると、崩壊エネルギー由来誤差が大部分を占めており、次いで核分裂収率由来誤差が全冷却期間を通して 0.5%程度となっている。また半減期、分岐比由来誤差は非常に小さい。合計の値を見ると、原子炉停止後 100 秒までは 3%程度あった不確かさがその後落ち込み、1000 秒以降は 1%以下となっている。100 秒までの 3%不確かさは多数の FP の崩壊エネルギー誤差によるものであり、そのほとんどは理論計算値のため誤差を 100%と設定したものである。安全設備の設計において、この時間領域における崩壊熱の要求精度は 2~5%と言われており [6]、今回定量化した不確かさは要求精度未満の値となっている。

図 27-29 は図 24-26 で示された崩壊熱の相関行列である。隣接する冷却時間間の正の相関が強い事が分かる。これは相関の強い時間領域において不確かさの要因の内訳が余り変化せず推移しているためと考えられる。また負の相関は見られない。

図 30 に、3 通りの燃料における長期崩壊熱を示す。また、図 31-33 にはそれぞれの長期崩壊熱に生じる不確かさを示す。短期崩壊熱の場合と異なり、燃料の種類により不確かさ曲線の形状及び内訳が互いに大きく異なっている。反応別に見ると、MOX 燃料と 60GWd/t 照射 UO_2 燃料において、20GWd/t 照射 UO_2 燃料と比べて断面積由来不確かさが冷却期間前半において大きくなっている。これはアクチニド崩壊熱の割合が前 2 者において大きい理由として考えられる。また UO_2 燃料と MOX 燃料を比べると、10 年付近にある崩壊エネルギー由来不確かさのピークが MOX において小さい。このピークは Cs-137 の娘核種である Ba-137m の β 崩壊エネルギー誤差由来のもので、理論値のためこの誤差は 100%と設定したものである²²。MOX 燃料においてピークが小さいのは、 UO_2 燃料と比べて FP 崩壊熱の割合が小さいからであると考えられる。3 者に見られる 100~1000 年にかけてのピークは、種々のアクチニド核種断面積由来のものである。MOX 燃料に見られる 0.1~1 年にかけてのピークは Am-241 捕獲断面積由来のもの、MOX 燃料と 60GWd/t 照射 UO_2 燃料に見られる 10 年付近の断面積によるピークは種々のアクチニド核種断面積由来のものである。核分裂収率、半減期、分岐比由来不確かさは冷却期間を通して 0.5%以下である。

図 34-36 は図 31-33 で示された崩壊熱の相関行列である。短期崩壊熱と同様に広い範囲で正の相関を持っている。また短期崩壊熱の場合と異なり燃料の種類によって強い相関を持つ時間領域がそれぞれ異なる。例えば図 34 と図 35 を比較すると、 UO_2 燃料の場合では冷却時間 $10^0 \sim 10^2$ 年という広い範囲にかけて強い正の相関を持つ領域があるのに対し、MOX 燃料の場合にはそのような領域は見られず、一方で $10^{-1} \sim 10^0$ 、 $10^0 \sim 10^2$ 年の 2 領域において UO_2 燃料の場合よりも広い

²²ENDF/B-VII.1 には Ba-137m の β 崩壊エネルギー誤差として 1.1%という値が与えられており、誤差伝播計算を行っても 10 年付近の不確かさのピークは現れない。JEFF-3.1.1 にも誤差として 2.9%という値が与えられているが、Cs-137 から Ba-137、-137m への崩壊分岐比の誤差が与えられておらず、これを 100%と仮定すると JENDL/FPD-2011 の場合と同様に 10 年付近に分岐比由来誤差のピークが見られる。

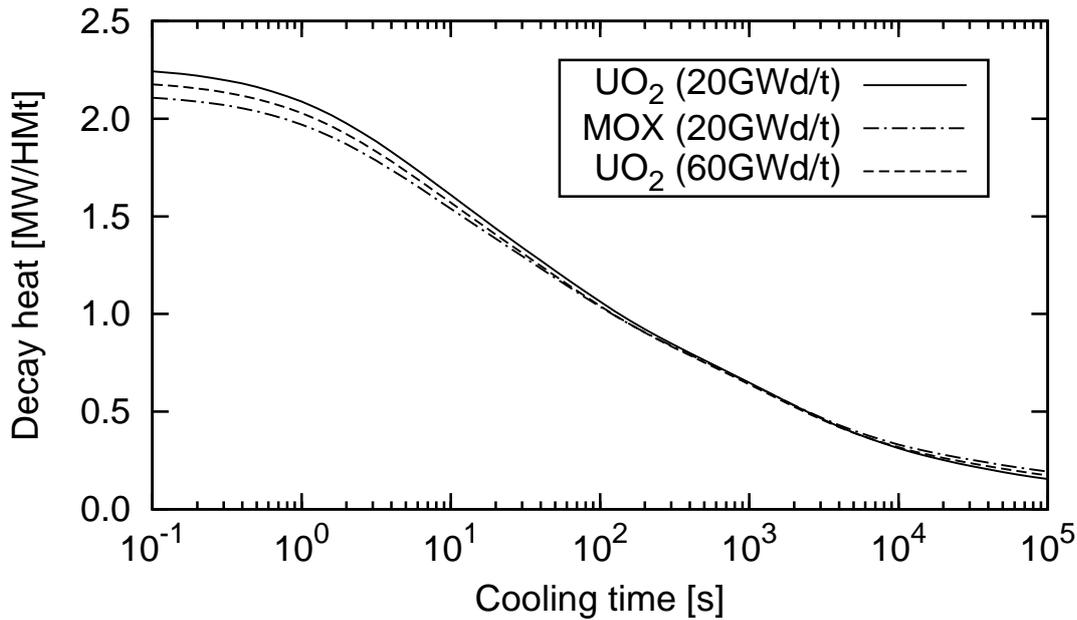


図 23: 20GWd/t 照射 UO₂、MOX 燃料、60GWd/t 照射 UO₂ 燃料の冷却期間 0.1~10⁵ 秒における短期崩壊熱

範囲で強い正の相関が見られる。これらの違いは、図 31、32 に示されている不確かさ要因の違いによるものだと考えられる。すなわち、UO₂ 燃料の場合は図 31 より 10⁰ ~ 10² 年にかけて崩壊エネルギー誤差由来の不確かさピークがあり、その領域における不確かさの内訳がほとんど変化しないため強い相関を持つものと考えられる。MOX 燃料の場合も図 32 より 10⁻¹ ~ 10⁰、10⁰ ~ 10² 年の 2 領域において断面積由来不確かさのピークがあり、同様の理由で強い相関を持つものと考えられる。

4.6 核種生成量不確かさ

3 章での PIE 解析を行った UO₂ 燃料、MOX 燃料について、全く同じ条件でその生成量に生じる不確かさを計算する。

図 37、38 に UO₂ 燃料、MOX 燃料における核種生成量に生じる不確かさを示す。アクチニド生成量に対しては、実質的にアクチニド核種の断面積共分散しか考慮されていないため、崩壊データ由来の不確かさは現れていない。アクチニド核種の中では Cm-245、-246 生成量の不確かさが比較的大きい一方、U-238 生成量不確かさはほぼ 0% である。Cm-245 生成量の不確かさは Pu-241、Cm-244 捕獲断面積由来の不確かさが主な要因である。Cm-246 生成量の不確かさは Cm-245 捕獲断面積由来の不確かさが主な要因である。

FP 核種不確かさにはいくつかの核種で非常に大きいものがあり、特に大きいのは Rb-85、Sr-86、Sm-154 である。Rb-85 と Sr-86 生成量不確かさに関しては、U-235 核分裂収率のうち質量数 85 の質量チェーン由来の誤差が主な要因である。Sm-154 生成量不確かさに関しては、U-235、Pu-241 核分裂収率のうち質量数 154 の質量チェーン由来の誤差が主な要因である。いずれも核分裂収率誤差が不確かさの主因となっている。また MOX 燃料の場合、UO₂ 燃料と比較して Rb-85、Sr-86 の不確かさが小さいが、これは両核種生成量の U-235 核分裂収率由来の不確かさが他のアクチニド

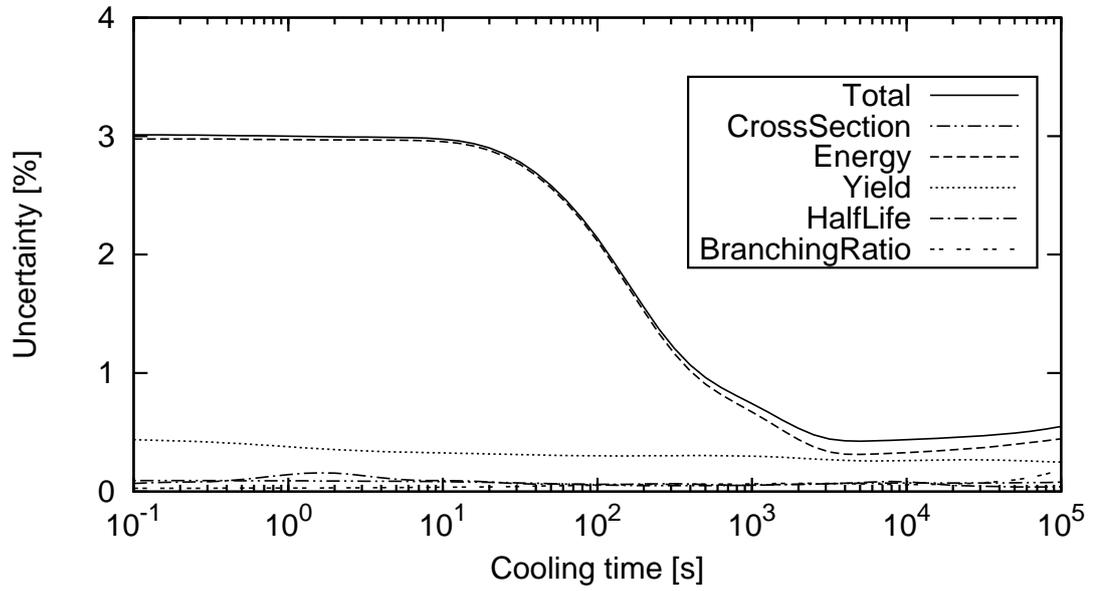


図 24: 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料の冷却時間 0.1~10⁵ 秒における崩壊熱に生じる不確かさ

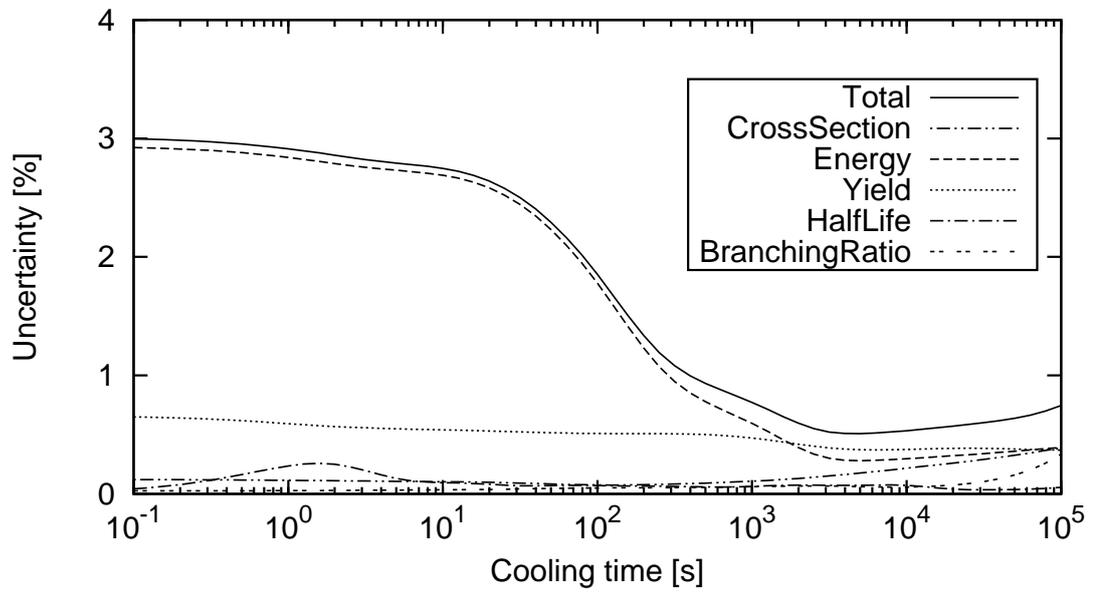


図 25: 20GWd/t 照射 MOX 燃料の冷却時間 0.1~10⁵ 秒における崩壊熱に生じる不確かさ

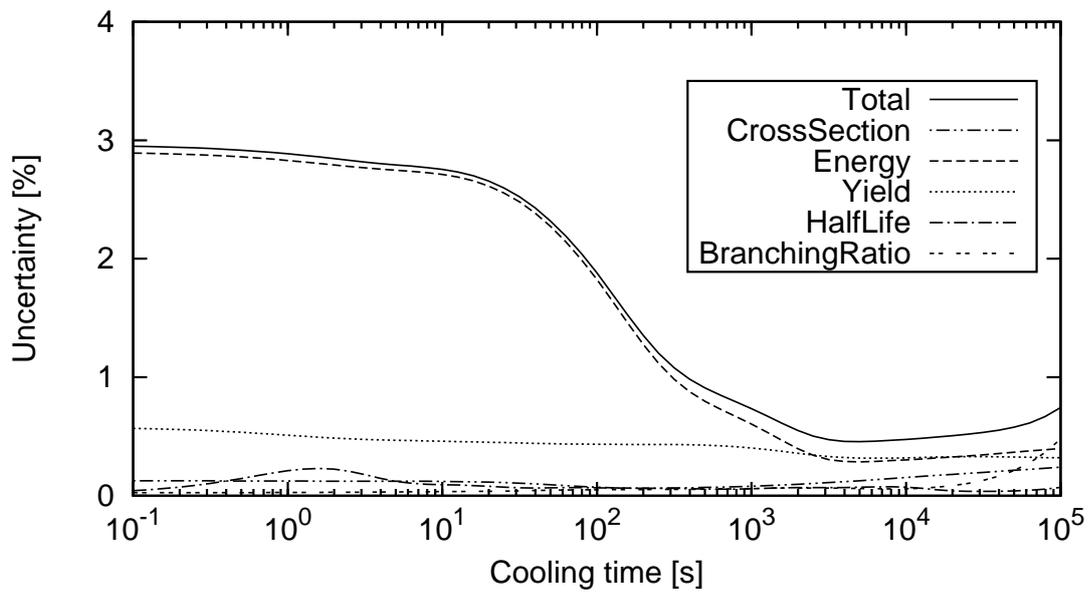


図 26: 60GWd/t 照射 UO₂ 燃料の冷却時間 0.1~10⁵ 秒における崩壊熱に生じる不確かさ

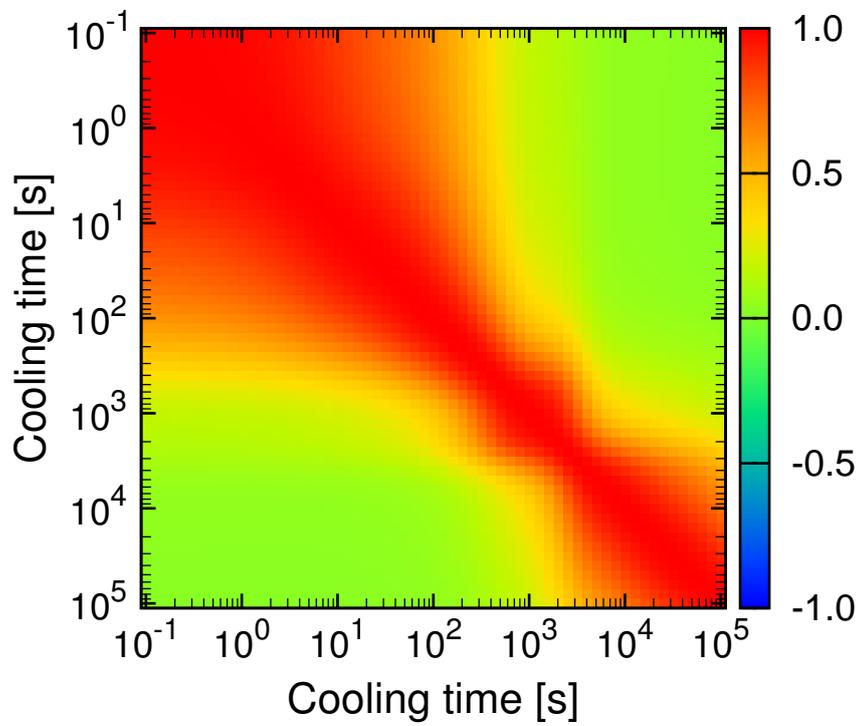


図 27: 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料の冷却時間 0.1~10⁵ 秒における崩壊熱の相関行列

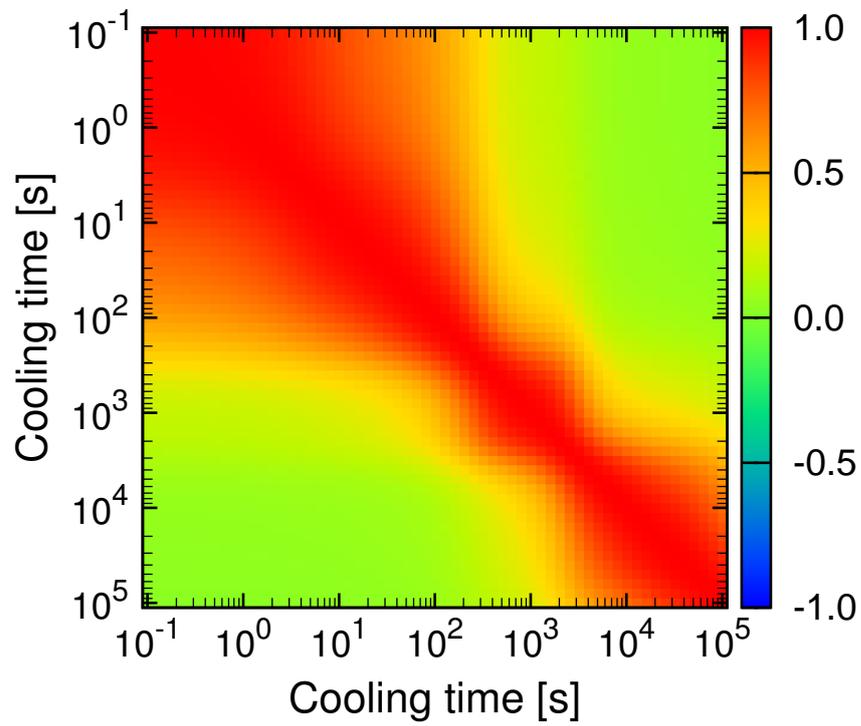


図 28: 20GWd/t 照射 MOX 燃料の冷却時間 0.1~ 10^5 秒における崩壊熱の相関行列

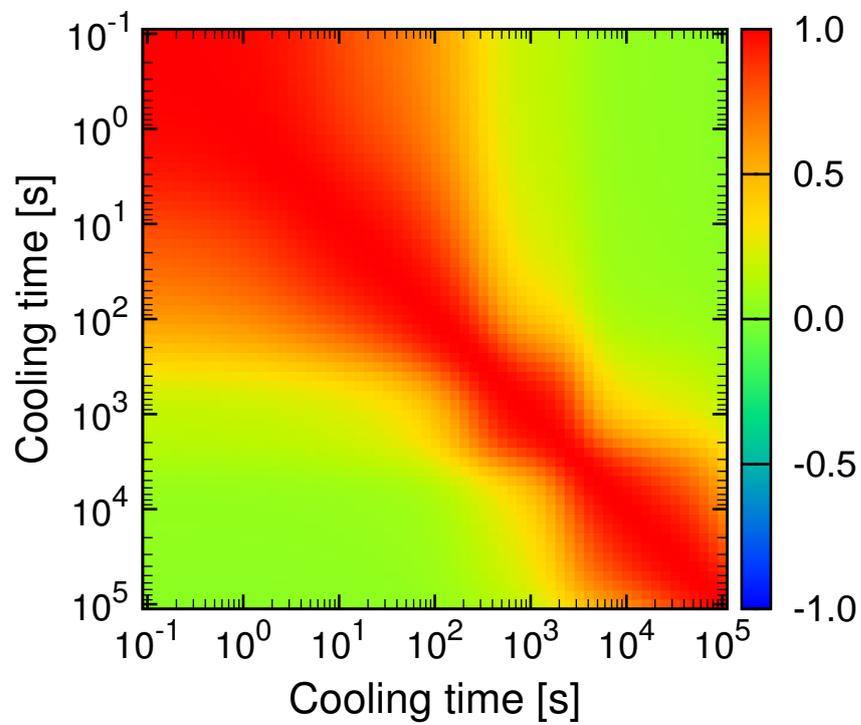


図 29: 60GWd/t 照射 UO_2 燃料の冷却時間 0.1~ 10^5 秒における崩壊熱の相関行列

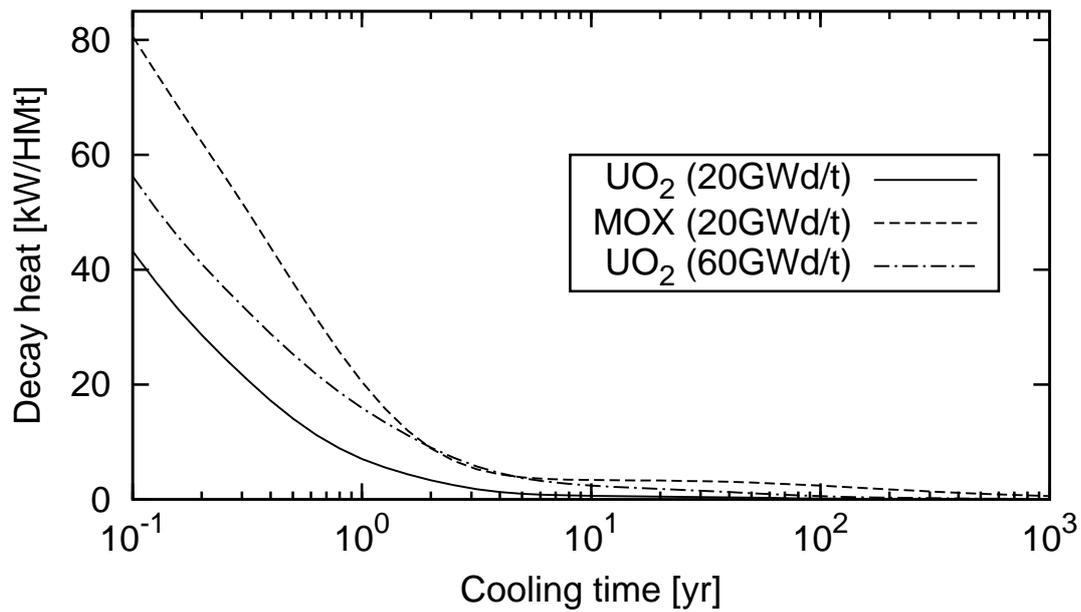


図 30: 20GWd/t 照射 UO_2 、MOX 燃料、60GWd/t 照射 UO_2 燃料の冷却期間 0.1~ 10^3 年における長期崩壊熱

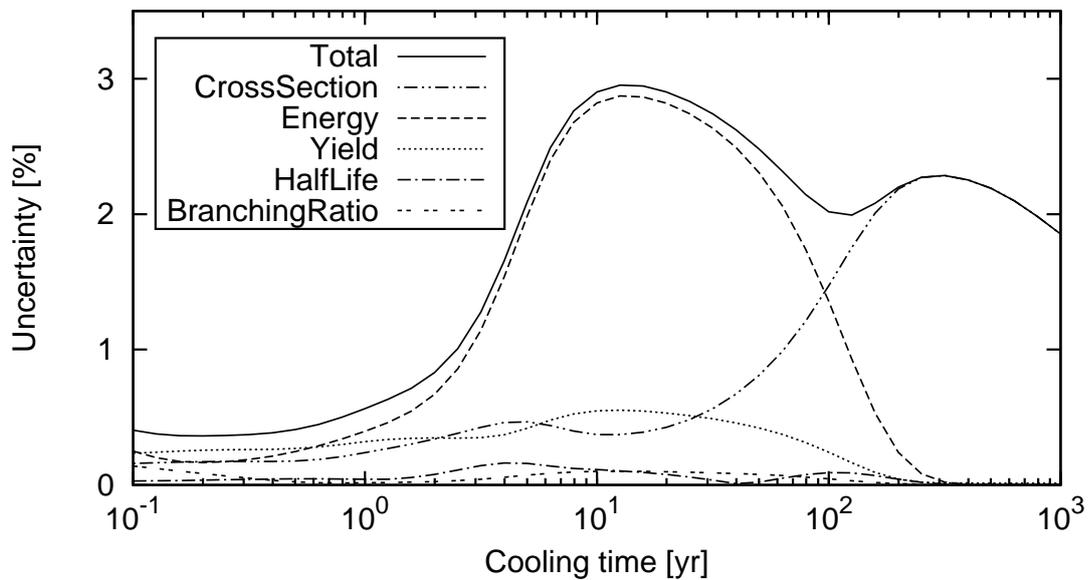


図 31: 20GWd/t 照射 UO_2 燃料の冷却時間 0.1~ 10^3 年における崩壊熱に生じる不確かさ

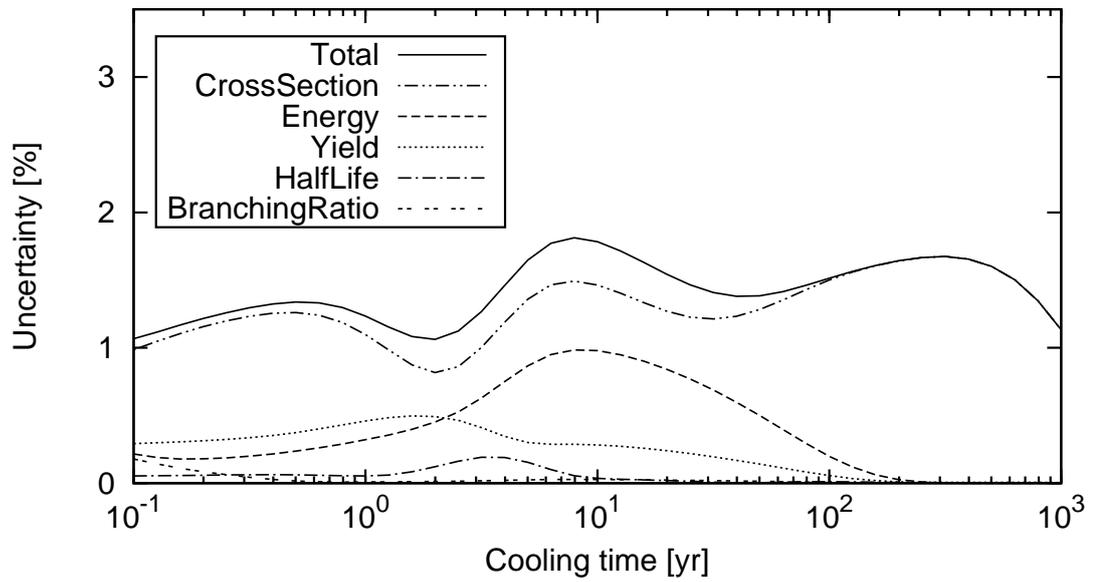


図 32: 20GWd/t 照射 MOX 燃料の冷却時間 0.1~10³ 年における崩壊熱に生じる不確かさ

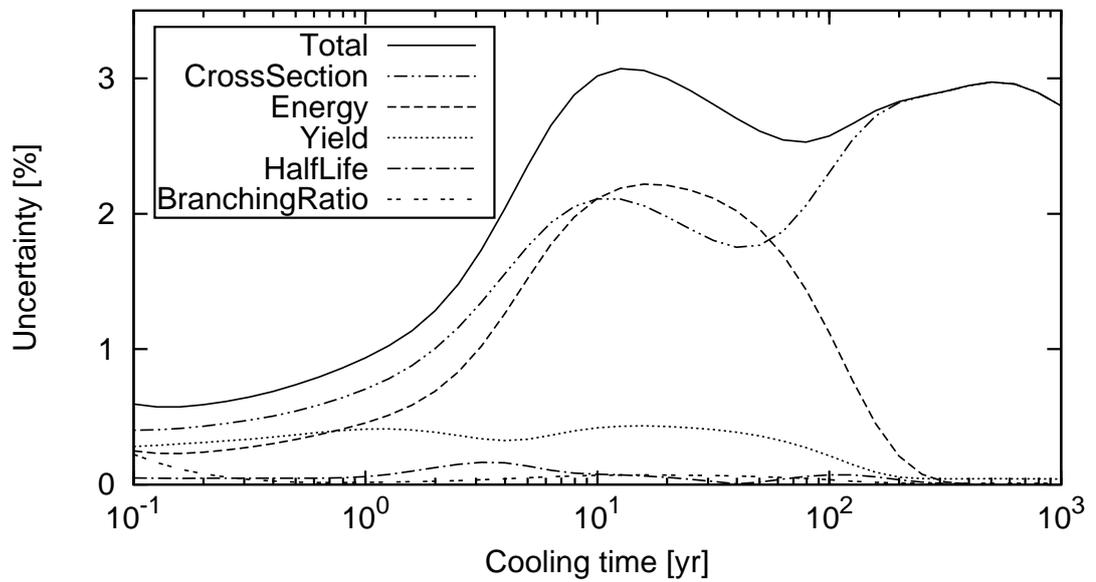


図 33: 60GWd/t 照射 UO₂ 燃料の冷却時間 0.1~10³ 年における崩壊熱に生じる不確かさ

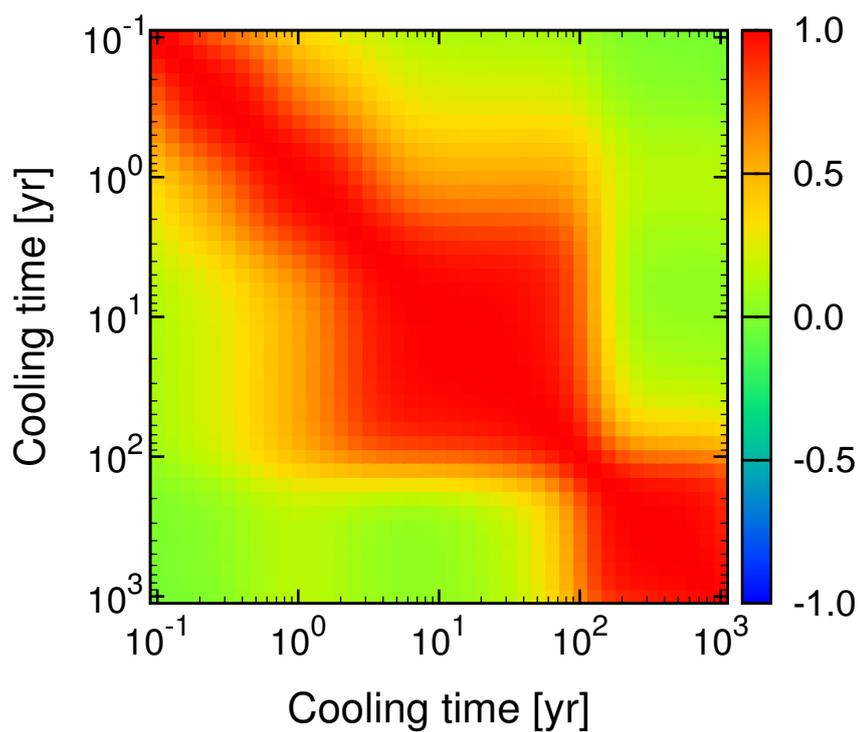


図 34: 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料の冷却時間 0.1~10³ 年における崩壊熱の相関行列

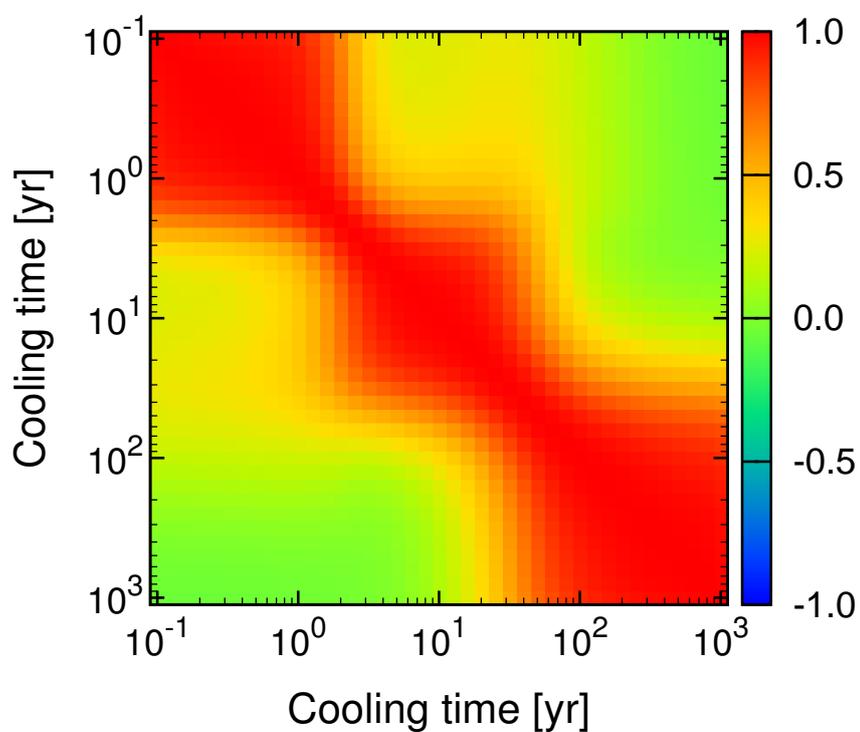


図 35: 20GWd/t 照射 MOX 燃料の冷却時間 0.1~10³ 年における崩壊熱の相関行列

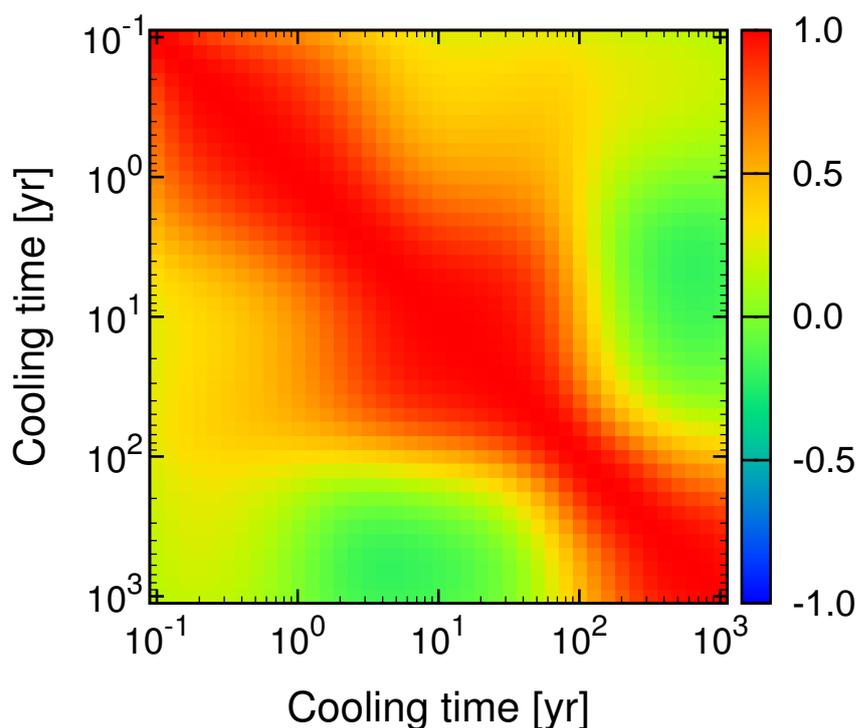
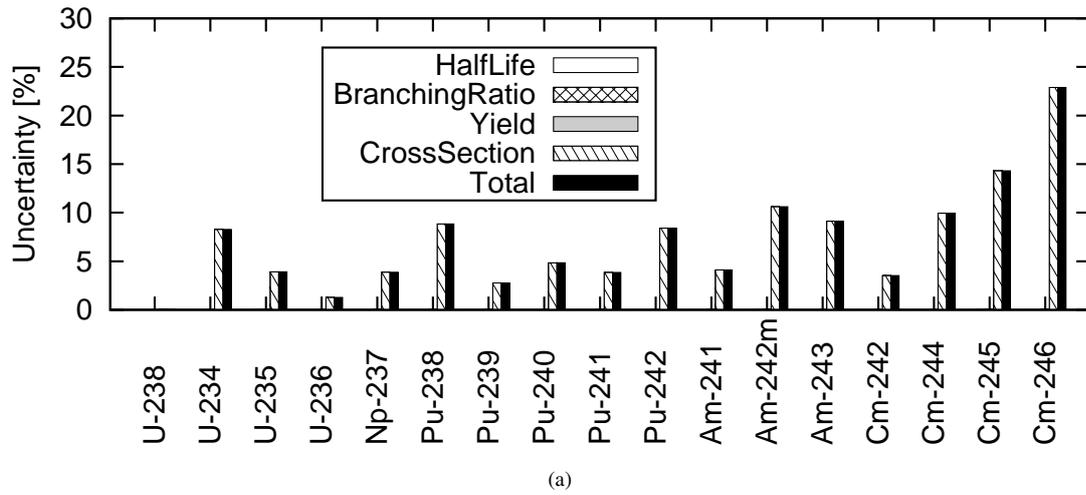


図 36: 60GWd/t 照射 UO_2 燃料の冷却時間 0.1~ 10^3 年における崩壊熱の相関行列

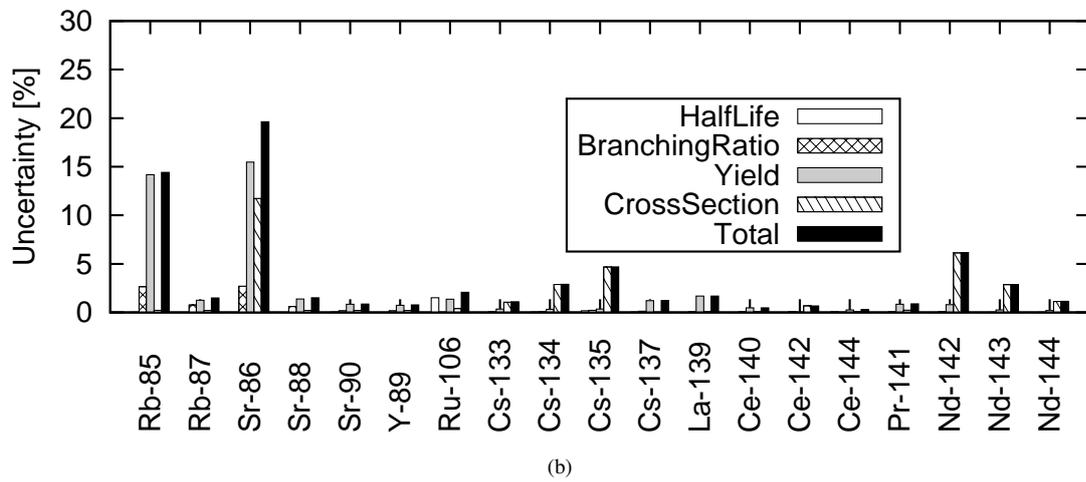
核分裂収率由来の不確かさより大きいためである。また Ru-106 を除き半減期誤差由来の不確かさは現れていない。

図 39、40 は図 37、38 で示された核種生成量の相関行列である。いずれの場合もいくつかの核種同士で正または負の強い相関が見られる。特に図 39 でのアクチニド核種においては、質量数の離れたアクチニド核種、あるいは FP 核種との間にも比較的強い相関が見られる。これは燃焼チェーン上において、アクチニド核種は核分裂や α 崩壊で質量数の大きく異なる核種同士が繋がっているためである。また図 39、40 双方において、Eu-153 から Gd-156 の間に相関の強い領域が存在している。

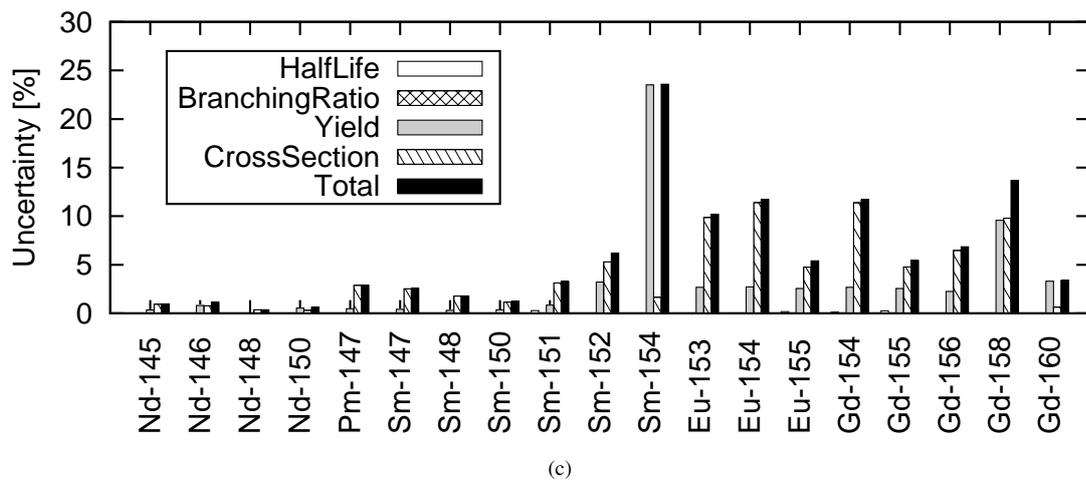
図 41、42 は、3 章の図 14、15 で示した実験値と計算値の比 (C/E-1 値) に対して図 37、38 で示した各核種の不確かさを誤差棒として表したものである。C/E-1 値は JENDL-4.0 を用いて計算したもので、不確かさは各反応の合計 (図 14、15 中の「Total」) である。



(a)

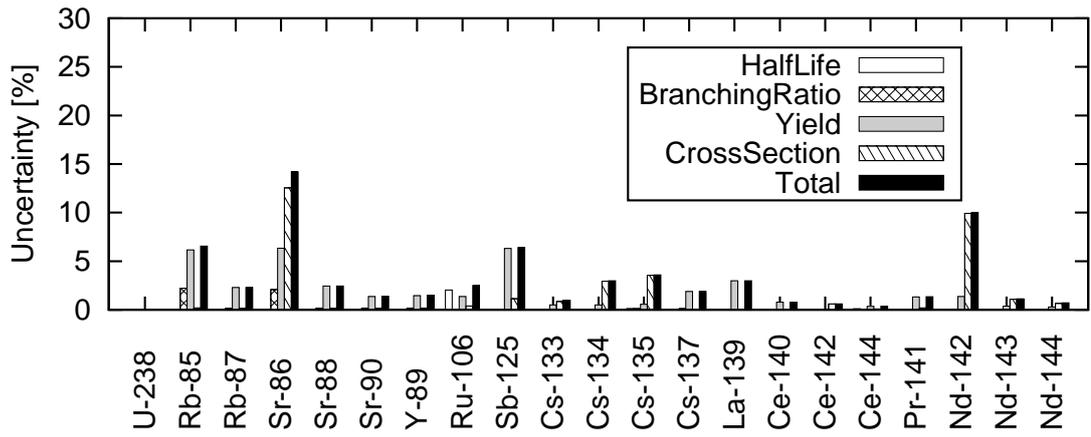


(b)

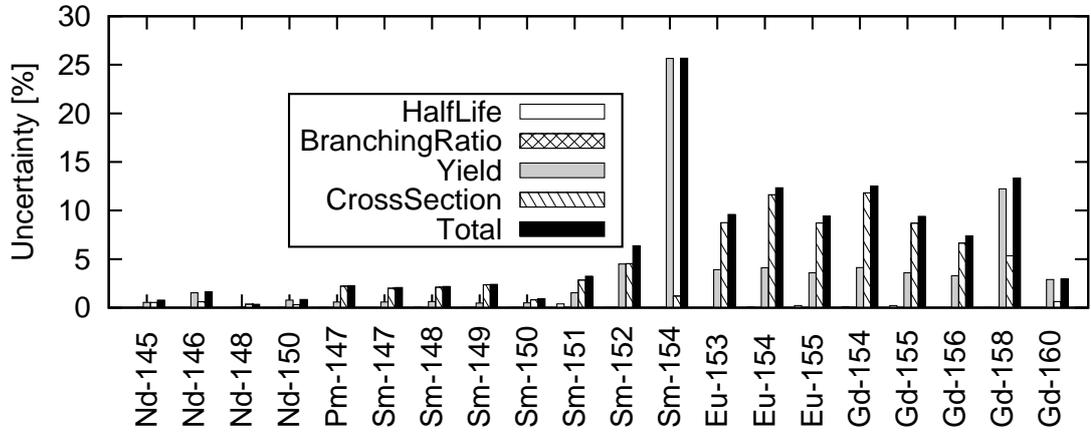


(c)

図 37: UO_2 燃料の核種生成量に生じる不確かさ



(a)



(b)

図 38: MOX 燃料の核種生成量に生じる不確かさ

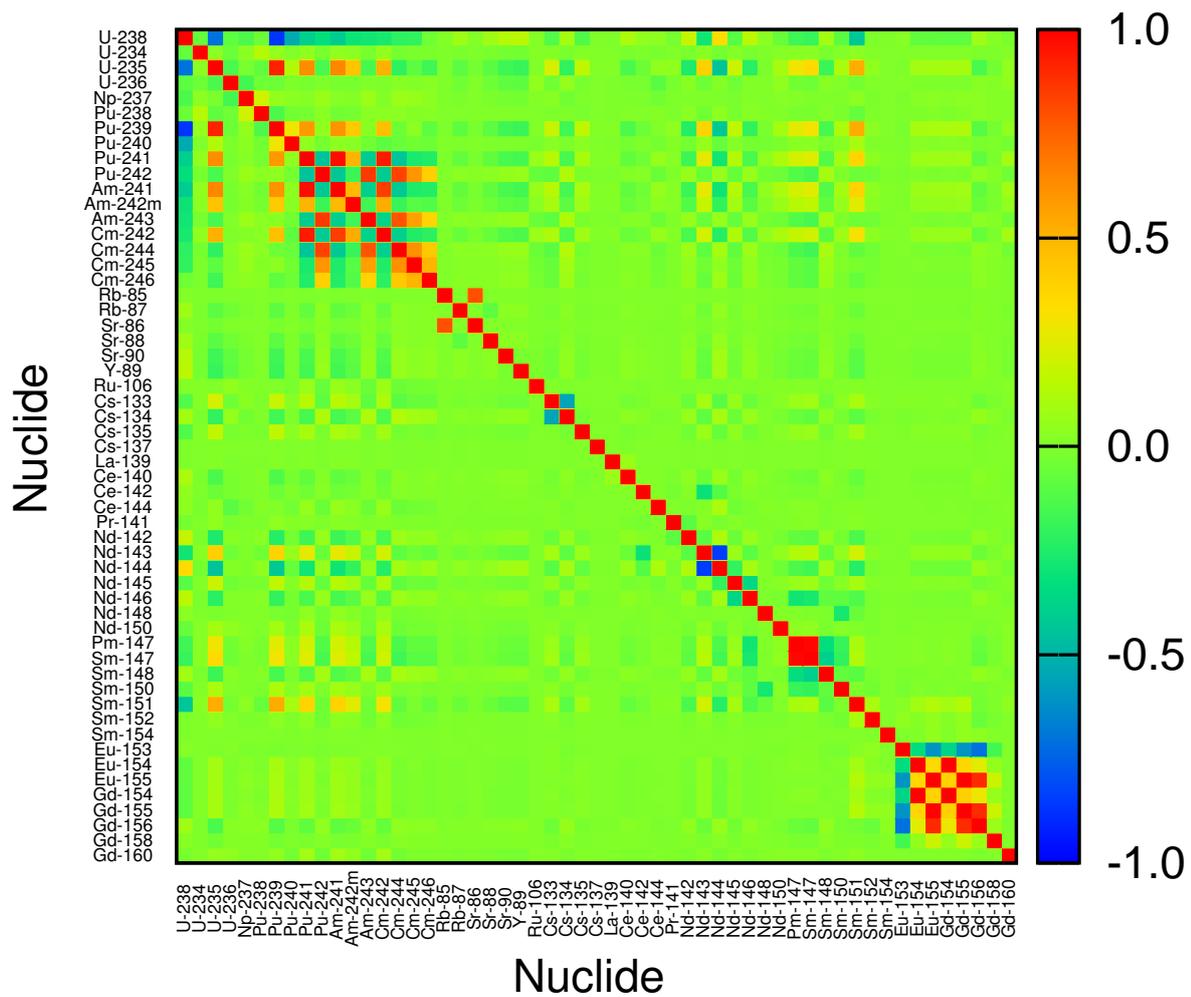


図 39: UO_2 燃料の核種生成量の相関行列

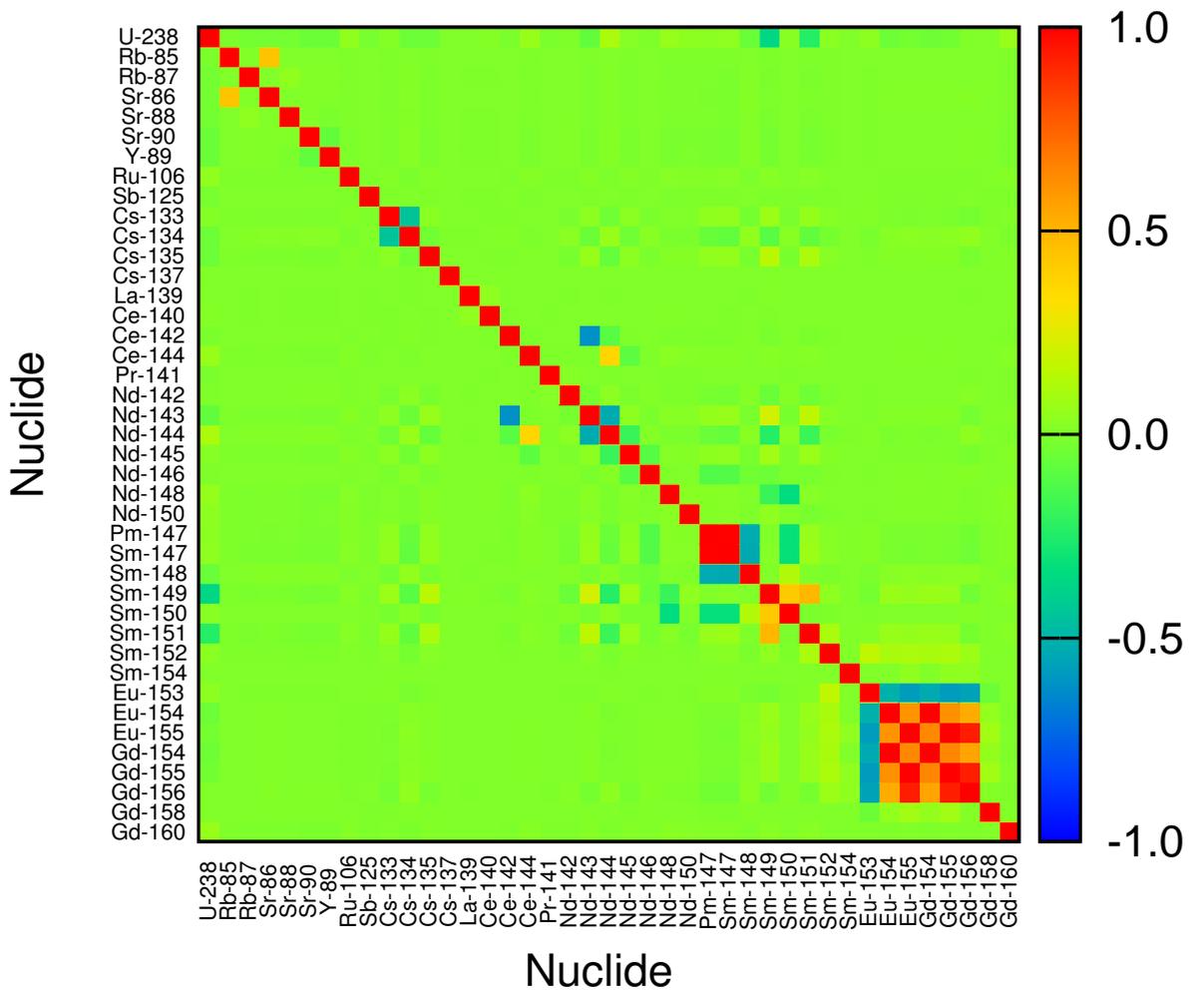
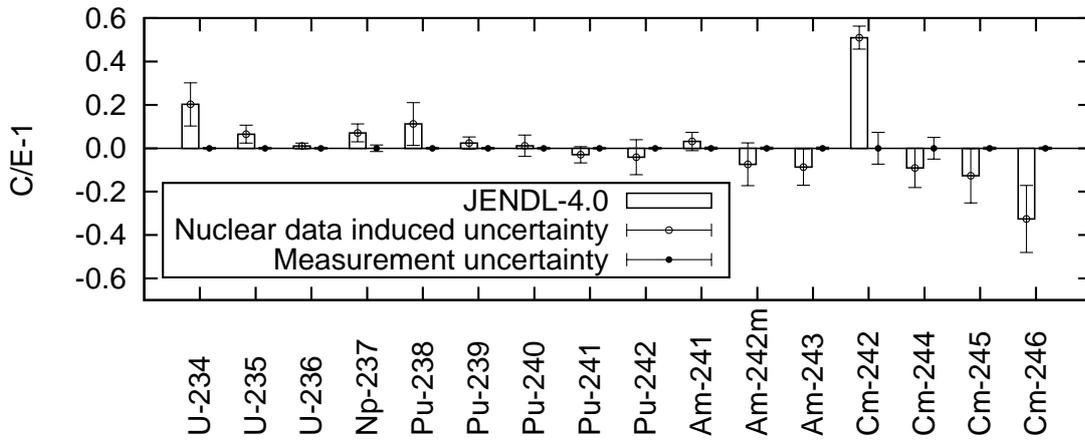
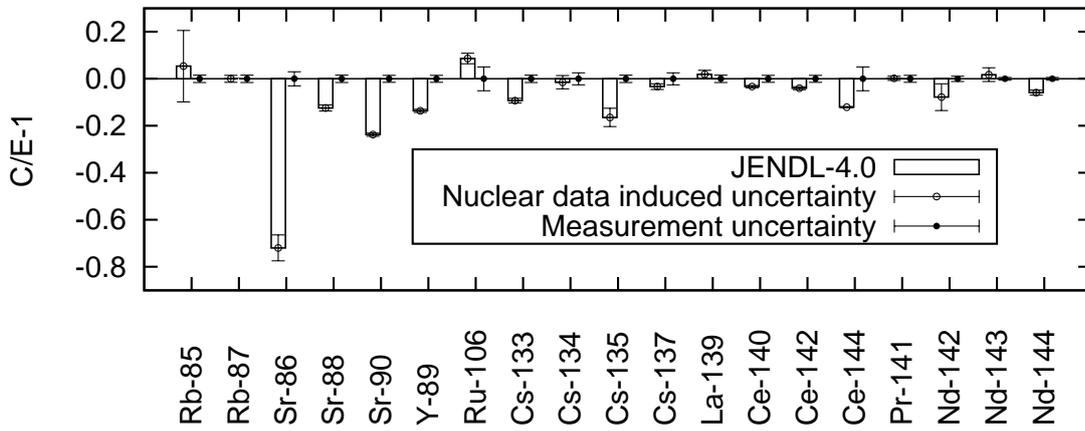


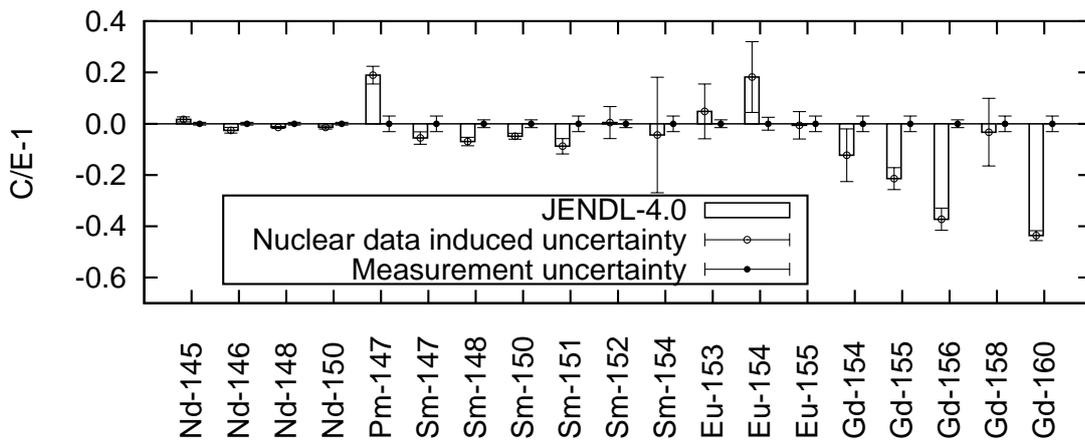
図 40: MOX 燃料の核種生成量の相関行列



(a)

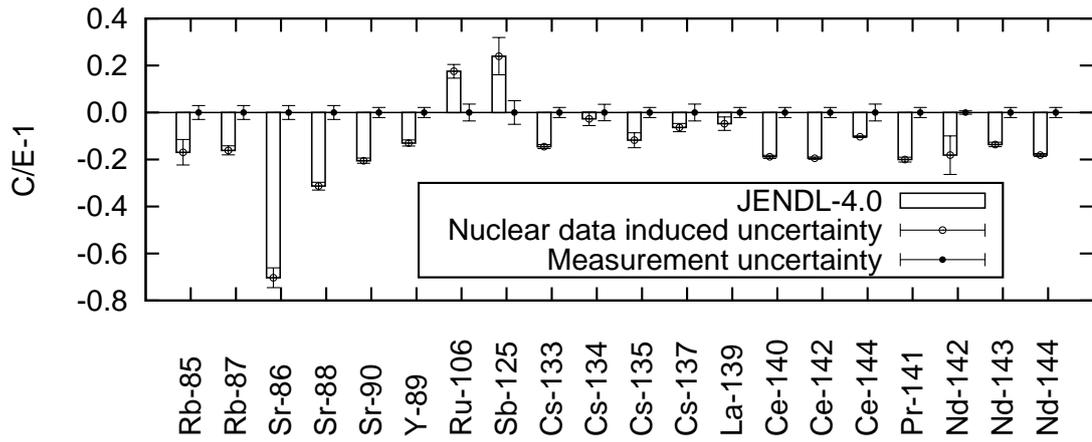


(b)

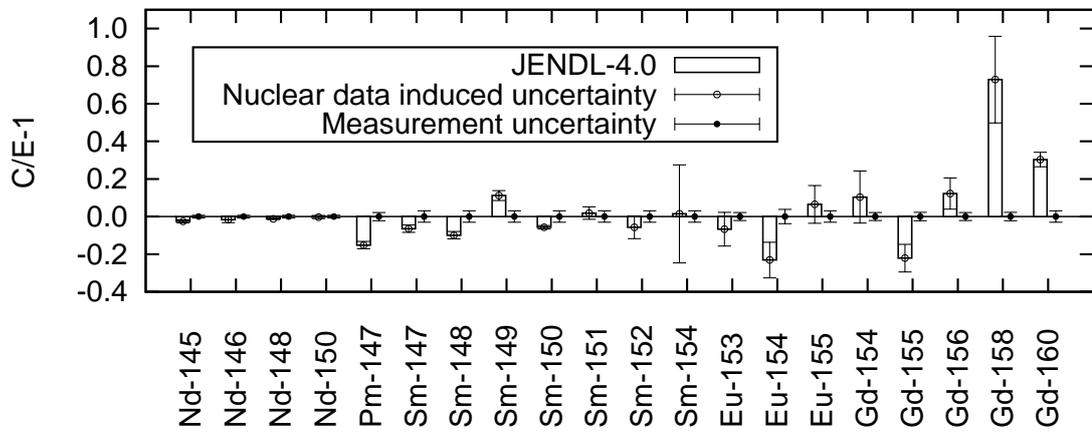


(c)

図 41: UO_2 燃料の核種生成量に生じる不確かさと C/E-1 値



(a)



(b)

図 42: MOX 燃料の核種生成量に生じる不確かさと C/E-1 値

5 炉定数調整法を応用した崩壊熱不確かさの低減

5.1 崩壊熱不確かさの低減

4章で示したように核種生成量や崩壊熱には核データ由来の不確かさが生じる。このような不確かさを低減することができれば、崩壊熱の値に基づく設計などの安全裕度を合理化することができる。

不確かさの低減としてまず考えられるのは核データ自体の測定をより精緻に行い核データ誤差を減らすというアプローチである。例えば図 24 を見ると、短期崩壊熱に対して崩壊エネルギー誤差が崩壊熱不確かさの主要な要因となっている。もしもこれに関係する核種の崩壊エネルギーを新たに高い精度で測定し評価すれば、崩壊熱不確かさはより低減されるだろう。しかし今日の核データはこれまで何十年もの間全世界で測定されてきた測定データに基づいており、安易な方法で劇的な精度向上は望めない。また核データ誤差の大きな核種は測定困難な場合も多く、対象核種が無数にあることもありこういったアプローチには多大な労力を要する。

もう1つのアプローチとして想定する事象を模擬した実験を行い、実験値と計算値との差異を評価する方法がある。例えば原子炉設計手法の1つとしてバイアス因子法というものがある。これは、計算対象である新設計炉心と良く似た炉心を臨界集合体として組み、その集合体での臨界実験の結果得られた核特性の実験値と計算値との比をバイアスとして新設計炉心の計算値を補正する方法である。これによって新設計炉心の不確かさを低減することができる。燃焼計算に対してもこれと同様の方法を取ることはできるが、例えば原子炉停止後数秒～数時間の非常に短い冷却期間での崩壊熱や、数百年以上冷却した核燃料の組成など、実験として模擬することが不可能な場合には適用することができない。

本章では実験模擬困難な崩壊熱・核種生成量の代表として4.5節で示した短期及び長期崩壊熱の不確かさに着目し、5.2節で述べる炉定数調整法により実測不可能な時間領域における崩壊熱不確かさの低減を試みる。

5.2 炉定数調整法

高速炉の設計手法の1つとして炉定数調整法、あるいは断面積調整法というものがある。これは、バイアス因子法と同じく新しい炉心を設計する際に用いるもので、新設計炉心を模擬した臨界集合体によって得られた多数の実験データを再現するように断面積をその不確かさの範囲内で調整し、その調整された断面積を用いて設計を行い新しい炉心の核特性の不確かさを減らすものである。バイアス因子法と異なる点は断面積を調整することで実験体系とは関係のない値の不確かさも低減できる可能性がある点である。

炉定数調整法とは、ベイズ理論を基礎とし、ある実験結果が得られた条件の元で断面積が真値を取る確率を最大化するように断面積を決定する方法である。文献 [31] より、炉定数調整法の基礎式は以下のように表される。まず炉定数調整により調整される断面積の相対変化は、

$$\mathbf{D}_{x,s} = \mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{M}\mathbf{G} + \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_m)\mathbf{D}_{1-c/e} \quad (39)$$

と表される。ただし $\mathbf{D}_{x,s}$ は各核種の断面積の調整前後での相対変化を表すベクトル、 \mathbf{M} は断面積共分散行列、 \mathbf{G} は各断面積に対する実験値の相対感度を収納するベクトル、 \mathbf{V}_e 、 \mathbf{V}_m はそれぞれ実験、解析誤差の相対共分散行列、 $\mathbf{D}_{1-c/e}$ は各実験値の C/E 値を 1.0 から引いた値 (相対差異) を収納するベクトルである。また調整によって断面積自体の不確かさも縮小されるが、その調整後の断面積相対共分散は、

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{G}(\mathbf{G}^T\mathbf{M}\mathbf{G} + \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_m)\mathbf{G}^T\mathbf{M} \quad (40)$$

と表される。ただし M' は調整後の断面積相対共分散である。これらの式より、各核種の断面積相対共分散と実験誤差相対共分散が分かっており、臨界実験を模擬するような計算を行った際の解析誤差相対共分散、結果として得られる核特性の各断面積に対する相対感度係数、計算結果と実験値との比である C/E 値が得られれば、断面積調整を行うことができる。調整された断面積を用いて新設計炉心の計算を行った場合に得られる核特性の相対変化 D_{new} は、以下のように (39) 式に核データに対する新設計炉心核特性の相対感度 G_{new} を掛ければ得られる。

$$\begin{aligned} D_{new} &= G_{new}^T D_{xs} \\ &= G_{new}^T MG (G^T MG + V_e + V_m) D_{1-c/e} \end{aligned} \quad (41)$$

またその際得られる新設計炉心核特性の不確かさ V_{new} は、(40) 式を (38) 式に代入することで、

$$\begin{aligned} V_{new} &= G_{new}^T M' G_{new} \\ &= G_{new}^T MG_{new} - G_{new}^T MG (G^T MG + V_e + V_m) G^T MG_{new} \end{aligned} \quad (42)$$

として得られる。

以上述べたものは炉心核特性に対し、断面積を調整するものであるが、この手法は燃焼計算に対しても応用することができる。すなわち、実験値として臨界実験ではなく核燃料の燃焼に関わる種々の実験の値を用い、核特性ではなく実測困難な時間領域での崩壊熱の不確かさを低減するのである。感度係数は 4.3 節で述べた燃焼感度計算を行うことで算出することができる。ただし燃焼計算では断面積に加えて核分裂収率や崩壊データなど多くの種類の核データが用いられるため、炉定数調整における調整対象にそれらを加える必要がある。すなわち (39)、(40) 式において D_{xs} や M 、 G を、断面積に加えて核分裂収率や崩壊データを加えた巨大なものにする必要がある²³。

従来 CBZ に実装されていた炉定数調整機能は主に高速炉用に断面積のみ調整するものであったので、燃焼計算にも適用できるよう核分裂収率、崩壊定数、崩壊エネルギー、崩壊分岐比も調整対象に加えるよう新たに機能を拡張する。

炉定数調整法において未だに残されている課題として実験、解析誤差の扱いがある。(39)、(40) 式より調整を行うには実験値、計算結果の相対共分散を決める必要がある。実験誤差については標準偏差としてデータが与えられている場合がほとんどであり、実験値間の相関については何らかの方法で仮定する必要がある。また解析誤差については、モンテカルロコードは別として、CBZ のような決定論的コードの場合解析誤差を明らかにすることは非常に難しい。そのため現状ではある程度保守的な値を仮定の元で決める以外に方法は無い²⁴。

5.3 相関

炉定数調整法により核データを調整しても崩壊熱不確かさが低減できるとは限らない。調整の結果低減された核データ誤差が対象とする崩壊熱の不確かさにはほとんど寄与していない場合が考えられるからである。

どのような実験値を用いて調整を行えばよいかの指標に、核データ誤差伝播計算の結果得られる相関行列を用いることができる。対象とする崩壊熱の計算に加えてある実験を模擬する計算を行い、それぞれの計算結果の間の相関が強い程、その実験に対して炉定数調整を行えば崩壊熱不確かさをより低減させることができる。

不確かさを低減したい短期・長期崩壊熱と、候補となる実験を模擬した計算において燃焼感度計算を実施し、そこで得られた感度係数と核データ不確かさをを用いて (38) 式に基づき誤差伝播計算

²³ただし例えば (41)、(42) 式では行列計算の順番を工夫することでこのような巨大な行列を扱う必要はなくなる。

²⁴文献 [31] では実験、解析誤差の与え方として新しい手法が提案されている

を行い相関行列を得る。実験の候補としては、使用済燃料の組成 (PIE データ) や瞬時照射実験²⁵を考える。いずれも崩壊熱・核種生成量と関係があり、かつ測定が比較的容易で実験例が多数存在するものである。

最初に崩壊熱と PIE 模擬計算値との間の相関を見る。図 43 は 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料の短期崩壊熱と PIE 模擬計算値との間の相関行列である。PIE としては 3 章における UO₂ 燃料と MOX 燃料の 2 通りを考えた。短期崩壊熱と PIE 値との間の相関の領域を見ると、あまり強い相関は見られず、いくつかの核種の PIE 値と短期崩壊熱との間に 0.5 未満の弱い正の相関が見られる。原子炉停止後 1 日未満の崩壊熱と数年冷却後の核種数密度という時間スケールの全く異なる両者の間に弱いとはいえ相関があるのは、短半減期核種の崩壊の結果長半減期の娘核種が生成されるためであると考えられる。

図 45 は 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料の長期崩壊熱と PIE 模擬計算値との間の相関行列である。図 43 の場合と異なりいくつかの核種の PIE 値と長期崩壊熱との間には強い相関が見られる。MOX 燃料には無いアクチニド核種の部分を除くと、図 44(a) と図 44(b) の相関はほぼ同様の傾向を示している。

図 45 は 20GWd/t 照射 MOX 燃料の長期崩壊熱と PIE 模擬計算値との間の相関行列である。UO₂ 燃料長期崩壊熱の相関と比較すると、UO₂ 燃料 PIE データにおけるアクチニド核種と崩壊熱の間に負の相関が増え、FP と崩壊熱の間の相関が全体的に若干弱くなっている。

次に崩壊熱と瞬時照射崩壊熱計算値との間の相関を見る。図 46 は 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料の短期崩壊熱と U-235 瞬時照射模擬計算値との間の相関行列である。瞬時照射実験値として β 線と γ 線の測定を考え、2 通りの相関行列を作成した。短期崩壊熱と β 、 γ 瞬時照射実験値との間には全冷却期間に渡って 1 に近い強い正の相関が見られる。このように相関が強いのは、短期崩壊熱と瞬時照射崩壊熱の不確かさの大部分が共に崩壊エネルギー誤差由来であるからだと考えられる。

図 47 は 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料の長期崩壊熱と U-235 瞬時照射模擬計算値との間の相関行列であるが、図 46 とは対照的に、両者の間に全く相関が無い。瞬時照射実験としては U-235 以外にもいくつかの核種が考えられるが、U-238、Pu-239、-241 の瞬時照射模擬計算の場合にも U-235 と同様の相関が見られた。

以上より、長期崩壊熱に対しては PIE データに対する炉定数調整が有効であると予想できる。また、短期崩壊熱に対しては瞬時照射実験値に対する調整が有効であると予想できる。

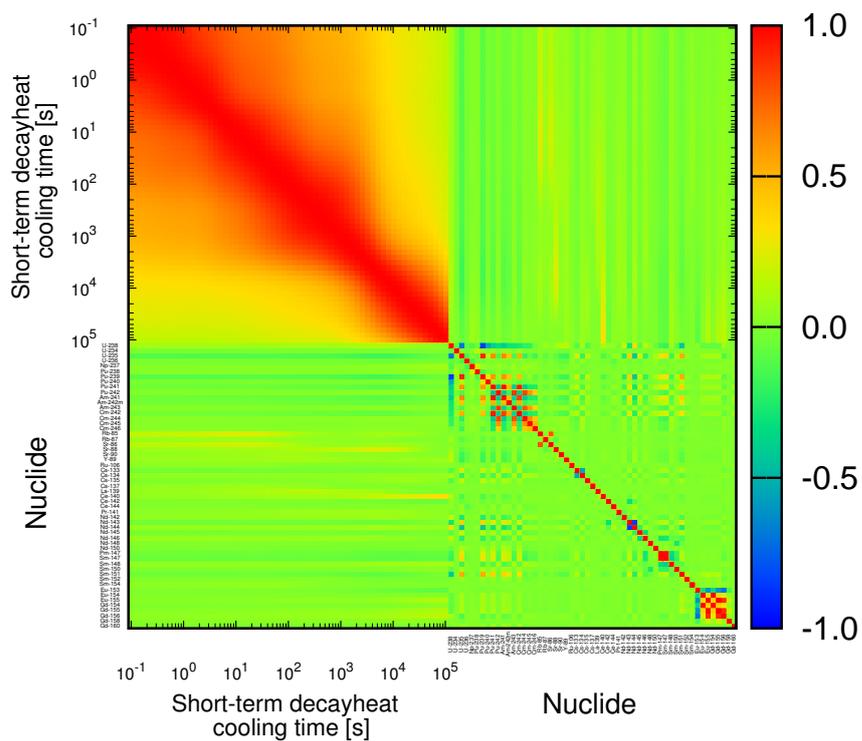
5.4 PIE 解析値を用いた不確かさの低減

PIE データに対して炉定数調整を行い、崩壊熱不確かさの低減を試みる。使用する PIE データは、3 章で用いた UO₂ 燃料 (55 核種) と MOX 燃料 (41 核種) のものである。各核種のサンプル間平均値に対して調整を行う。実験誤差は文献 [16][17] に記載された測定誤差とし、相関は無いものとする。解析誤差については現状では確立された導出方法が無いので、3 章で行われた PIE 解析の内 Nd-148 生成量の結果から大まかな値を推測する。Nd-148 は核データによる不確かさが小さく、生成量はほぼ燃焼度に比例するため、使用済核燃料の燃焼度の指標に用いられている。3 章の図 14 に示されている Nd-148 の実験値と解析値の差異は最大で 1.4% であり、CBZ の燃焼計算の解析誤差を大きく見積もってもこの程度であると推測できる。したがって本研究では解析誤差を一律に 2% と仮定する

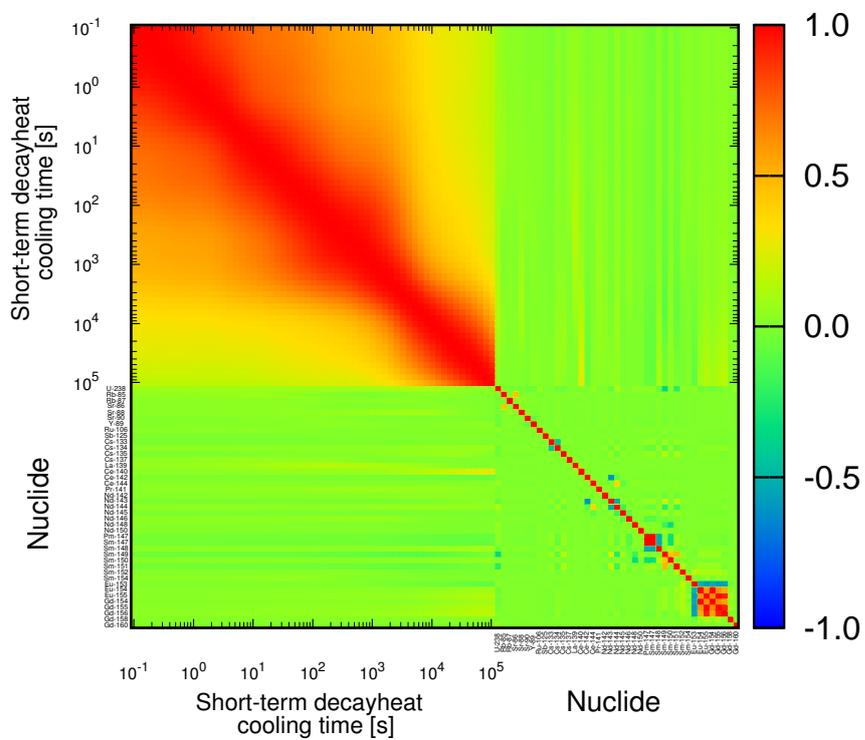
短期・長期崩壊熱及び PIE 模擬計算における感度係数は CBZ の燃焼感度計算機能を用いて得る。調整対象の核データは表 6 に載せたもののうち崩壊エネルギー以外のものである。

20GWd/t 照射 UO₂ 燃料、MOX 燃料、60GWd/t 照射 UO₂ 燃料 3 通りの短期崩壊熱について、PIE データに対する炉定数調整を行う前と後の不確かさを図 48 に示す。3 者ともほとんど不確かさが

²⁵U-235 などの核分裂性物質に対して瞬間的に中性子を照射した後に放出される β 、 γ 線を測定するもの。

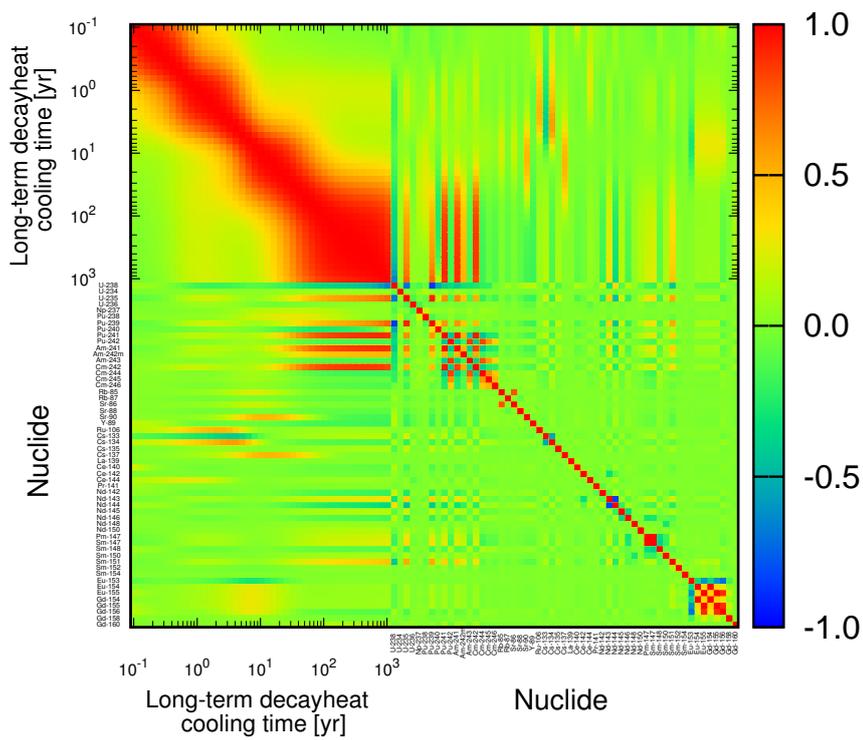


(a) UO₂ 燃料 PIE データ

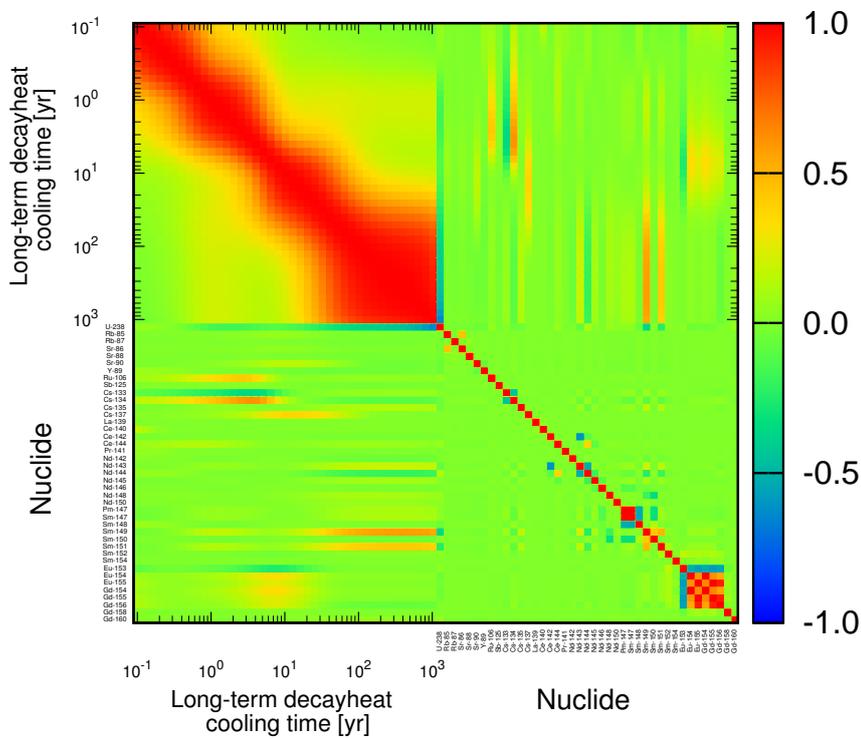


(b) MOX 燃料 PIE データ

図 43: 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料短期 (0.1~10⁵ 秒) 崩壊熱と UO₂/MOX 燃料 PIE データとの間の相関行列

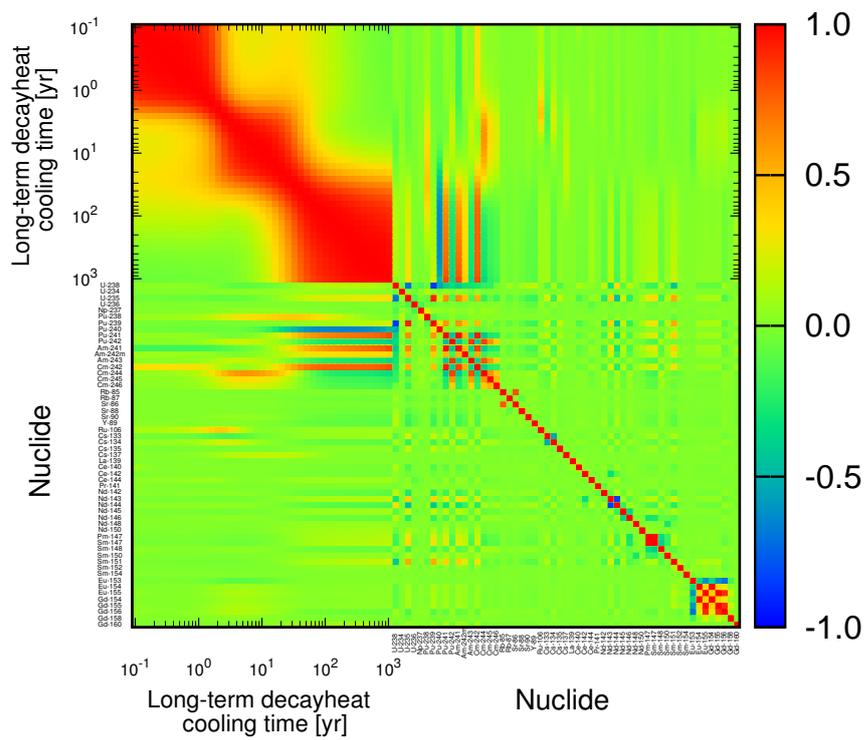


(a) UO₂ 燃料 PIE データ

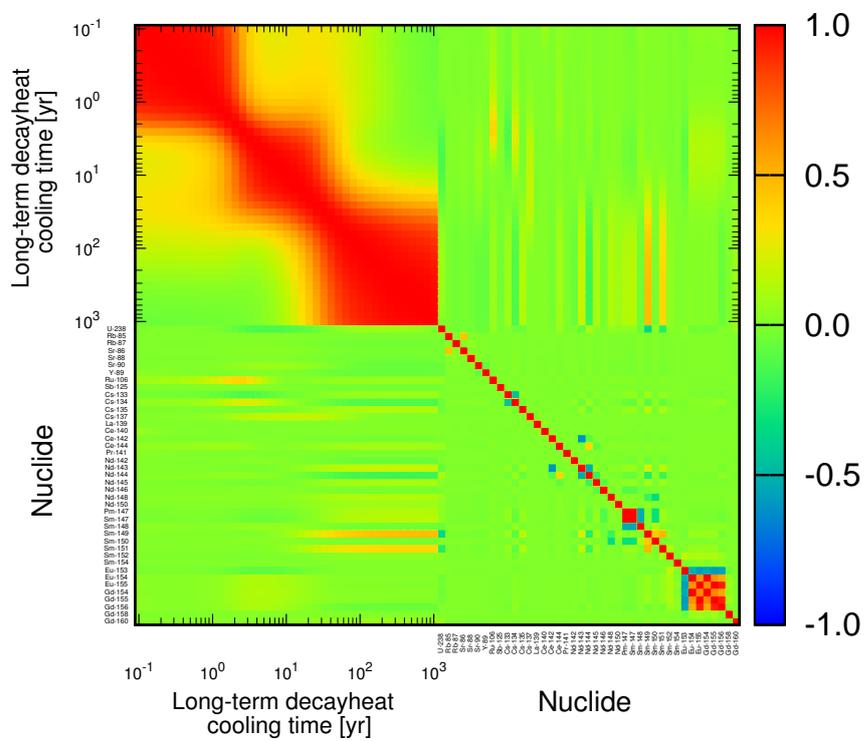


(b) MOX 燃料 PIE データ

図 44: 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料長期 (0.1~10³ 年) 崩壊熱と UO₂/MOX 燃料 PIE データとの間の相関行列

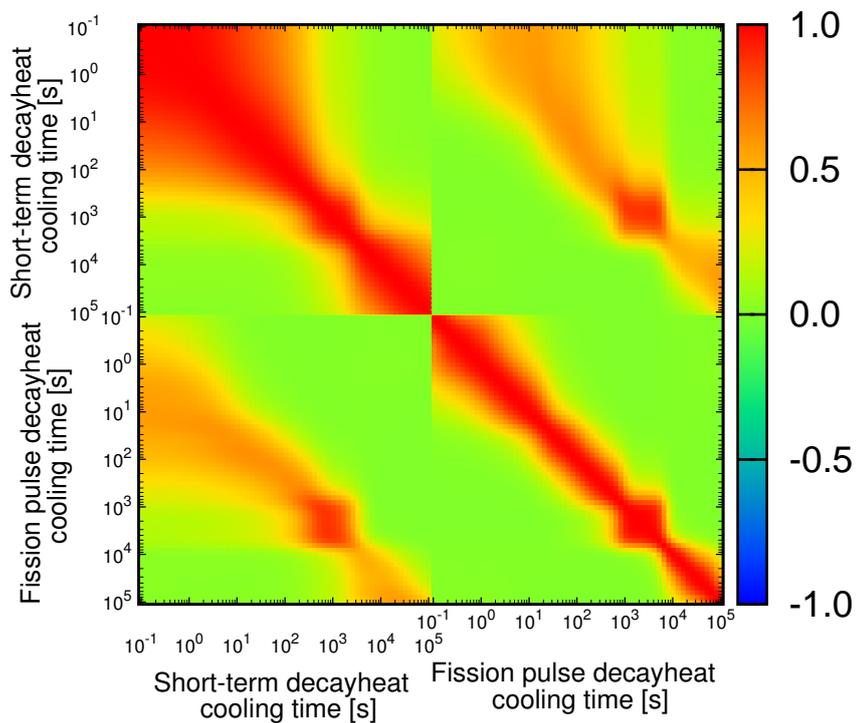


(a) UO₂ 燃料 PIE データ

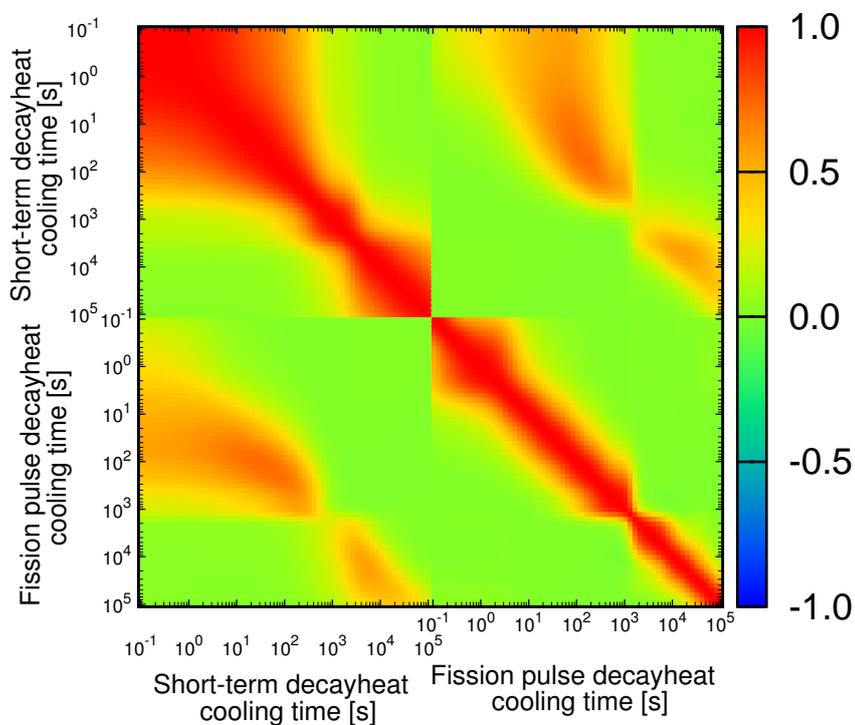


(b) MOX 燃料 PIE データ

図 45: 20GWd/t 照射 MOX 燃料長期 (0.1~10³ 年) 崩壊熱と UO₂/MOX 燃料 PIE データとの間の相関行列

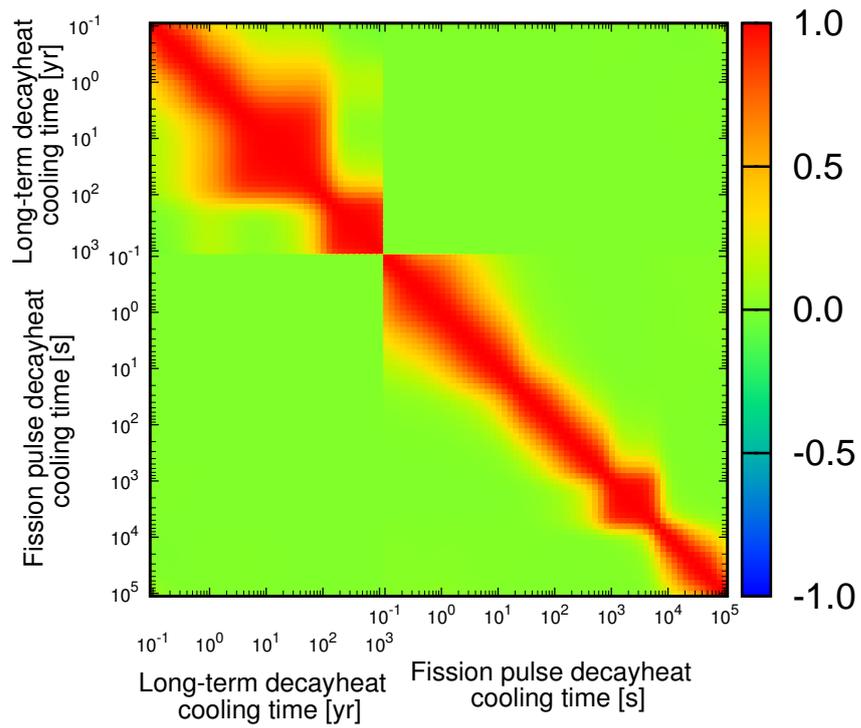


(a) 瞬時照射 β 崩壊熱

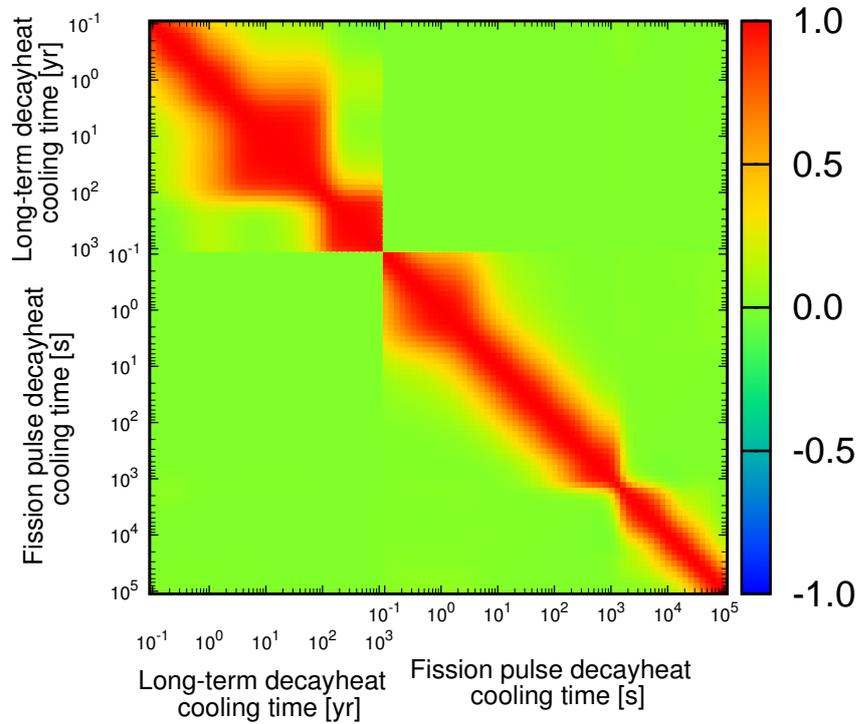


(b) 瞬時照射 γ 崩壊熱

図 46: 20GWd/t 照射 UO_2 燃料短期 (0.1~ 10^5 秒) 崩壊熱と $\text{U}235$ 熱中性子瞬時照射 β/γ 崩壊熱との間の相関行列



(a) 瞬時照射 β 崩壊熱



(b) 瞬時照射 γ 崩壊熱

図 47: 20GWd/t 照射 UO_2 燃料長期 (0.1~ 10^3 年) 崩壊熱と U235 熱中性子瞬時照射 β/γ 崩壊熱との間の相関行列

低減されておらず、PIE データでは短期崩壊熱の不確かさは低減できないことが分かる。冷却時間 $10^4 \sim 10^5$ 秒にかけてわずかに不確かさが減少している部分があり、これは図 43 で見られる弱い相関に対応していると考えられる。

同じ 3 通りの燃料の長期崩壊熱について、PIE データに対する炉定数調整を行う前と後の不確かさを図 49 に示す。短期崩壊熱の場合と異なり 3 者とも不確かさが低減されている。図 49 と図 31、32、33 を比較すると、炉定数調整により断面積由来不確かさが主に低減されていることが推察される。 $10^2 \sim 10^3$ 年付近の不確かさはほとんどがアクチニド核種の断面積不確かさに由来しており、PIE データに対して炉定数調整を行うことでアクチニド核種断面積の不確かさが減少し、長期崩壊熱の不確かさも低減されたと考えられる。一方、特に 20GWd/t 照射 UO_2 燃料において、崩壊エネルギー由来不確かさが 10 年付近に大きなピークを持ったままである。これは半減期 2.6 分の Ba-137m の β 崩壊エネルギー誤差に由来するものであり、これは半減期 30.1 年の Cs-137 の娘核種である。Ba-137m の β 崩壊エネルギーは理論値であり、前述のようにその誤差を 100% と仮定しているためこのような大きな不確かさとなって現れている。したがって何らかの方法で Ba-137m の β 崩壊エネルギー誤差を低減できれば、長期崩壊熱の不確かさはさらに低くなると考えられる。

以上より短期・長期崩壊熱において、PIE データを用いた炉定数調整を実施した。短期崩壊熱の不確かさはほとんど低減されず、長期崩壊熱不確かさはある程度低減された。これは 5.3 節での予想と合致している。

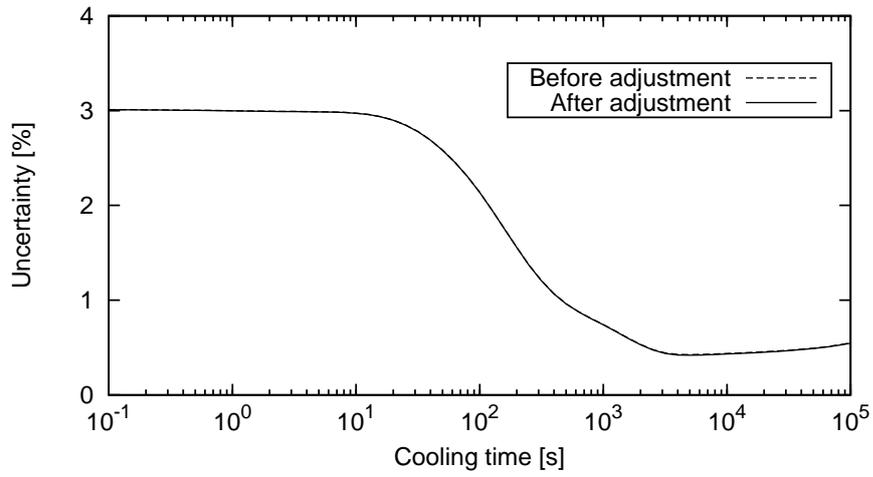
5.5 瞬時照射崩壊熱測定値を用いた不確かさの低減

瞬時照射実験値に対して炉定数調整を行い、崩壊熱不確かさの低減を試みる。瞬時照射実験値としては文献 [32] より熱中性子瞬時照射 U-235、Pu-239 崩壊熱、文献 [33][34] より熱中性子瞬時照射 U-235、Pu-239、Pu-241 崩壊熱、文献 [35]、[36] より高速中性子瞬時照射 U-238 崩壊熱の値を用いる。崩壊熱の計測は β 、 γ 線別に行われているので、両者の値それぞれに対して調整を行う。実験誤差は文献 [32]、[33]、[34]、[35]、[36] に記載された測定誤差とし、相関は実験ケースごとにすべての時間点間で 0.8 と仮定する²⁶。短期・長期崩壊熱計算における感度係数は CBZ の燃焼感度計算機能を用いて得る。瞬時照射崩壊熱計算における感度係数は CBZ の瞬時照射感度計算機能 [37] を用いる。調整対象の核データは表 6 に載せたものである。CBZ の瞬時照射感度計算機能では中性子輸送計算が行われず、解析誤差は用いている MMPA 法自身の誤差に離散化誤差等が上乗せされた程度であり、通常の燃焼計算の場合よりも大幅に小さいと予想されるので、一律に 0.01% と仮定した。

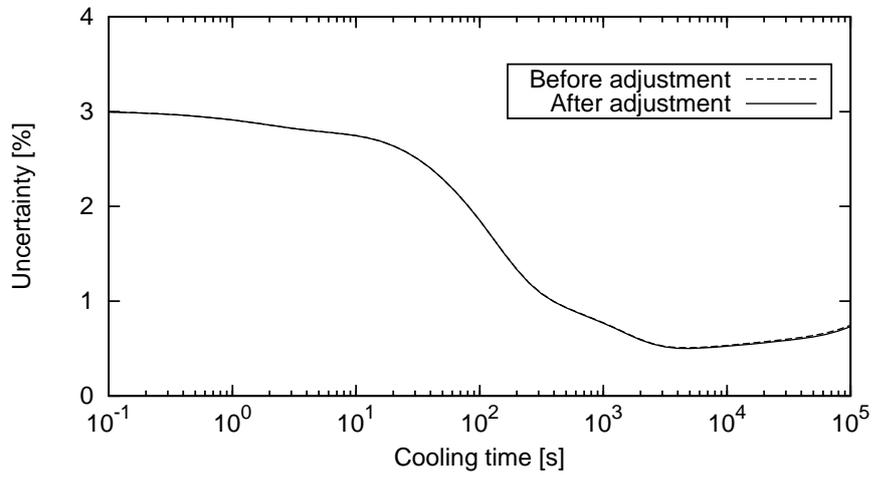
20GWd/t 照射 UO_2 燃料、MOX 燃料、60GWd/t 照射 UO_2 燃料 3 通りの短期崩壊熱について、瞬時照射実験値に対する炉定数調整を行う前と後の不確かさを図 50 に示す。3 者とも不確かさが著しく低減されている。冷却時間 0.1~100 秒付近において 2~3% 程度あった不確かさが炉定数調整により 0.5% 程度にまで減っている。図 24、25、26 と比較すると、崩壊エネルギー誤差の低減による効果がほとんどであると考えられる。この領域の不確かさはほとんどが崩壊エネルギー誤差を 100% と仮定した核種によるものである。従ってそういった過大な崩壊エネルギー誤差を、瞬時照射実験値を反映させることにより妥当な値へと修正することが出来たと解釈することもできる。瞬時照射実験値は PIE データと異なり崩壊エネルギーに関する情報も得られるため、短期崩壊熱不確かさの低減には非常に有利である。

同じ 3 通りの燃料の長期崩壊熱について、瞬時照射実験値に対する炉定数調整を行う前と後の不確かさを図 51 に示す。3 者とも不確かさは全く低減されていない。

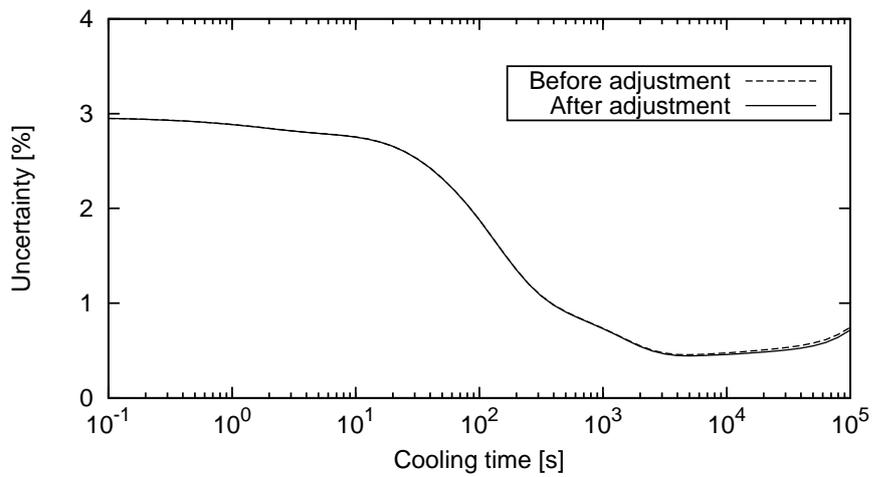
²⁶瞬時照射実験は β 、 γ 線測定なので誤差としては統計誤差が考えられるが、実際の実験値のプロットを見るとガタつかず滑らかに推移しているため、ある程度の正の相関があるものとする。



(a) 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料

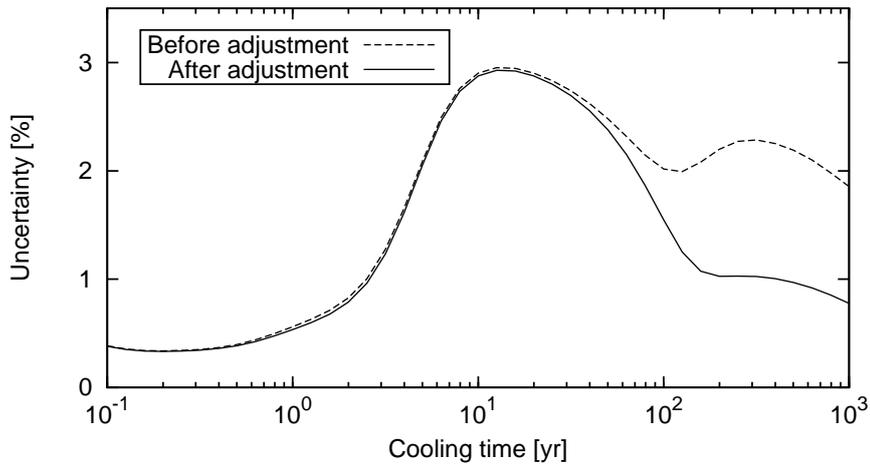


(b) 20GWd/t 照射 MOX 燃料

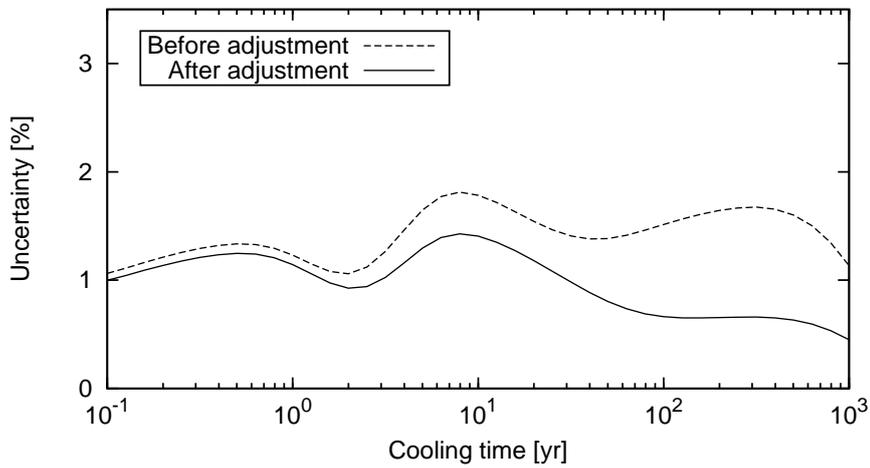


(c) 60GWd/t 照射 UO₂ 燃料

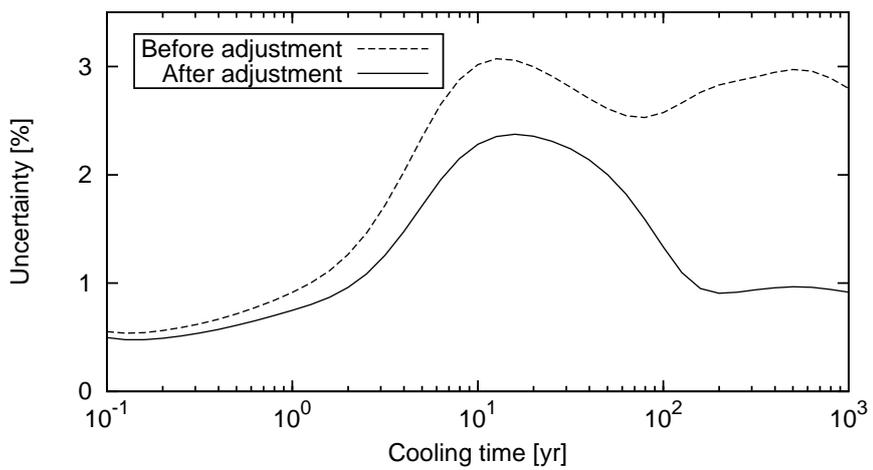
図 48: PIE データを用いた短期 (0.1~10⁵ 秒) 崩壊熱不確かさの低減



(a) 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料



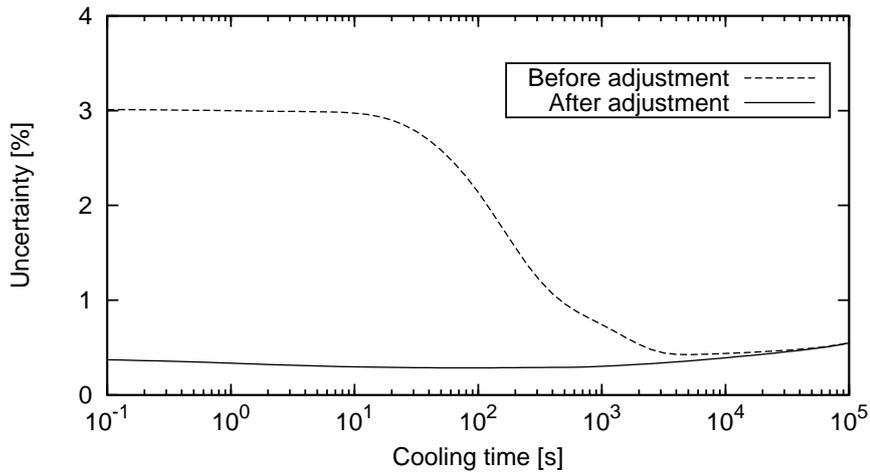
(b) 20GWd/t 照射 MOX 燃料



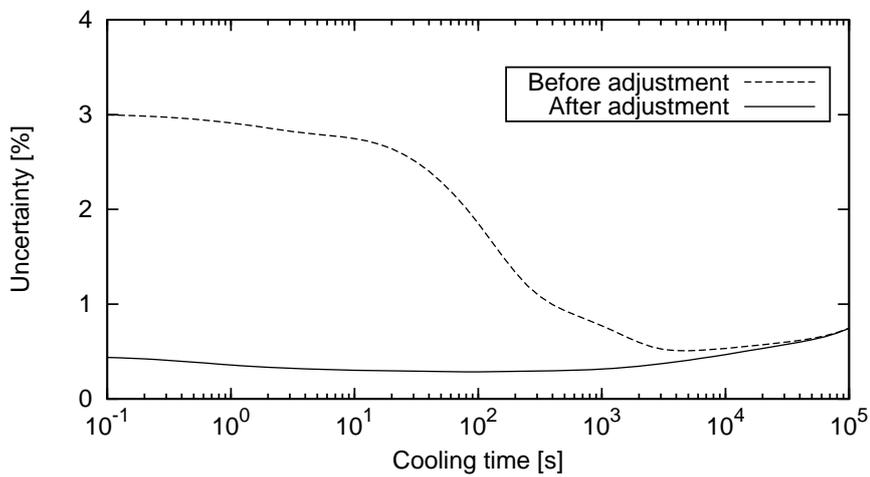
(c) 60GWd/t 照射 UO₂ 燃料

図 49: PIE データを用いた長期 (0.1~10³ 年) 崩壊熱不確かさの低減

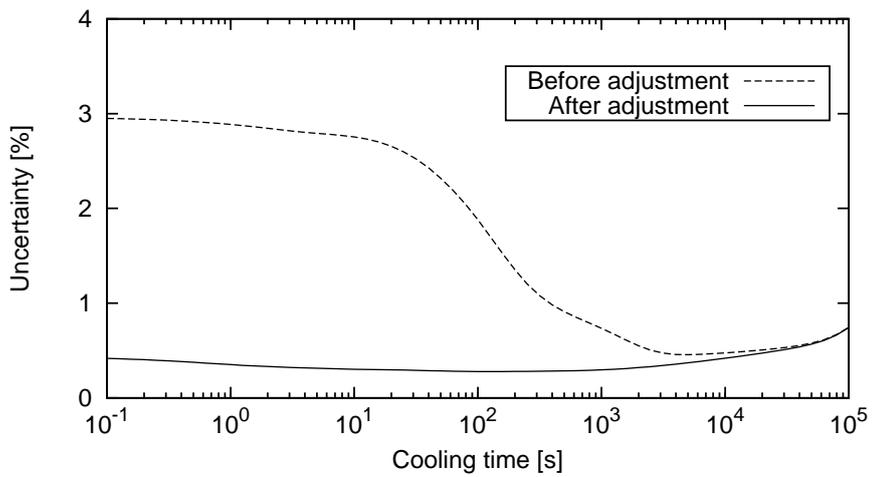
以上より短期・長期崩壊熱に対して、瞬時照射崩壊熱実験値を用いた炉定数調整を実施した。短期崩壊熱の不確かさは著しく低減され、長期崩壊熱不確かさは全く低減されなかった。これは 5.3 節での予想と合致している。



(a) 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料

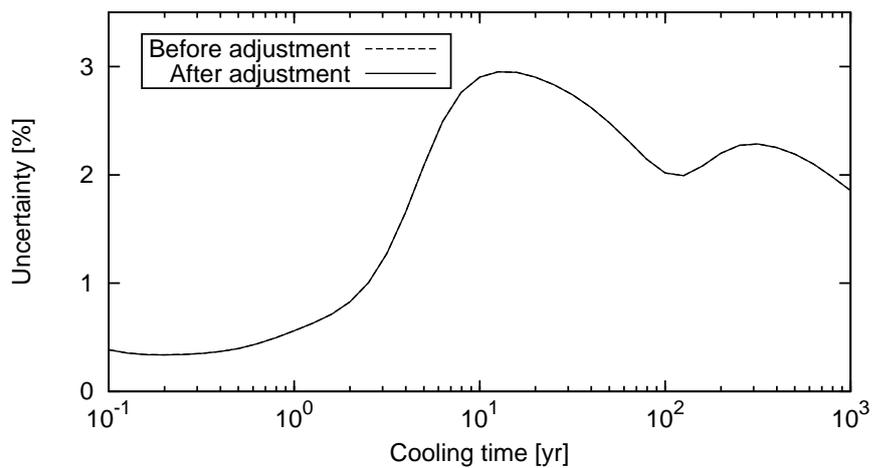


(b) 20GWd/t 照射 MOX 燃料

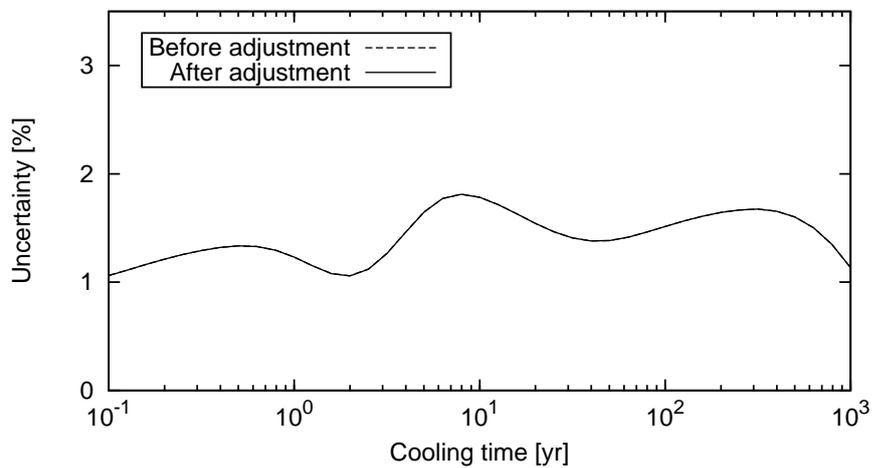


(c) 60GWd/t 照射 UO₂ 燃料

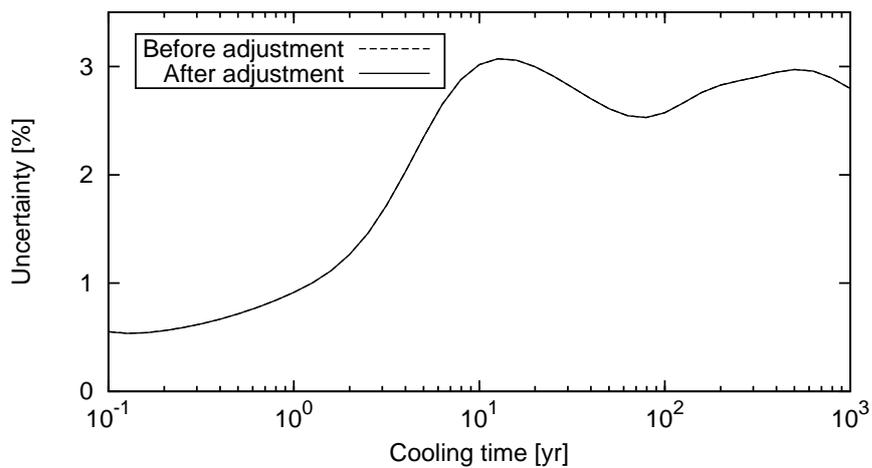
図 50: 瞬時照射崩壊熱測定データを用いた短期 (0.1~10⁵ 秒) 崩壊熱不確かさの低減



(a) 20GWd/t 照射 UO₂ 燃料



(b) 20GWd/t 照射 MOX 燃料



(c) 60GWd/t 照射 UO₂ 燃料

図 51: 瞬時照射崩壊熱測定データを用いた長期 (0.1~10³ 年) 崩壊熱不確かさの低減

6 結言

2章では新しい行列指数計算手法 MMPA 法を開発した。この手法は扱う核種の半減期、設定する時間幅に関係なく近似精度を高く保つことができるという大きな長所を持つ。また同様の利点を持つ CRAM と比較していくつかの点で優れている。MMPA 法は CBZ に実装され、本研究における計算に限らず様々な燃焼計算の計算速度、利便性向上に貢献している。課題として任意定数 c の決定方法が挙げられる。現状では c はパラメータ探索により決定しているが、もしこれを理論ベースで決定することができれば係数決定がより容易になる。また係数 a_i の桁の範囲が広がることによる情報落ちの問題もある。現状の 32 次、あるいは 48 次では問題が無いが、次数をさらに増やしていくと a_i の桁の範囲が大きくなり、近似式中において a_i を乗じたベクトルの線形結合の際に情報落ちが生じる場合がある。この問題を解決することができれば大きな次数の近似式を用いることができるため、マルチステップ計算において 1 回に計算できるステップ数をより増やすことができるだろう。

3章では使用済核燃料中の核種生成量に生じる核データライブラリ間差異について明らかにし、燃焼感度計算を用いてその要因を定量的に評価した。これにより、現時点における JENDL、ENDF、JEFF 間の差異が、核種生成量に対しどれほどの影響を与えているのかを把握することができた。またそれらの要因を評価することは核データ側の評価精度向上の余地を明らかにすることにもつながる。

4章では崩壊熱・核種生成量に生じる不確かさを定量化した。現在安全審査で用いられている崩壊熱の不確かさは、FP 崩壊熱に関しては瞬時照射崩壊熱に基づく値をベースにしたものであり、アクチニド崩壊熱に関しては未だに基準が整備されていない。本研究のように FP とアクチニドすべてを统一的に扱い、計算機上で核燃料の燃焼を詳細に再現し、主要な核データをすべて考慮した不確かさ計算を行ったことは大きな成果である。また PIE 解析における核種生成量不確かさを定量化したことも、C/E 値を評価する上で大きな助けになるだろう。課題としては、現状で用いられている基準値の不確かさとの比較や、アクチニド崩壊データの考慮などが考えられる。

5章では3章で定量化した不確かさのうち、実測困難な時間領域における崩壊熱の不確かさに着目し、現状で入手可能な実験データを用いることでこれを低減することに成功した。今回は崩壊熱のみであったが、この手法は原子炉停止直後や長期冷却後における核種生成量といった他の実測困難な量の不確かさ低減にも応用することができる。またこの手法は核データ誤差の評価が困難な場合に、代替手段として種々の実験値を用いてその定量化を行える可能性を示している。例えば理論計算により値が与えられる短半減期核種の崩壊エネルギーの誤差は本研究では 100% と仮定したが、章で行ったようにその誤差に瞬時照射実験値を反映させることにより、値を妥当なものに修正することができた。課題としては実験誤差や解析誤差の扱いが挙げられる。炉定数調整法では実験誤差や解析誤差の共分散を正しく設定しなければ妥当な調整を行うことができない。現状ではそれらに対する情報は必ずしも十分ではないため、保守的な値を仮定して対処しているが、はっきりとした根拠に基づき設定することが望ましい。特に PIE データに関しては、その測定の難しさから測定誤差として記載されていない誤差が存在していると考えられる。現状では特に FP に関するデータが少ないため存在するデータをそのまま採用しているが、多数のデータがある場合にはデータを吟味し、異常データの排除を行う必要がある。

本研究で行った不確かさ計算、炉定数調整計算においては、CBZ に様々な計算モジュールを追加した。これにより CBZ の応用範囲を大きく拡張することができた。

謝辞

本研究において、研究室長としてご指導を頂いた奈良林教授に厚く感謝申し上げます。また、実質的な研究指導、CBZ コードその他に関する多大な技術的指導を頂いた千葉豪准教授、様々な助言を頂いた辻雅司特任准教授に対しても深く感謝致します。

学生生活の面で支えて頂いた技術補佐員平井氏、また本研究室の M2、1、B4 の学生にも楽しかった学生生活を感謝したいと思います。

参考文献

- [1] 山本章夫、「燃焼の基礎理論」, 第 38 回炉物理夏期セミナーテキスト、(2006).
- [2] C Moler, C V Loan, "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later," SIAM Rev. 45(1), p.3 (2003).
- [3] Y. Kawamoto *et al*, "Validation of CBZ Code System for Post Irradiation Examination Analysis and Sensitivity Analysis of (n,γ) Branching Ratio," JAEA-Conf 2013-009, p.113 (2013).
- [4] 梶原孝則、「特異値分解法による簡易燃焼チェーン自動作成ツールの開発」, 北海道大学卒業論文、(2014).
- [5] M. Pusa, "Rational Approximations to the Matrix Exponential in Burnup Calculations," Nucl. Sci. Eng. 169, p.155 (2011).
- [6] 「原子炉崩壊熱基準」研究専門委員会、「原子炉崩壊熱とその推奨値」, 日本原子力学会、(1989).
- [7] A. Croff, "ORIGEN2-A Revised and Updated Version of the Oak Ridge Isotope Generation and Depletion Code," ORNL-5621 (1980).
- [8] 四国電力株式会社、「重大事故等対策の有効性評価に係る成立性確認の補足説明資料」, 原子力委員会適合性審査資料、URL:https://www.nsr.go.jp/activity/regulation/tekigousei/data/0003_05.pdf、(2013).
- [9] C. Meyer, "Matrix analysis and applied linear algebra," Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2000).
- [10] M. Pusa, J. Leppänen, "Computing the Matrix Exponential in Burnup Calculations," Nucl. Sci. Eng. 164, p.140 (2010).
- [11] M. Pusa, J. Leppänen, "Solving Linear Systems with Sparse Gaussian Elimination in the Chebyshev Rational Approximation Method (CRAM)," Nucl. Sci. Eng. 175, p.250 (2013).
- [12] 三上直樹、「改訂新版 C/C++によるデジタル信号処理入門」, CQ 出版社、(2009).
- [13] A. Carpenter *et al*, "Extended Numerical Computations on the 1/9 Conjecture in Rational Approximation Theory," Rational Approximation and Interpolation in *Lecture Notes in Mathematics*, 1105, p.383 (1984).
- [14] H. Fujiwara, "exflib - extend precision floating-point arithmetic library," Kyoto University, URL:<http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~fujiwara/exflib/index.html> (2009).
- [15] Y. Kawamoto *et al*, "Nuclear data sensitivity analysis for isotopic generation using JEFF-3.1.1 and -3.2," 2014 Symposium on Nuclear Data (Nov. 27-28, 2014), Sapporo.
- [16] A. Sasahara *et al*, "Isotopic Analysis of Actinides and Fission Products in LWR High-Burnup UO₂ Spent Fuels and its Comparison with Nuclide Composition Calculated Using JENDEL, ENDF/B, JEF and JEFF," J. Nucl. Sci. Technol. 45(4), p.313, URL:<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/18811248.2008.9711440#.Uv0hDqGvgYw> (2008).

- [17] A. Sasahara *et al*, "Chemical Isotopic Analysis of Fission Products in PWR-MOX Spent Fuels and Computational Evaluation Using JENDEL, ENDF/B, JEF and JEFF," J. Nucl. Sci. Technol. 45(5), p.390 URL:<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/18811248.2008.9711449#.Uv0hEKGvgYw> (2008).
- [18] K. Shibata *et al*, "JENDL-4.0: A New Library for Nuclear Science and Engineering," J. Nucl. Sci. Technol. 48[1], p.1 (2011).
- [19] M. Chadwick *et al*, "ENDF/B-VII.1 Nuclear Data for Science and Technology: Cross Sections, Covariances, Fission Product Yields and Decay Data," Nuclear Data Sheets 112, p.2887 URL:<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009037521100113X#> (2011).
- [20] A. Santamarina *et al*, "The JEFF-3.1.1 Nuclear Data Library," JEFF Report 22, (2009).
- [21] The JEFF team, "JEFF-3.2: Evaluated nuclear data library," URL:<http://www.oecd-nea.org/dbdata/jeff> (2014).
- [22] A. Sasahara *et al*, "Post Irradiation Examinations and the Validity of Computational Analysis for High Burn-up UO₂ and MOX Spent Fuels," CRIEPI report T95012, (1996).[in Japanese]
- [23] A. Sasahara, private communication (2013).
- [24] J. Katakura *et al*, "A Set of ORIGEN2 Cross Section Libraries Based on JENDL-3.3 Library: OR-LIBJ33," JAEA-Data/Code 2004-015, URL:<http://jolissrch-inter.tokai-sc.jaea.go.jp/pdffdata/JAERI-Data-Code-2004-015.pdf> (2004).
- [25] O. Iwamoto, private communication (2014).
- [26] A. Koning *et al*, "TENDL-2014: TALYS-based evaluated nuclear data library," URL:www.talys.eu/tendl-2014.html (2014).
- [27] J. Katakura, "Uncertainty analyses of decay heat summation calculations using JENDL, JEFF, and ENDF files," J. Nucl. Sci. Technol. 50, p.799 (2013).
- [28] G. Chiba *et al*, "Sensitivity analysis for reactor stable period induced by positive reactivity using one-point adjoint kinetic equation," Nucl. Data Sheets 118, p.401 (2014).
- [29] 千葉豪、「Verification:決定論的手法」、第44回炉物理夏期セミナーテキスト、(2012).
- [30] 羽倉 尚人、吉田 正、「軽水炉における使用済み MOX 燃料からのアクチニド崩壊熱の核データ由来の誤差評価」、日本原子力学会和文論文誌 Vol.9 No.1、p.29、(2010).
- [31] 石川真、杉野和輝、「(2) Subgroup 33 「炉定数調整法」会合に参加して」、核データニュース No.97、p.28、URL:<http://www.ndc.jaea.go.jp/JNDC/ND-news/pdf97/No97-05.pdf>、(2010).
- [32] E. Seabury *et al*, "Decay Heat Measurements Following Neutron Fission of ²³⁵U and ²³⁹Pu," Proc. Int. Conf. on Nucl. Data for Science and Technol., Trieste (Italy), p.835 (1997).
- [33] J. Dickens *et al*, "Fission-Product Energy Release for Times Following Thermal-Neutron Fission of ²³⁵U between 2 and 14,000 seconds," Nucl. Science and Eng. 74, p.106 (1980).
- [34] J. Dickens *et al*, "Fission-Product Energy Release for Times Following Thermal-Neutron Fission of ²³⁹Pu between 2 and 14,000 seconds," Nucl. Science and Eng. 78, p.126 (1981).

- [35] M. Akiyama *et al*, “Measurements of Beta-Ray Decay Heat of Fission Products for Fast Neutron Fission of ^{235}U , ^{239}Pu , and ^{233}U ,” Nihon-Genshiryoku-Gakkai Shi (J. At. Energy Soc. Jpn.) 24, p.803 (1982).[in Japanese].
- [36] M. Akiyama *et al*, “Measurements of Gamma-Ray Decay Heat of Fission Products for Fast Neutron Fission of ^{235}U , ^{239}Pu , and ^{233}U ,” Nihon-Genshiryoku-Gakkai Shi (J. At. Energy Soc. Jpn.) 24, p.709 (1982).[in Japanese].
- [37] T. Kajihara, private communication (2014).

A 主要元素の崩壊熱表

ここでは一般的な原子炉の炉心平均崩壊熱として、以下の条件²⁷の下照射された UO₂ 燃料の主要元素別崩壊熱を示す。

- 燃料濃縮度 ... 4.8wt%(集合体燃焼度制限 55GWd/t 対応燃料)
- 線出力密度 ... 17.1kW/m
- 照射履歴 ... 上記線出力密度にて連続照射 (中間停止は考慮せず)
- 評価燃焼度 ... 18,36,55GWd/t(集合体燃焼度制限 55GWd/t 対応燃料)

²⁷[8] より引用

表 7: 冷却期間 1~10⁶ 秒における主要元素別崩壊熱

Time[s]	Cs[W/tHM]	I[W/tHM]	Kr+Xe[W/tHM]	ALL[W/tHM]
1.000000E+00	8.258837E+02	1.103499E+04	1.513290E+03	6.071183E+04
1.258925E+00	8.152500E+02	7.250823E+03	8.383580E+02	4.821013E+04
1.584893E+00	8.028177E+02	4.971580E+03	6.240583E+02	4.160077E+04
1.995262E+00	7.884703E+02	3.312324E+03	4.802010E+02	3.676227E+04
2.511886E+00	7.722657E+02	2.080901E+03	3.470063E+02	3.266764E+04
3.162278E+00	7.544410E+02	1.209825E+03	2.310946E+02	2.903592E+04
3.981072E+00	7.354513E+02	6.490380E+02	1.397662E+02	2.577383E+04
5.011872E+00	7.159723E+02	3.254401E+02	7.581980E+01	2.282092E+04
6.309573E+00	6.968330E+02	1.549469E+02	3.711443E+01	2.013415E+04
7.943282E+00	6.788557E+02	6.941250E+01	1.753051E+01	1.769958E+04
1.000000E+01	6.626167E+02	2.780623E+01	9.531577E+00	1.552206E+04
1.258925E+01	6.481950E+02	9.227017E+00	6.949233E+00	1.359547E+04
1.584893E+01	6.350370E+02	2.339950E+00	6.260760E+00	1.188278E+04
1.995262E+01	6.220490E+02	4.175780E-01	6.074323E+00	1.032538E+04
2.511886E+01	6.079020E+02	4.772407E-02	6.004380E+00	8.873763E+03
3.162278E+01	5.913680E+02	3.114197E-03	5.960737E+00	7.514383E+03
3.981072E+01	5.714840E+02	1.040561E-04	5.917287E+00	6.270347E+03
5.011872E+01	5.475160E+02	5.422017E-06	5.865020E+00	5.176683E+03
6.309573E+01	5.188693E+02	4.108630E-06	5.800090E+00	4.251203E+03
7.943282E+01	4.850767E+02	4.103047E-06	5.719377E+00	3.481470E+03
1.000000E+02	4.458757E+02	4.103063E-06	5.619363E+00	2.833641E+03
1.258925E+02	4.013497E+02	4.103067E-06	5.495937E+00	2.274054E+03
1.584893E+02	3.520967E+02	4.103067E-06	5.344400E+00	1.786584E+03
1.995262E+02	2.993949E+02	4.103067E-06	5.159553E+00	1.373859E+03
2.511886E+02	2.453012E+02	4.103067E-06	4.935907E+00	1.045177E+03
3.162278E+02	1.925918E+02	4.103067E-06	4.668087E+00	8.033527E+02
3.981072E+02	1.444484E+02	4.103063E-06	4.351487E+00	6.391863E+02
5.011872E+02	1.038479E+02	4.103063E-06	3.983260E+00	5.341960E+02
6.309573E+02	7.276410E+01	4.103063E-06	3.563667E+00	4.676623E+02
7.943282E+02	5.149190E+01	4.103063E-06	3.097697E+00	4.227737E+02
1.000000E+03	3.851670E+01	4.103063E-06	2.596707E+00	3.885797E+02
1.258925E+03	3.115136E+01	4.103063E-06	2.079549E+00	3.585813E+02
1.584893E+03	2.665230E+01	4.103063E-06	1.572320E+00	3.289127E+02
1.995262E+03	2.311521E+01	4.103060E-06	1.105788E+00	2.975328E+02
2.511886E+03	1.966318E+01	4.103060E-06	7.099397E-01	2.639021E+02
3.162278E+03	1.610015E+01	4.103057E-06	4.063873E-01	2.285907E+02
3.981072E+03	1.252372E+01	4.103057E-06	2.013383E-01	1.928939E+02
5.011872E+03	9.128600E+00	4.103053E-06	8.316430E-02	1.585581E+02
6.309573E+03	6.130810E+00	4.103050E-06	2.732264E-02	1.274840E+02
7.943282E+03	3.714223E+00	4.103047E-06	6.728840E-03	1.012939E+02
1.000000E+04	1.976364E+00	4.103043E-06	1.152870E-03	8.083710E+01
1.258925E+04	8.931623E-01	4.103037E-06	1.250957E-04	6.589033E+01
1.584893E+04	3.286391E-01	4.103027E-06	7.637677E-06	5.529443E+01
1.995262E+04	9.338013E-02	4.103017E-06	2.260916E-07	4.750820E+01
2.511886E+04	1.920238E-02	4.103007E-06	2.697115E-09	4.123023E+01
3.162278E+04	2.677551E-03	4.102990E-06	1.719855E-11	3.569510E+01
3.981072E+04	2.876367E-04	4.102970E-06	7.043870E-12	3.057835E+01
5.011872E+04	8.556980E-05	4.102943E-06	7.031887E-12	2.577712E+01
6.309573E+04	7.680003E-05	4.102913E-06	7.028197E-12	2.129846E+01
7.943282E+04	7.662937E-05	4.102873E-06	7.023553E-12	1.724342E+01
1.000000E+05	7.662200E-05	4.102823E-06	7.017717E-12	1.377675E+01
1.258925E+05	7.661407E-05	4.102763E-06	7.010373E-12	1.104641E+01
1.584893E+05	7.660413E-05	4.102683E-06	7.001140E-12	9.096363E+00
1.995262E+05	7.659157E-05	4.102583E-06	6.989533E-12	7.828237E+00
2.511886E+05	7.657580E-05	4.102460E-06	6.974947E-12	7.035220E+00
3.162278E+05	7.655593E-05	4.102303E-06	6.956630E-12	6.487077E+00
3.981072E+05	7.653097E-05	4.102107E-06	6.933637E-12	6.010480E+00
5.011872E+05	7.649950E-05	4.101857E-06	6.904797E-12	5.516703E+00
6.309573E+05	7.645993E-05	4.101543E-06	6.868663E-12	4.979897E+00
7.943282E+05	7.641013E-05	4.101150E-06	6.823440E-12	4.404700E+00
1.000000E+06	7.634747E-05	4.100653E-06	6.766933E-12	3.807960E+00

B MMPA 法マルチステップ計算の近似係数

2.6 節で行われたマルチステップ計算で用いられた 48 次 MMPA 近似式の係数セットを以下に示す。対応する任意定数 c は図 11 で示されたものである。

まずは最初の 6 ステップを計算するための係数 6 セットを示す。

Coefficient a_i ($c = 16$)					
a_0	$1.12535174719436915429 \times 10^{-7}$	a_{17}	$1.63747875794902479055 \times 10^{-1}$	a_{33}	$-4.24166107113733789449 \times 10^{-2}$
a_1	$-3.60112559104326411840 \times 10^{-6}$	a_{18}	$1.00016228165977581514 \times 10^{-1}$	a_{34}	$-4.46322522181270049993 \times 10^{-1}$
a_2	$5.40168838650231100585 \times 10^{-5}$	a_{19}	$-1.25015649153585794428 \times 10^{-1}$	a_{35}	$-2.64838753661734838743 \times 10^{-2}$
a_3	$-5.02957207534131921437 \times 10^{-4}$	a_{20}	$-1.27112379022206624188 \times 10^{-1}$	a_{36}	$3.47547516130817998509 \times 10^{-1}$
a_4	$3.24221340715798992572 \times 10^{-3}$	a_{21}	$6.24995538468487243066 \times 10^{-2}$	a_{37}	$4.95324662477492686972 \times 10^{-2}$
a_5	$-1.52608500309838852406 \times 10^{-2}$	a_{22}	$1.42439711387716676268 \times 10^{-1}$	a_{38}	$-2.11872309810388232170 \times 10^{-1}$
a_6	$5.37949744999227321757 \times 10^{-2}$	a_{23}	$2.59057014773945553982 \times 10^{-2}$	a_{39}	$-3.83638004748815115014 \times 10^{-2}$
a_7	$-1.42799319909608996409 \times 10^{-1}$	a_{24}	$-1.11017372414298427807 \times 10^{-1}$	a_{40}	$9.96279407695668971790 \times 10^{-2}$
a_8	$2.80952239275618283650 \times 10^{-1}$	a_{25}	$-1.22433727528261425466 \times 10^{-1}$	a_{41}	$1.86653915459792751196 \times 10^{-2}$
a_9	$-3.88404512213380723691 \times 10^{-1}$	a_{26}	$7.78181060207520357181 \times 10^{-3}$	a_{42}	$-3.49769262479569098092 \times 10^{-2}$
a_{10}	$3.19004517085207491919 \times 10^{-1}$	a_{27}	$1.90137583356158317814 \times 10^{-1}$	a_{43}	$-5.88945331540796168774 \times 10^{-3}$
a_{11}	$-3.02193669057283350467 \times 10^{-2}$	a_{28}	$1.58709134200956522121 \times 10^{-1}$	a_{44}	$8.64352410701897817530 \times 10^{-3}$
a_{12}	$-2.40654152701884664803 \times 10^{-1}$	a_{29}	$-1.9444941555998288901 \times 10^{-1}$	a_{45}	$1.11282449877578150592 \times 10^{-3}$
a_{13}	$1.73664327872257185639 \times 10^{-1}$	a_{30}	$-3.35224878597375829279 \times 10^{-1}$	a_{46}	$-1.34203729910405140951 \times 10^{-3}$
a_{14}	$1.31845829688110605213 \times 10^{-1}$	a_{31}	$1.32733265352847200428 \times 10^{-1}$	a_{47}	$-9.63080617219916315583 \times 10^{-5}$
a_{15}	$-1.85659542432681836527 \times 10^{-1}$	a_{32}	$4.46908639052389715419 \times 10^{-1}$	a_{48}	$9.85118241738655646730 \times 10^{-5}$
a_{16}	$-9.21443413412654942921 \times 10^{-2}$				

Coefficient a_i ($c = 32$)					
a_0	$1.26641622865236151455 \times 10^{-14}$	a_{17}	$-3.04280152972712293470 \times 10^{-1}$	a_{33}	$-8.27219008114946589274 \times 10^{-2}$
a_1	$-8.10504922074006066308 \times 10^{-13}$	a_{18}	$3.08578694420539663679 \times 10^{-1}$	a_{34}	$-3.14742341654560647493 \times 10^{-3}$
a_2	$2.51257085106983862004 \times 10^{-11}$	a_{19}	$-1.82524188526531878876 \times 10^{-1}$	a_{35}	$5.38815025452417604235 \times 10^{-2}$
a_3	$-5.02244612788504497841 \times 10^{-10}$	a_{20}	$-4.04947596464419772608 \times 10^{-2}$	a_{36}	$3.63669720159337948827 \times 10^{-4}$
a_4	$7.26997314198862450394 \times 10^{-9}$	a_{21}	$2.11555787831152546666 \times 10^{-1}$	a_{37}	$-2.96795563951926050696 \times 10^{-2}$
a_5	$-8.11222765509637615591 \times 10^{-8}$	a_{22}	$-1.74512444183970002844 \times 10^{-1}$	a_{38}	$1.82627906579126662038 \times 10^{-4}$
a_6	$7.25254682625094745163 \times 10^{-7}$	a_{23}	$-4.19423665990766594584 \times 10^{-2}$	a_{39}	$1.32841478733439966204 \times 10^{-2}$
a_7	$-5.32966617140026708614 \times 10^{-6}$	a_{24}	$1.90663204586065914657 \times 10^{-1}$	a_{40}	$-1.32985202691211289999 \times 10^{-4}$
a_8	$3.27664379938472085163 \times 10^{-5}$	a_{25}	$-8.17480689275699909044 \times 10^{-2}$	a_{41}	$-4.59517014222255113092 \times 10^{-3}$
a_9	$-1.70608890434897834160 \times 10^{-4}$	a_{26}	$-1.29936410559321486037 \times 10^{-1}$	a_{42}	$4.46153836295735927505 \times 10^{-5}$
a_{10}	$7.58588616211421117744 \times 10^{-4}$	a_{27}	$1.29102154296904872527 \times 10^{-1}$	a_{43}	$1.14450566880685759766 \times 10^{-3}$
a_{11}	$-2.89476861850203185568 \times 10^{-3}$	a_{28}	$7.01235218828372940742 \times 10^{-2}$	a_{44}	$-8.80187995672056266097 \times 10^{-6}$
a_{12}	$9.49951828822370296259 \times 10^{-3}$	a_{29}	$-1.30477082317955488589 \times 10^{-1}$	a_{45}	$-1.81757756533650220181 \times 10^{-4}$
a_{13}	$-2.67798187612031959781 \times 10^{-2}$	a_{30}	$-3.15819770803325196658 \times 10^{-2}$	a_{46}	$9.31629321053810113195 \times 10^{-7}$
a_{14}	$6.45458114315569984993 \times 10^{-2}$	a_{31}	$1.10720278996555170446 \times 10^{-1}$	a_{47}	$1.37757890748923767291 \times 10^{-5}$
a_{15}	$-1.31701300990147125368 \times 10^{-1}$	a_{32}	$1.16340365645121802942 \times 10^{-2}$	a_{48}	$-3.51122945716412926030 \times 10^{-8}$
a_{16}	$2.23386117664129841514 \times 10^{-1}$				

Coefficient a_i ($c = 48$)			
a_0	$3.18549678364201814378 \times 10^{-20}$		
a_1	$-8.81448948859912327271 \times 10^{-19}$	a_{17}	$-6.01730652910577527443 \times 10^{-4}$
a_2	$-3.23274824027187780722 \times 10^{-17}$	a_{18}	$1.89606915800582359295 \times 10^{-3}$
a_3	$1.19362994274515299337 \times 10^{-16}$	a_{19}	$-5.47982876209626742510 \times 10^{-3}$
a_4	$1.26445928536760821129 \times 10^{-14}$	a_{20}	$1.43240812811321312148 \times 10^{-2}$
a_5	$-1.18218945799314943542 \times 10^{-13}$	a_{21}	$-3.30915879136779990657 \times 10^{-2}$
a_6	$4.20953304816168497380 \times 10^{-13}$	a_{22}	$6.75742246055404312777 \times 10^{-2}$
a_7	$-1.08705171832039602642 \times 10^{-11}$	a_{23}	$-1.23132620949505862447 \times 10^{-1}$
a_8	$1.66615609337844261301 \times 10^{-10}$	a_{24}	$1.96866742119397176044 \times 10^{-1}$
a_9	$-1.27998378513465491483 \times 10^{-9}$	a_{25}	$-2.62933803549242414611 \times 10^{-1}$
a_{10}	$8.35301491283844819958 \times 10^{-9}$	a_{26}	$2.76746945908645199177 \times 10^{-1}$
a_{11}	$-6.07175372418896973740 \times 10^{-8}$	a_{27}	$-2.11983248289456202307 \times 10^{-1}$
a_{12}	$3.94593166992227177778 \times 10^{-7}$	a_{28}	$7.71139026122805876067 \times 10^{-2}$
a_{13}	$-2.07499772404597631334 \times 10^{-6}$	a_{29}	$1.00092541991638694157 \times 10^{-1}$
a_{14}	$9.68698867498085015104 \times 10^{-6}$	a_{30}	$-2.30354024172014530766 \times 10^{-1}$
a_{15}	$-4.27415611295419062126 \times 10^{-5}$	a_{31}	$1.58726458568609884271 \times 10^{-1}$
a_{16}	$1.71176035276515687753 \times 10^{-4}$	a_{32}	$9.79513769546466730839 \times 10^{-2}$
		a_{33}	$-2.23584849211081850389 \times 10^{-1}$
		a_{34}	$3.89043400226010822231 \times 10^{-2}$
		a_{35}	$1.57247205696744331196 \times 10^{-1}$
		a_{36}	$-8.01805356462278541652 \times 10^{-2}$
		a_{37}	$-7.70814110450085325545 \times 10^{-2}$
		a_{38}	$6.09407062985691518477 \times 10^{-2}$
		a_{39}	$2.82974699028654687738 \times 10^{-2}$
		a_{40}	$-3.05322008287095437785 \times 10^{-2}$
		a_{41}	$-7.77504775866096836365 \times 10^{-3}$
		a_{42}	$1.08625237044865836059 \times 10^{-2}$
		a_{43}	$1.52487252149640071036 \times 10^{-3}$
		a_{44}	$-2.67940682115865300253 \times 10^{-3}$
		a_{45}	$-1.91026264196047346152 \times 10^{-4}$
		a_{46}	$4.14358154717172020136 \times 10^{-4}$
		a_{47}	$1.14842818451754491218 \times 10^{-5}$
		a_{48}	$-3.03694890940065248552 \times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 64$)			
a_0	$1.26913280178746373023 \times 10^{-19}$		
a_1	$5.38848816762345245829 \times 10^{-17}$	a_{17}	$1.45072714231150295307 \times 10^{-4}$
a_2	$-1.55430102183906991694 \times 10^{-16}$	a_{18}	$-6.27204567965349113209 \times 10^{-5}$
a_3	$-2.19351928097252029583 \times 10^{-14}$	a_{19}	$-9.16922990539131202893 \times 10^{-4}$
a_4	$3.19724165848679661263 \times 10^{-14}$	a_{20}	$3.87025675737722873856 \times 10^{-4}$
a_5	$2.66994299918260428459 \times 10^{-12}$	a_{21}	$4.54737068461150877372 \times 10^{-3}$
a_6	$-2.64251509554628746150 \times 10^{-12}$	a_{22}	$-1.84962672957623973249 \times 10^{-3}$
a_7	$-1.53748890432704954327 \times 10^{-10}$	a_{23}	$-1.82349617466024799002 \times 10^{-2}$
a_8	$1.17140845975674346058 \times 10^{-10}$	a_{24}	$7.94303126061093714853 \times 10^{-3}$
a_9	$5.11424293864679473637 \times 10^{-9}$	a_{25}	$5.68425307547398177985 \times 10^{-2}$
a_{10}	$-3.22412010184930259325 \times 10^{-9}$	a_{26}	$-2.15385276843063475692 \times 10^{-2}$
a_{11}	$-1.09891538738054275573 \times 10^{-7}$	a_{27}	$-1.58823116525978194739 \times 10^{-1}$
a_{12}	$6.01735728442222311635 \times 10^{-8}$	a_{28}	$8.47437195615951578182 \times 10^{-2}$
a_{13}	$1.63737966394498536662 \times 10^{-6}$	a_{29}	$2.83259872045395706034 \times 10^{-1}$
a_{14}	$-8.07047125991706365202 \times 10^{-7}$	a_{30}	$-8.16378224837706974634 \times 10^{-2}$
a_{15}	$-1.77580918432361523475 \times 10^{-5}$	a_{31}	$-6.69660956430568497763 \times 10^{-1}$
a_{16}	$8.11292398516529307557 \times 10^{-6}$	a_{32}	$4.60388605568153479532 \times 10^{-1}$
		a_{33}	$5.37138504052225120530 \times 10^{-1}$
		a_{34}	$-1.82289025728053111012 \times 10^{-1}$
		a_{35}	$-1.08224368572325644112 \times 10^{+0}$
		a_{36}	$6.86627876529241724098 \times 10^{-1}$
		a_{37}	$7.73265984475119700336 \times 10^{-1}$
		a_{38}	$-7.65354983853921773084 \times 10^{-1}$
		a_{39}	$-2.65407012447778153462 \times 10^{-1}$
		a_{40}	$4.37368700083162815516 \times 10^{-1}$
		a_{41}	$3.83297807257831992279 \times 10^{-2}$
		a_{42}	$-1.56127751616441328205 \times 10^{-1}$
		a_{43}	$3.83620102475475923966 \times 10^{-3}$
		a_{44}	$3.61292448803275319744 \times 10^{-2}$
		a_{45}	$-2.33616971871565790370 \times 10^{-3}$
		a_{46}	$-5.06691972121955887516 \times 10^{-3}$
		a_{47}	$2.73734747153514273829 \times 10^{-4}$
		a_{48}	$3.31811774414157938198 \times 10^{-4}$

Coefficient a_i ($c = 80$)			
a_0	$2.10739148127899322346 \times 10^{-17}$		
a_1	$1.51615126779283562329 \times 10^{-17}$	a_{17}	$-2.35986710243914998475 \times 10^{-4}$
a_2	$-2.57385909684450777927 \times 10^{-14}$	a_{18}	$-7.21838981307502633067 \times 10^{-3}$
a_3	$-5.31705095415893722579 \times 10^{-15}$	a_{19}	$1.99214748538817399475 \times 10^{-3}$
a_4	$5.23104103781712597369 \times 10^{-12}$	a_{20}	$4.02109911395090799942 \times 10^{-2}$
a_5	$4.03859409116627559794 \times 10^{-13}$	a_{21}	$-1.28347755451987298394 \times 10^{-2}$
a_6	$-4.23204341940641769338 \times 10^{-10}$	a_{22}	$-1.77424931555815094603 \times 10^{-1}$
a_7	$-1.03917495556637777111 \times 10^{-12}$	a_{23}	$6.45682157463300325116 \times 10^{-2}$
a_8	$1.81926872192673195269 \times 10^{-8}$	a_{24}	$6.27077776315005430389 \times 10^{-1}$
a_9	$-9.8814668777282026140 \times 10^{-10}$	a_{25}	$-2.57750746851854578446 \times 10^{-1}$
a_{10}	$-4.81001668563190969630 \times 10^{-7}$	a_{26}	$-1.78829500715905134138 \times 10^{+0}$
a_{11}	$4.96414449290866874965 \times 10^{-8}$	a_{27}	$8.25567386306454421654 \times 10^{-1}$
a_{12}	$8.54009683922490513941 \times 10^{-6}$	a_{28}	$4.12989323578987963906 \times 10^{+0}$
a_{13}	$-1.26561034295266753862 \times 10^{-6}$	a_{29}	$-2.13669465718515966160 \times 10^{+0}$
a_{14}	$-1.07902718211513735603 \times 10^{-4}$	a_{30}	$-7.72092366407843306275 \times 10^{+0}$
a_{15}	$2.06378666622147880249 \times 10^{-5}$	a_{31}	$4.48289103831774250881 \times 10^{+0}$
a_{16}	$1.01030277361960267869 \times 10^{-3}$	a_{32}	$1.16258194567005544649 \times 10^{+1}$
		a_{33}	$-7.62322915253804407711 \times 10^{+0}$
		a_{34}	$-1.39208300749083829573 \times 10^{+1}$
		a_{35}	$1.04317698349663027695 \times 10^{+1}$
		a_{36}	$1.29712792281924837728 \times 10^{+1}$
		a_{37}	$-1.14287364306671868913 \times 10^{+1}$
		a_{38}	$-8.81962286762845499066 \times 10^{+0}$
		a_{39}	$9.54540213210229010231 \times 10^{+0}$
		a_{40}	$4.11853460855327216995 \times 10^{+0}$
		a_{41}	$-6.28022951363763026462 \times 10^{+0}$
		a_{42}	$-3.37854565004145342303 \times 10^{-1}$
		a_{43}	$2.28601360223625307981 \times 10^{+0}$
		a_{44}	$-3.48882381810577418926 \times 10^{-1}$
		a_{45}	$-4.33198356493741013919 \times 10^{-1}$
		a_{46}	$1.19946891446650512028 \times 10^{-1}$
		a_{47}	$3.46858415593211783702 \times 10^{-2}$
		a_{48}	$-1.26207831046867863320 \times 10^{-2}$

Coefficient a_i ($c = 96$)			
a_0	$2.13826366462893920418 \times 10^{-15}$		
a_1	$6.89470842884031805388 \times 10^{-14}$	a_{17}	$1.39647089677719158253 \times 10^{-1}$
a_2	$-2.56370348635849444092 \times 10^{-12}$	a_{18}	$-6.41359633609478917653 \times 10^{-1}$
a_3	$-2.74737165815100664350 \times 10^{-11}$	a_{19}	$-8.27478004382134334494 \times 10^{-1}$
a_4	$5.12088108767486563658 \times 10^{-10}$	a_{20}	$3.53440038776844905436 \times 10^{+0}$
a_5	$3.26339097291260888247 \times 10^{-9}$	a_{21}	$3.81872744036784549479 \times 10^{+0}$
a_6	$-4.07595909001578569364 \times 10^{-8}$	a_{22}	$-1.54422468583111999800 \times 10^{+1}$
a_7	$-1.82762885362025800501 \times 10^{-7}$	a_{23}	$-1.38749008494569261167 \times 10^{+1}$
a_8	$1.72544785438340066504 \times 10^{-6}$	a_{24}	$5.41102902692768934237 \times 10^{+1}$
a_9	$5.88969673479342150040 \times 10^{-6}$	a_{25}	$3.99079416658467952157 \times 10^{+1}$
a_{10}	$-4.49614676652496098842 \times 10^{-5}$	a_{26}	$-1.53254480081824066266 \times 10^{+2}$
a_{11}	$-1.22064543181624001011 \times 10^{-4}$	a_{27}	$-9.08273157092029884397 \times 10^{+1}$
a_{12}	$7.87371613327832104825 \times 10^{-4}$	a_{28}	$3.52415655869165549676 \times 10^{+2}$
a_{13}	$1.74524535402511845058 \times 10^{-3}$	a_{29}	$1.62208897489948809820 \times 10^{+2}$
a_{14}	$-9.81944841368238032079 \times 10^{-3}$	a_{30}	$-6.58764865471765769166 \times 10^{+2}$
a_{15}	$-1.80512480447438085950 \times 10^{-2}$	a_{31}	$-2.22399263566270443677 \times 10^{+2}$
a_{16}	$9.08137071614657093439 \times 10^{-2}$	a_{32}	$9.98664483983556397082 \times 10^{+2}$
		a_{33}	$2.22048100866731279155 \times 10^{+2}$
		a_{34}	$-1.21963863709343771790 \times 10^{+3}$
		a_{35}	$-1.37201780031930503652 \times 10^{+2}$
		a_{36}	$1.18502072984707496447 \times 10^{+3}$
		a_{37}	$7.16168757949468125654 \times 10^{+0}$
		a_{38}	$-8.96500912843714817860 \times 10^{+2}$
		a_{39}	$8.90650780895647117544 \times 10^{+1}$
		a_{40}	$5.08700845907950062803 \times 10^{+2}$
		a_{41}	$-1.05339246697494596795 \times 10^{+2}$
		a_{42}	$-2.01722105978345481564 \times 10^{+2}$
		a_{43}	$6.52577324265017791606 \times 10^{+1}$
		a_{44}	$4.75454227162317135848 \times 10^{+1}$
		a_{45}	$-2.22360921760002363867 \times 10^{+1}$
		a_{46}	$-3.40155252799985713417 \times 10^{+0}$
		a_{47}	$2.61468674366827562630 \times 10^{+0}$
		a_{48}	$-2.07406846106877246964 \times 10^{-1}$

次に残りの 37 ステップを計算するための係数 37 セットを示す。

Coefficient a_i ($c = 16$)					
a_0	1.12535174719436915429 $\times 10^{-7}$				
a_1	-3.60112559104326411840 $\times 10^{-6}$	a_{17}	1.63747875794902479055 $\times 10^{-1}$	a_{33}	-4.24166107113733789449 $\times 10^{-2}$
a_2	5.40168838650231100585 $\times 10^{-5}$	a_{18}	1.00016228165977581514 $\times 10^{-1}$	a_{34}	-4.46322522181270049993 $\times 10^{-1}$
a_3	-5.02957207534131921437 $\times 10^{-4}$	a_{19}	-1.25015649153585794428 $\times 10^{-1}$	a_{35}	-2.64838753661734838743 $\times 10^{-2}$
a_4	3.24221340715798992572 $\times 10^{-3}$	a_{20}	-1.27112379022206624188 $\times 10^{-1}$	a_{36}	3.47547516130817998509 $\times 10^{-1}$
a_5	-1.52608500309838852406 $\times 10^{-2}$	a_{21}	6.24995538468487243066 $\times 10^{-2}$	a_{37}	4.95324662477492686972 $\times 10^{-2}$
a_6	5.37949744999227321757 $\times 10^{-2}$	a_{22}	1.42439711387716676268 $\times 10^{-1}$	a_{38}	-2.11872309810388232170 $\times 10^{-1}$
a_7	-1.42799319909608996409 $\times 10^{-1}$	a_{23}	2.59057014773945553982 $\times 10^{-2}$	a_{39}	-3.83638004748815115014 $\times 10^{-2}$
a_8	2.80952239275618283650 $\times 10^{-1}$	a_{24}	-1.11017372414298427807 $\times 10^{-1}$	a_{40}	9.96279407695668971790 $\times 10^{-2}$
a_9	-3.88404512213380723691 $\times 10^{-1}$	a_{25}	-1.22433727528261425466 $\times 10^{-1}$	a_{41}	1.86653915459792751196 $\times 10^{-2}$
a_{10}	3.19004517085207491919 $\times 10^{-1}$	a_{26}	7.78181060207520357181 $\times 10^{-3}$	a_{42}	-3.49769262479569098092 $\times 10^{-2}$
a_{11}	-3.02193669057283350467 $\times 10^{-2}$	a_{27}	1.90137583356158317814 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-5.88945331540796168774 $\times 10^{-3}$
a_{12}	-2.40654152701884664803 $\times 10^{-1}$	a_{28}	1.58709134200956522121 $\times 10^{-1}$	a_{44}	8.64352410701897817530 $\times 10^{-3}$
a_{13}	1.73664327872257185639 $\times 10^{-1}$	a_{29}	-1.94449415555998288901 $\times 10^{-1}$	a_{45}	1.11282449877578150592 $\times 10^{-3}$
a_{14}	1.31845829688110605213 $\times 10^{-1}$	a_{30}	-3.35224878597375829279 $\times 10^{-1}$	a_{46}	-1.34203729910405140951 $\times 10^{-3}$
a_{15}	-1.85659542432681836527 $\times 10^{-1}$	a_{31}	1.32733265352847200428 $\times 10^{-1}$	a_{47}	-9.63080617219916315583 $\times 10^{-5}$
a_{16}	-9.21443413412654942921 $\times 10^{-2}$	a_{32}	4.46908639052389715419 $\times 10^{-1}$	a_{48}	9.85118241738655646730 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{8}{9}$)					
a_0	1.14449839522090327294 $\times 10^{-8}$				
a_1	-4.18559413098753266161 $\times 10^{-7}$	a_{17}	-3.73158591051276846447 $\times 10^{-2}$	a_{33}	1.41252897732928405533 $\times 10^{-1}$
a_2	7.23509842648914070244 $\times 10^{-6}$	a_{18}	-1.84507570012216905917 $\times 10^{-1}$	a_{34}	2.21530669156590202200 $\times 10^{-1}$
a_3	-7.84129774018837779847 $\times 10^{-5}$	a_{19}	3.87550914036119403377 $\times 10^{-2}$	a_{35}	-8.60879523218579175379 $\times 10^{-2}$
a_4	5.95681635204407359968 $\times 10^{-4}$	a_{20}	1.68902644201020514342 $\times 10^{-1}$	a_{36}	-1.83293529834207661379 $\times 10^{-1}$
a_5	-3.35684727133355777034 $\times 10^{-3}$	a_{21}	-6.59360120703453588086 $\times 10^{-3}$	a_{37}	4.09558818250107769787 $\times 10^{-2}$
a_6	1.44689168264425470523 $\times 10^{-2}$	a_{22}	-1.55608657771591438191 $\times 10^{-1}$	a_{38}	1.17629788138707987142 $\times 10^{-1}$
a_7	-4.83911028810833125931 $\times 10^{-2}$	a_{23}	-4.77442000200362016075 $\times 10^{-2}$	a_{39}	-1.46100804404456848096 $\times 10^{-2}$
a_8	1.25680352632166187689 $\times 10^{-1}$	a_{24}	1.25751285821293971494 $\times 10^{-1}$	a_{40}	-5.79467838590122909214 $\times 10^{-2}$
a_9	-2.49631851945741996822 $\times 10^{-1}$	a_{25}	1.12467786075175327829 $\times 10^{-1}$	a_{41}	3.65075451113604565077 $\times 10^{-3}$
a_{10}	3.63057728926391930598 $\times 10^{-1}$	a_{26}	-6.43137765974453981904 $\times 10^{-2}$	a_{42}	2.12445410236989246237 $\times 10^{-2}$
a_{11}	-3.42699890886368421680 $\times 10^{-1}$	a_{27}	-1.69143489571720895613 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-5.58750217747141594455 $\times 10^{-4}$
a_{12}	1.13587473738569746514 $\times 10^{-1}$	a_{28}	-2.84659301228653750014 $\times 10^{-2}$	a_{44}	-5.46858289202037411286 $\times 10^{-3}$
a_{13}	1.80134330356196634752 $\times 10^{-1}$	a_{29}	1.97139368770020805005 $\times 10^{-1}$	a_{45}	3.53865979067513353216 $\times 10^{-5}$
a_{14}	-2.33380538321992470289 $\times 10^{-1}$	a_{30}	1.30184564958083230529 $\times 10^{-1}$	a_{46}	8.82457503924930343633 $\times 10^{-4}$
a_{15}	-2.27596908069279286896 $\times 10^{-2}$	a_{31}	-1.85420443282198211107 $\times 10^{-1}$	a_{47}	1.09422245178563676121 $\times 10^{-6}$
a_{16}	2.13556635815925465236 $\times 10^{-1}$	a_{32}	-2.04027435190610908436 $\times 10^{-1}$	a_{48}	-6.71823194676640358225 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{9}{7}$)					
a_0	1.16397080278203447603 $\times 10^{-9}$				
a_1	-4.78890844617478267110 $\times 10^{-8}$	a_{17}	-1.77754244091352007094 $\times 10^{-1}$	a_{33}	-1.17746440589144334609 $\times 10^{-1}$
a_2	9.37257795914017218728 $\times 10^{-7}$	a_{18}	1.41166959367186987495 $\times 10^{-1}$	a_{34}	-1.22915792362230797382 $\times 10^{-1}$
a_3	-1.15881811099217228535 $\times 10^{-5}$	a_{19}	1.20905870531954637213 $\times 10^{-1}$	a_{35}	7.70722489034745859136 $\times 10^{-2}$
a_4	1.01341819419804936484 $\times 10^{-4}$	a_{20}	-1.46154966503558637476 $\times 10^{-1}$	a_{36}	1.02407734594770178028 $\times 10^{-1}$
a_5	-6.64798580280794812764 $\times 10^{-4}$	a_{21}	-1.01796311554673183097 $\times 10^{-1}$	a_{37}	-4.11413957308952116218 $\times 10^{-2}$
a_6	3.38305998996499745826 $\times 10^{-3}$	a_{22}	1.29405334433200989382 $\times 10^{-1}$	a_{38}	-6.62617262318234902640 $\times 10^{-2}$
a_7	-1.36097201432347073475 $\times 10^{-2}$	a_{23}	1.10425014780376852214 $\times 10^{-1}$	a_{39}	1.73862805931007485327 $\times 10^{-2}$
a_8	4.36385411825092639005 $\times 10^{-2}$	a_{24}	-9.81985863598811926182 $\times 10^{-2}$	a_{40}	3.29588100240671473078 $\times 10^{-2}$
a_9	-1.11325507742513499095 $\times 10^{-1}$	a_{25}	-1.32950290087814733858 $\times 10^{-1}$	a_{41}	-5.58040585781284248591 $\times 10^{-3}$
a_{10}	2.22728200023745399662 $\times 10^{-1}$	a_{26}	5.12966285622434032433 $\times 10^{-2}$	a_{42}	-1.22143657082018217531 $\times 10^{-2}$
a_{11}	-3.37016440486140814604 $\times 10^{-1}$	a_{27}	1.55019573700973882339 $\times 10^{-1}$	a_{43}	1.27520928625942986758 $\times 10^{-3}$
a_{12}	3.52014615916534245783 $\times 10^{-1}$	a_{28}	8.65011187969674044143 $\times 10^{-3}$	a_{44}	3.18047989404765143203 $\times 10^{-3}$
a_{13}	-1.79027475013019705696 $\times 10^{-1}$	a_{29}	-1.63331691637071859086 $\times 10^{-1}$	a_{45}	-1.84466360147057676044 $\times 10^{-4}$
a_{14}	-1.08084635592532707768 $\times 10^{-1}$	a_{30}	-6.94045321977027546861 $\times 10^{-2}$	a_{46}	-5.19371503580952140469 $\times 10^{-4}$
a_{15}	2.49861320985889238840 $\times 10^{-1}$	a_{31}	1.50182629877904809432 $\times 10^{-1}$	a_{47}	1.26752843609501338350 $\times 10^{-5}$
a_{16}	-7.94387277365043791011 $\times 10^{-2}$	a_{32}	1.12219928380634550705 $\times 10^{-1}$	a_{48}	4.00197062286566130853 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{10}{7}$)					
a_0	1.18377451283216111651 $\times 10^{-10}$				
a_1	-5.41154062761414013992 $\times 10^{-9}$	a_{17}	1.57818429725404036085 $\times 10^{-1}$	a_{33}	8.37527708153886649441 $\times 10^{-2}$
a_2	1.18280816552066207118 $\times 10^{-7}$	a_{18}	1.05543200641163246038 $\times 10^{-1}$	a_{34}	9.15499886747720005280 $\times 10^{-2}$
a_3	-1.64286274619058126719 $\times 10^{-6}$	a_{19}	-1.95207790209061609429 $\times 10^{-1}$	a_{35}	-5.30603289956224879807 $\times 10^{-2}$
a_4	1.62521397198905787524 $\times 10^{-5}$	a_{20}	-1.96167859724077418108 $\times 10^{-2}$	a_{36}	-7.18016486275951745114 $\times 10^{-2}$
a_5	-1.21601850402413978717 $\times 10^{-4}$	a_{21}	1.82149830406699296864 $\times 10^{-1}$	a_{37}	2.79073125212499180817 $\times 10^{-2}$
a_6	7.12985777820652872238 $\times 10^{-4}$	a_{22}	-1.32842046964950827437 $\times 10^{-2}$	a_{38}	4.48017436869775949298 $\times 10^{-2}$
a_7	-3.34711386014576961258 $\times 10^{-3}$	a_{23}	-1.66083109723894571671 $\times 10^{-1}$	a_{39}	-1.17734857874433912707 $\times 10^{-2}$
a_8	1.27341763490291445014 $\times 10^{-2}$	a_{24}	1.15749866435288691781 $\times 10^{-2}$	a_{40}	-2.17773154479153124436 $\times 10^{-2}$
a_9	-3.94396839164169316407 $\times 10^{-2}$	a_{25}	1.56250696449808781406 $\times 10^{-1}$	a_{41}	3.81048268374261237701 $\times 10^{-3}$
a_{10}	9.91169251244976095257 $\times 10^{-2}$	a_{26}	1.08844622538086678086 $\times 10^{-2}$	a_{42}	7.95048656416551852088 $\times 10^{-3}$
a_{11}	-1.99433075582805175717 $\times 10^{-1}$	a_{27}	-1.48244048245887172611 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-8.85101613097723148245 $\times 10^{-4}$
a_{12}	3.11520319514790333284 $\times 10^{-1}$	a_{28}	-4.36078896205852152324 $\times 10^{-2}$	a_{44}	-2.04996287759584391916 $\times 10^{-3}$
a_{13}	-3.51590494867300551193 $\times 10^{-1}$	a_{29}	1.35193740920529841397 $\times 10^{-1}$	a_{45}	1.31019012700157703383 $\times 10^{-4}$
a_{14}	2.28079232196928001649 $\times 10^{-1}$	a_{30}	7.51192554708897853823 $\times 10^{-2}$	a_{46}	3.32630173704161308539 $\times 10^{-4}$
a_{15}	3.53602574392505023363 $\times 10^{-2}$	a_{31}	-1.13177790510993960917 $\times 10^{-1}$	a_{47}	-9.26653741523385225240 $\times 10^{-6}$
a_{16}	-2.34296441216778135379 $\times 10^{-1}$	a_{32}	-9.34769868187659878081 $\times 10^{-2}$	a_{48}	-2.55283328509856224109 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{11}{7}$)					
a_0	1.20391515849860585882 $\times 10^{-11}$				
a_1	-6.05397338835540316406 $\times 10^{-10}$	a_{17}	1.97699926632376194557 $\times 10^{-1}$	a_{33}	-4.53879045624941836852 $\times 10^{-2}$
a_2	1.46160214794345855305 $\times 10^{-8}$	a_{18}	-2.07377245557300336325 $\times 10^{-1}$	a_{34}	-8.53267389054653029027 $\times 10^{-2}$
a_3	-2.25302531471957201591 $\times 10^{-7}$	a_{19}	-2.09343356652582793745 $\times 10^{-2}$	a_{35}	2.60550820015380919238 $\times 10^{-2}$
a_4	2.48711287028810157556 $\times 10^{-6}$	a_{20}	1.99448809834169424503 $\times 10^{-1}$	a_{36}	6.08334704471868482477 $\times 10^{-2}$
a_5	-2.08986874258578088236 $\times 10^{-5}$	a_{21}	-7.89071100410277522480 $\times 10^{-2}$	a_{37}	-1.24239784481003859606 $\times 10^{-2}$
a_6	1.38661683471246808435 $\times 10^{-4}$	a_{22}	-1.51360573117977133747 $\times 10^{-1}$	a_{38}	-3.56115773182725441416 $\times 10^{-2}$
a_7	-7.43466874118794800837 $\times 10^{-4}$	a_{23}	1.14030422024178160048 $\times 10^{-1}$	a_{39}	4.74207343214868627339 $\times 10^{-3}$
a_8	3.26815704547114512362 $\times 10^{-3}$	a_{24}	1.17482167908270966515 $\times 10^{-1}$	a_{40}	1.65465893610577147026 $\times 10^{-2}$
a_9	-1.18718702532646563689 $\times 10^{-2}$	a_{25}	-1.17596559744639090789 $\times 10^{-1}$	a_{41}	-1.38160313427020336607 $\times 10^{-3}$
a_{10}	3.57146558711214125084 $\times 10^{-2}$	a_{26}	-1.04390617369473523126 $\times 10^{-1}$	a_{42}	-5.84246068938086793519 $\times 10^{-3}$
a_{11}	-8.86179079018818152059 $\times 10^{-2}$	a_{27}	1.07221370473036397628 $\times 10^{-1}$	a_{43}	2.86531294019930437924 $\times 10^{-4}$
a_{12}	1.79122847538497479301 $\times 10^{-1}$	a_{28}	1.04283869548788178678 $\times 10^{-1}$	a_{44}	1.46820275753408672703 $\times 10^{-3}$
a_{13}	-2.87198136980593803425 $\times 10^{-1}$	a_{29}	-8.95709936708653661988 $\times 10^{-2}$	a_{45}	-3.74224443733834587661 $\times 10^{-5}$
a_{14}	3.44667088595919114575 $\times 10^{-1}$	a_{30}	-1.06412921224487950476 $\times 10^{-1}$	a_{46}	-2.33407654077336615090 $\times 10^{-4}$
a_{15}	-2.63171124146658474098 $\times 10^{-1}$	a_{31}	6.78258355858445723807 $\times 10^{-2}$	a_{47}	2.29701975882430342046 $\times 10^{-6}$
a_{16}	3.20785926945538499949 $\times 10^{-2}$	a_{32}	1.01482311546741557139 $\times 10^{-1}$	a_{48}	1.76152627210513230717 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{12}{7}$)					
a_0	1.22439850024872071460 $\times 10^{-12}$				
a_1	-6.71670013116463179723 $\times 10^{-11}$	a_{17}	-9.13660340980423390839 $\times 10^{-2}$	a_{33}	-3.20876205002267349845 $\times 10^{-3}$
a_2	1.77512789537902698586 $\times 10^{-9}$	a_{18}	-1.49084768022325111687 $\times 10^{-1}$	a_{34}	7.93239681461528417953 $\times 10^{-2}$
a_3	-3.00702561892845288344 $\times 10^{-8}$	a_{19}	2.29678216159993046453 $\times 10^{-1}$	a_{35}	5.13900218688198054407 $\times 10^{-3}$
a_4	3.66399136316867733973 $\times 10^{-7}$	a_{20}	-5.93880791773555107053 $\times 10^{-2}$	a_{36}	-5.21934209702652033332 $\times 10^{-2}$
a_5	-3.41564107536970411104 $\times 10^{-6}$	a_{21}	-1.65620768103016624694 $\times 10^{-1}$	a_{37}	-4.50290650066323595384 $\times 10^{-3}$
a_6	2.52917171822708941318 $\times 10^{-5}$	a_{22}	1.50671231445088323166 $\times 10^{-1}$	a_{38}	2.87528743661968064614 $\times 10^{-2}$
a_7	-1.52407510489245264968 $\times 10^{-4}$	a_{23}	7.94420007846457266494 $\times 10^{-2}$	a_{39}	2.69956515310254403996 $\times 10^{-3}$
a_8	7.59398142232655057261 $\times 10^{-4}$	a_{24}	-1.66994457269240654181 $\times 10^{-1}$	a_{40}	-1.27477659486283540959 $\times 10^{-2}$
a_9	-3.16013196879984744407 $\times 10^{-3}$	a_{25}	-2.52324720094846331865 $\times 10^{-2}$	a_{41}	-1.14149160903589051669 $\times 10^{-3}$
a_{10}	1.10398249517669553456 $\times 10^{-2}$	a_{26}	1.57451582813025774927 $\times 10^{-1}$	a_{42}	4.33695954762946638848 $\times 10^{-3}$
a_{11}	-3.23977831685058268478 $\times 10^{-2}$	a_{27}	1.48321763883441614259 $\times 10^{-3}$	a_{43}	3.28923321309759583898 $\times 10^{-4}$
a_{12}	7.95083636847947479845 $\times 10^{-2}$	a_{28}	-1.42586413617586971727 $\times 10^{-1}$	a_{44}	-1.05738945750057872015 $\times 10^{-3}$
a_{13}	-1.61309576841091792095 $\times 10^{-1}$	a_{29}	3.80807665727392390074 $\times 10^{-3}$	a_{45}	-5.83196431363991171834 $\times 10^{-5}$
a_{14}	2.64345191006768160767 $\times 10^{-1}$	a_{30}	1.25760295324677369996 $\times 10^{-1}$	a_{46}	1.63900968208596112652 $\times 10^{-4}$
a_{15}	-3.33502816804280111769 $\times 10^{-1}$	a_{31}	-9.26902769532955760452 $\times 10^{-4}$	a_{47}	4.81695255873824607152 $\times 10^{-6}$
a_{16}	2.86818791967492498065 $\times 10^{-1}$	a_{32}	-1.04893642935126699304 $\times 10^{-1}$	a_{48}	-1.21048586759939541786 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{13}{7}$)					
a_0	1.24523019524197313716 $\times 10^{-13}$				
a_1	-7.40022733437230169036 $\times 10^{-12}$	a_{17}	-3.01306435816011939155 $\times 10^{-1}$	a_{33}	5.63188817325180382617 $\times 10^{-2}$
a_2	2.12492211279058013449 $\times 10^{-10}$	a_{18}	1.41497307590577644187 $\times 10^{-1}$	a_{34}	-5.34444669856096143054 $\times 10^{-2}$
a_3	-3.92357894006625748567 $\times 10^{-9}$	a_{19}	9.51474962021484792325 $\times 10^{-2}$	a_{35}	-3.72475798193843363240 $\times 10^{-2}$
a_4	5.23015640911078989428 $\times 10^{-8}$	a_{20}	-2.29274971688338429457 $\times 10^{-1}$	a_{36}	3.39898048446398605655 $\times 10^{-2}$
a_5	-5.35604905737627586528 $\times 10^{-7}$	a_{21}	1.25858941739143862412 $\times 10^{-1}$	a_{37}	2.10921856683808461983 $\times 10^{-2}$
a_6	4.37749608379590445616 $\times 10^{-6}$	a_{22}	1.08668561077385869331 $\times 10^{-1}$	a_{38}	-1.80947625632968246177 $\times 10^{-2}$
a_7	-2.92771882293445706616 $\times 10^{-5}$	a_{23}	-1.87132316667173837176 $\times 10^{-1}$	a_{39}	-9.71754737492688982262 $\times 10^{-3}$
a_8	1.62969499413630143204 $\times 10^{-4}$	a_{24}	5.23820966771634959100 $\times 10^{-3}$	a_{40}	7.77809786013732404854 $\times 10^{-3}$
a_9	-7.63621565060384886411 $\times 10^{-4}$	a_{25}	1.67634822647718832419 $\times 10^{-1}$	a_{41}	3.45063213612062923693 $\times 10^{-3}$
a_{10}	3.03319905148734966665 $\times 10^{-3}$	a_{26}	-6.58840667425635927732 $\times 10^{-2}$	a_{42}	-2.57593128037497645690 $\times 10^{-3}$
a_{11}	-1.02474602577026631232 $\times 10^{-2}$	a_{27}	-1.31656098187987976056 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-8.79011992181074275190 $\times 10^{-4}$
a_{12}	2.94346570721237818007 $\times 10^{-2}$	a_{28}	8.69226128511937546927 $\times 10^{-2}$	a_{44}	6.13641730925686500324 $\times 10^{-4}$
a_{13}	-7.15466643646425827600 $\times 10^{-2}$	a_{29}	1.01031966451746569134 $\times 10^{-1}$	a_{45}	1.42276759630034418361 $\times 10^{-4}$
a_{14}	1.45606134951361608648 $\times 10^{-1}$	a_{30}	-8.56073399503191555544 $\times 10^{-2}$	a_{46}	-9.32340963880490705058 $\times 10^{-5}$
a_{15}	-2.43071709516967818319 $\times 10^{-1}$	a_{31}	-7.70679832066386421196 $\times 10^{-2}$	a_{47}	-1.09578446148977290525 $\times 10^{-5}$
a_{16}	3.19673540059665270122 $\times 10^{-1}$	a_{32}	7.23448398788592988974 $\times 10^{-2}$	a_{48}	6.76716113859273059651 $\times 10^{-6}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{14}{7}$)					
a_0	1.26641622865236151455 $\times 10^{-14}$				
a_1	-8.10504922074006066308 $\times 10^{-13}$	a_{17}	-3.04280152972712293470 $\times 10^{-1}$	a_{33}	-8.27219008114946589274 $\times 10^{-2}$
a_2	2.51257085106983862004 $\times 10^{-11}$	a_{18}	3.08578694420539663679 $\times 10^{-1}$	a_{34}	-3.14742341654560647493 $\times 10^{-3}$
a_3	-5.02244612788504497841 $\times 10^{-10}$	a_{19}	-1.82524188526531878876 $\times 10^{-1}$	a_{35}	5.38815025452417604235 $\times 10^{-2}$
a_4	7.26997314198862450394 $\times 10^{-9}$	a_{20}	-4.04947596464419772608 $\times 10^{-2}$	a_{36}	3.63669720159337948827 $\times 10^{-4}$
a_5	-8.11222765509637615591 $\times 10^{-8}$	a_{21}	2.11555787831152546666 $\times 10^{-1}$	a_{37}	-2.96795563951926050696 $\times 10^{-2}$
a_6	7.25254682625094745163 $\times 10^{-7}$	a_{22}	-1.74512444183970002844 $\times 10^{-1}$	a_{38}	1.82627906579126662038 $\times 10^{-4}$
a_7	-5.32966617140026708614 $\times 10^{-6}$	a_{23}	-4.19423665990766594584 $\times 10^{-2}$	a_{39}	1.32841478733439966204 $\times 10^{-2}$
a_8	3.27664379938472085163 $\times 10^{-5}$	a_{24}	1.90663204586065914657 $\times 10^{-1}$	a_{40}	-1.32985202691211289999 $\times 10^{-4}$
a_9	-1.70608890434897834160 $\times 10^{-4}$	a_{25}	-8.17480689275699909044 $\times 10^{-2}$	a_{41}	-4.59517014222255113092 $\times 10^{-3}$
a_{10}	7.58588616211421117744 $\times 10^{-4}$	a_{26}	-1.29936410559321486037 $\times 10^{-1}$	a_{42}	4.46153836295735927505 $\times 10^{-5}$
a_{11}	-2.89476861850203185568 $\times 10^{-3}$	a_{27}	1.29102154296904872527 $\times 10^{-1}$	a_{43}	1.14450566880685759766 $\times 10^{-3}$
a_{12}	9.49951828822370296259 $\times 10^{-3}$	a_{28}	7.01235218828372940742 $\times 10^{-2}$	a_{44}	-8.80187995672056266097 $\times 10^{-6}$
a_{13}	-2.67798187612031959781 $\times 10^{-2}$	a_{29}	-1.30477082317955488589 $\times 10^{-1}$	a_{45}	-1.81757756533650220181 $\times 10^{-4}$
a_{14}	6.45458114315569984993 $\times 10^{-2}$	a_{30}	-3.15819770803325196658 $\times 10^{-2}$	a_{46}	9.31629321053810113195 $\times 10^{-7}$
a_{15}	-1.31701300990147125368 $\times 10^{-1}$	a_{31}	1.10720278996555170446 $\times 10^{-1}$	a_{47}	1.37757890748923767291 $\times 10^{-5}$
a_{16}	2.23386117664129841514 $\times 10^{-1}$	a_{32}	1.16340365645121802942 $\times 10^{-2}$	a_{48}	-3.51122945716412926030 $\times 10^{-8}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{15}{7}$)					
a_0	1.28797923349412162937 $\times 10^{-15}$				
a_1	-8.83184846579929776979 $\times 10^{-14}$	a_{17}	-2.05241255976066331815 $\times 10^{-1}$	a_{33}	3.95607108192234805157 $\times 10^{-2}$
a_2	2.93969047250856747225 $\times 10^{-12}$	a_{18}	2.88099940322686879988 $\times 10^{-1}$	a_{34}	6.72010337271565107592 $\times 10^{-2}$
a_3	-6.32439106739007077471 $\times 10^{-11}$	a_{19}	-3.10243275122725386169 $\times 10^{-1}$	a_{35}	-3.08729504033778611322 $\times 10^{-2}$
a_4	9.87856307851894361188 $\times 10^{-10}$	a_{20}	2.15010101204871580036 $\times 10^{-1}$	a_{36}	-3.98159282251305450809 $\times 10^{-2}$
a_5	-1.19292285192261391667 $\times 10^{-8}$	a_{21}	-1.18637830650103421634 $\times 10^{-2}$	a_{37}	1.85592656590061157191 $\times 10^{-2}$
a_6	1.15792570177519206518 $\times 10^{-7}$	a_{22}	-1.81442685831178032984 $\times 10^{-1}$	a_{38}	2.02691346030672751674 $\times 10^{-2}$
a_7	-9.27271912616697249702 $\times 10^{-7}$	a_{23}	2.04796286968317344280 $\times 10^{-1}$	a_{39}	-8.69326702353610995261 $\times 10^{-3}$
a_8	6.23851068852589472960 $\times 10^{-6}$	a_{24}	-2.52121974751631625458 $\times 10^{-2}$	a_{40}	-8.48698644500320105063 $\times 10^{-3}$
a_9	-3.57196250168217880442 $\times 10^{-5}$	a_{25}	-1.68089220124643670013 $\times 10^{-1}$	a_{41}	3.08298097584881948494 $\times 10^{-3}$
a_{10}	1.75647503209898489978 $\times 10^{-4}$	a_{26}	1.40318864264241194960 $\times 10^{-1}$	a_{42}	2.77090108523300191909 $\times 10^{-3}$
a_{11}	-7.46360875611475424524 $\times 10^{-4}$	a_{27}	7.06674284956828334960 $\times 10^{-2}$	a_{43}	-7.78946718607447439131 $\times 10^{-4}$
a_{12}	2.75023439154186524209 $\times 10^{-3}$	a_{28}	-1.60152000097388019942 $\times 10^{-1}$	a_{44}	-6.55582405392815699416 $\times 10^{-4}$
a_{13}	-8.79784546560045426203 $\times 10^{-3}$	a_{29}	1.09999366666139068007 $\times 10^{-3}$	a_{45}	1.24778434975669065683 $\times 10^{-4}$
a_{14}	2.43950864074543594113 $\times 10^{-2}$	a_{30}	1.36130748376881030028 $\times 10^{-1}$	a_{46}	9.93672512195103087718 $\times 10^{-5}$
a_{15}	-5.83580175591144019733 $\times 10^{-2}$	a_{31}	-3.41603543605769602584 $\times 10^{-2}$	a_{47}	-9.50943535502579425803 $\times 10^{-6}$
a_{16}	1.19340660553771090847 $\times 10^{-1}$	a_{32}	-1.00795480745199956374 $\times 10^{-1}$	a_{48}	-7.21376075445319762412 $\times 10^{-6}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{16}{7}$)					
a_0	1.30971928779734451377 $\times 10^{-16}$				
a_1	-9.58096903522240619289 $\times 10^{-15}$	a_{17}	-1.08314662766685296497 $\times 10^{-1}$	a_{33}	6.29382567879379967716 $\times 10^{-2}$
a_2	3.40823270626026990544 $\times 10^{-13}$	a_{18}	1.88556685429672537401 $\times 10^{-1}$	a_{34}	-7.35388218015863123708 $\times 10^{-2}$
a_3	-7.85144059163975534912 $\times 10^{-12}$	a_{19}	-2.71673454065688968489 $\times 10^{-1}$	a_{35}	-3.20910069916162121905 $\times 10^{-2}$
a_4	1.31618479542544194907 $\times 10^{-10}$	a_{20}	3.07630956685650561677 $\times 10^{-1}$	a_{36}	4.98026867835220647070 $\times 10^{-2}$
a_5	-1.71015418156651273769 $\times 10^{-9}$	a_{21}	-2.39813126824600313290 $\times 10^{-1}$	a_{37}	1.42452723594668564215 $\times 10^{-2}$
a_6	1.79098618549467545211 $\times 10^{-8}$	a_{22}	5.99833222790578436134 $\times 10^{-2}$	a_{38}	-2.73816282878772423948 $\times 10^{-2}$
a_7	-1.55211942935112929411 $\times 10^{-7}$	a_{23}	1.43346207364881264306 $\times 10^{-1}$	a_{39}	-5.33759723136453797826 $\times 10^{-3}$
a_8	1.13401499728774015563 $\times 10^{-6}$	a_{24}	-2.17743188152550261967 $\times 10^{-1}$	a_{40}	1.20144195477599207580 $\times 10^{-2}$
a_9	-7.07949627832534309056 $\times 10^{-6}$	a_{25}	8.58850554163188494101 $\times 10^{-2}$	a_{41}	1.60460967815609986935 $\times 10^{-3}$
a_{10}	3.81314976150754624804 $\times 10^{-5}$	a_{26}	1.26477749634508905697 $\times 10^{-1}$	a_{42}	-4.04358750778903212676 $\times 10^{-3}$
a_{11}	-1.78424801173529876773 $\times 10^{-4}$	a_{27}	-1.75451748700379846638 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-3.58696822056911136127 $\times 10^{-4}$
a_{12}	7.28646813582198153651 $\times 10^{-4}$	a_{28}	-2.23129708923002287286 $\times 10^{-3}$	a_{44}	9.77284053969107054730 $\times 10^{-4}$
a_{13}	-2.60350840293089660978 $\times 10^{-3}$	a_{29}	1.58231399815819904614 $\times 10^{-1}$	a_{45}	5.24628334933068763885 $\times 10^{-5}$
a_{14}	8.14244740199698571549 $\times 10^{-3}$	a_{30}	-6.82870366042253265254 $\times 10^{-2}$	a_{46}	-1.50538157213490949764 $\times 10^{-4}$
a_{15}	-2.22481067297748609282 $\times 10^{-2}$	a_{31}	-1.08221958711033997296 $\times 10^{-1}$	a_{47}	-3.73578253244377326921 $\times 10^{-6}$
a_{16}	5.28649448869462549677 $\times 10^{-2}$	a_{32}	8.61465974221283189214 $\times 10^{-2}$	a_{48}	1.10731072433386063222 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{17}{7}$)					
a_0	1.33334108012318896115 $\times 10^{-17}$				
a_1	-1.03364620510737622475 $\times 10^{-15}$	a_{17}	-4.79673358100215930078 $\times 10^{-2}$	a_{33}	-1.02330859617262518239 $\times 10^{-1}$
a_2	3.91781600850101170360 $\times 10^{-14}$	a_{18}	9.84447865910064152149 $\times 10^{-2}$	a_{34}	-2.25920079193943177851 $\times 10^{-2}$
a_3	-9.63352122833634187944 $\times 10^{-13}$	a_{19}	-1.7325600854920435924 $\times 10^{-1}$	a_{35}	7.08081852635126961778 $\times 10^{-2}$
a_4	1.72428530082309053704 $\times 10^{-11}$	a_{20}	2.55397609206330868963 $\times 10^{-1}$	a_{36}	2.77556895603063668678 $\times 10^{-3}$
a_5	-2.39711583419479311586 $\times 10^{-10}$	a_{21}	-3.01723639773764587812 $\times 10^{-1}$	a_{37}	-3.90908305136390258739 $\times 10^{-2}$
a_6	2.69451429410491326301 $\times 10^{-9}$	a_{22}	2.57787400401178164479 $\times 10^{-1}$	a_{38}	2.55685945280542035186 $\times 10^{-3}$
a_7	-2.51313679676971924869 $\times 10^{-8}$	a_{23}	-1.03144621501797895676 $\times 10^{-1}$	a_{39}	1.71780208964759252523 $\times 10^{-2}$
a_8	1.98104503884612548154 $\times 10^{-7}$	a_{24}	-1.00501763843597868403 $\times 10^{-1}$	a_{40}	-2.22963303201008534223 $\times 10^{-3}$
a_9	-1.33864836921443834063 $\times 10^{-6}$	a_{25}	2.16720930180965016178 $\times 10^{-1}$	a_{41}	-5.80330385587056007185 $\times 10^{-3}$
a_{10}	7.83585306180862970776 $\times 10^{-6}$	a_{26}	-1.36986254245316794543 $\times 10^{-1}$	a_{42}	9.87239422567253970840 $\times 10^{-4}$
a_{11}	-4.00225506178069462793 $\times 10^{-5}$	a_{27}	-7.62433846436324362205 $\times 10^{-2}$	a_{43}	1.41258636209970783786 $\times 10^{-3}$
a_{12}	1.79277618220209524747 $\times 10^{-4}$	a_{28}	1.89241795343195004976 $\times 10^{-1}$	a_{44}	-2.75756441531706914054 $\times 10^{-4}$
a_{13}	-7.06812236824566038870 $\times 10^{-4}$	a_{29}	-5.82155883779583341463 $\times 10^{-2}$	a_{45}	-2.19809418709565665038 $\times 10^{-4}$
a_{14}	2.45734618072725969013 $\times 10^{-3}$	a_{30}	-1.34301193849702029042 $\times 10^{-1}$	a_{46}	4.62565540381461398859 $\times 10^{-5}$
a_{15}	-7.53256951632511165675 $\times 10^{-3}$	a_{31}	1.10140047796745690758 $\times 10^{-1}$	a_{47}	1.63721919585524330487 $\times 10^{-5}$
a_{16}	2.03118532311518213372 $\times 10^{-2}$	a_{32}	6.66961680484982630069 $\times 10^{-2}$	a_{48}	-3.58834355869416126458 $\times 10^{-6}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{18}{7}$)					
a_0	1.36919717912276565000 $\times 10^{-18}$				
a_1	-1.13056429351771545930 $\times 10^{-16}$	a_{17}	-1.85654004435388416459 $\times 10^{-2}$	a_{33}	-2.69035170471437007903 $\times 10^{-2}$
a_2	4.45736569320793658766 $\times 10^{-15}$	a_{18}	4.35916612851882805465 $\times 10^{-2}$	a_{34}	1.13454158652914889341 $\times 10^{-1}$
a_3	-1.16093145995340883145 $\times 10^{-13}$	a_{19}	-8.95685103040591640764 $\times 10^{-2}$	a_{35}	-6.56949011336996337486 $\times 10^{-3}$
a_4	2.22796898814152800740 $\times 10^{-12}$	a_{20}	1.59201226915822606933 $\times 10^{-1}$	a_{36}	-6.95299857886859273530 $\times 10^{-2}$
a_5	-3.30570596432449001267 $\times 10^{-11}$	a_{21}	-2.39599662223540268053 $\times 10^{-1}$	a_{37}	1.24900752163048543300 $\times 10^{-2}$
a_6	3.95495776513029988446 $\times 10^{-10}$	a_{22}	2.93572116869405288216 $\times 10^{-1}$	a_{38}	3.46344243576043401698 $\times 10^{-2}$
a_7	-3.94586747811978379366 $\times 10^{-9}$	a_{23}	-2.69632320789043995276 $\times 10^{-1}$	a_{39}	-8.09730130333412682238 $\times 10^{-3}$
a_8	3.34379038043179055331 $\times 10^{-8}$	a_{24}	1.40100593335630363068 $\times 10^{-1}$	a_{40}	-1.39035451158851032507 $\times 10^{-2}$
a_9	-2.43262418095062770337 $\times 10^{-7}$	a_{25}	5.50052565609046780689 $\times 10^{-2}$	a_{41}	3.34193070711936958337 $\times 10^{-3}$
a_{10}	1.53569081836413411760 $\times 10^{-6}$	a_{26}	-2.01979234145952827658 $\times 10^{-1}$	a_{42}	4.33435747768804304335 $\times 10^{-3}$
a_{11}	-8.49521608109319275313 $\times 10^{-6}$	a_{27}	1.78047246334943631451 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-9.17483943593033203550 $\times 10^{-4}$
a_{12}	4.14226979600760885799 $\times 10^{-5}$	a_{28}	1.76393829076607899170 $\times 10^{-2}$	a_{44}	-9.81907875857281771670 $\times 10^{-4}$
a_{13}	-1.78552447296400258493 $\times 10^{-4}$	a_{29}	-1.86927609976749772702 $\times 10^{-1}$	a_{45}	1.54462978649994256193 $\times 10^{-4}$
a_{14}	6.82051163805137832326 $\times 10^{-4}$	a_{30}	1.16279655245763290502 $\times 10^{-1}$	a_{46}	1.43228810690512625893 $\times 10^{-4}$
a_{15}	-2.31338671145478731614 $\times 10^{-3}$	a_{31}	1.00255156602375582734 $\times 10^{-1}$	a_{47}	-1.21506396341247190442 $\times 10^{-5}$
a_{16}	6.96574262076980796389 $\times 10^{-3}$	a_{32}	-1.44236858392820365465 $\times 10^{-1}$	a_{48}	-1.00605481522934378079 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{19}{7}$)			
a_0	1.10838952400434962119 $\times 10^{-19}$		
a_1	-1.24586622806877306944 $\times 10^{-17}$	a_{17}	-6.44044794458528191088 $\times 10^{-3}$
a_2	5.41670033562458576502 $\times 10^{-16}$	a_{18}	1.69880296653634442880 $\times 10^{-2}$
a_3	-1.38154088157745370935 $\times 10^{-14}$	a_{19}	-3.96670068603366750520 $\times 10^{-2}$
a_4	2.76061029801357238802 $\times 10^{-13}$	a_{20}	8.15693755395838699711 $\times 10^{-2}$
a_5	-4.48289876241099201963 $\times 10^{-12}$	a_{21}	-1.46321408232927743699 $\times 10^{-1}$
a_6	5.75006968455007975611 $\times 10^{-11}$	a_{22}	2.24389012911737718969 $\times 10^{-1}$
a_7	-6.03892361554472925060 $\times 10^{-10}$	a_{23}	-2.83720872638515909238 $\times 10^{-1}$
a_8	5.44436200472256715968 $\times 10^{-9}$	a_{24}	2.76556838657437556817 $\times 10^{-1}$
a_9	-4.26502539447322817138 $\times 10^{-8}$	a_{25}	-1.71317769502026362880 $\times 10^{-1}$
a_{10}	2.89673664790376452850 $\times 10^{-7}$	a_{26}	-1.01182560274388222291 $\times 10^{-2}$
a_{11}	-1.72028749151305652984 $\times 10^{-6}$	a_{27}	1.78006391033658163227 $\times 10^{-1}$
a_{12}	9.04959680063166092730 $\times 10^{-6}$	a_{28}	-2.05234427497483060035 $\times 10^{-1}$
a_{13}	-4.23803363527791537729 $\times 10^{-5}$	a_{29}	3.96237112739046757718 $\times 10^{-2}$
a_{14}	1.76559862559744567623 $\times 10^{-4}$	a_{30}	1.65107457037280757489 $\times 10^{-1}$
a_{15}	-6.55208036196671545067 $\times 10^{-4}$	a_{31}	-1.58236642657311698008 $\times 10^{-1}$
a_{16}	2.17291393749000242515 $\times 10^{-3}$	a_{32}	-5.12239989981951714657 $\times 10^{-2}$
		a_{33}	1.54267134562379434346 $\times 10^{-1}$
		a_{34}	-2.02892539855788285674 $\times 10^{-2}$
		a_{35}	-1.01568820041698752890 $\times 10^{-1}$
		a_{36}	3.81438206360396298349 $\times 10^{-2}$
		a_{37}	5.16455137261760799764 $\times 10^{-2}$
		a_{38}	-2.85541260356928170063 $\times 10^{-2}$
		a_{39}	-2.07576375473004763812 $\times 10^{-2}$
		a_{40}	1.43776222986263208460 $\times 10^{-2}$
		a_{41}	6.44615719791513878330 $\times 10^{-3}$
		a_{42}	-5.17794322472492494298 $\times 10^{-3}$
		a_{43}	-1.45669434052490161100 $\times 10^{-3}$
		a_{44}	1.29477121895623314624 $\times 10^{-3}$
		a_{45}	2.12775412503598552918 $\times 10^{-4}$
		a_{46}	-2.02757924406731147140 $\times 10^{-4}$
		a_{47}	-1.50315226252923432520 $\times 10^{-5}$
		a_{48}	1.50171558403506231357 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{20}{7}$)			
a_0	2.08781266682821191663 $\times 10^{-20}$		
a_1	1.84002400043743464741 $\times 10^{-18}$	a_{17}	-2.03110226154617452373 $\times 10^{-3}$
a_2	4.88130277555345460216 $\times 10^{-17}$	a_{18}	5.94835407652761722824 $\times 10^{-3}$
a_3	-2.95076174843803055903 $\times 10^{-15}$	a_{19}	-1.55968821835815349535 $\times 10^{-2}$
a_4	3.73726081283845078564 $\times 10^{-14}$	a_{20}	3.61729142360287641350 $\times 10^{-2}$
a_5	-4.35930744260333038098 $\times 10^{-13}$	a_{21}	-7.41754086735498799974 $\times 10^{-2}$
a_6	7.88302573164809288685 $\times 10^{-12}$	a_{22}	1.34357460828137215304 $\times 10^{-1}$
a_7	-9.98240663006566706343 $\times 10^{-11}$	a_{23}	-2.10507796645507341212 $\times 10^{-1}$
a_8	8.78054602930169355552 $\times 10^{-10}$	a_{24}	2.73313587891283656938 $\times 10^{-1}$
a_9	-6.92685666941164286509 $\times 10^{-9}$	a_{25}	-2.77423106830026080664 $\times 10^{-1}$
a_{10}	5.22443293999105169897 $\times 10^{-8}$	a_{26}	1.95181575792806387747 $\times 10^{-1}$
a_{11}	-3.41163557106153368588 $\times 10^{-7}$	a_{27}	-3.75840206835407542376 $\times 10^{-2}$
a_{12}	1.89489028628223246043 $\times 10^{-6}$	a_{28}	-1.43027722531370882705 $\times 10^{-1}$
a_{13}	-9.42746564528952378867 $\times 10^{-6}$	a_{29}	2.29307907624061290838 $\times 10^{-1}$
a_{14}	4.28634960015089091818 $\times 10^{-5}$	a_{30}	-1.00298569341000698798 $\times 10^{-1}$
a_{15}	-1.74289489217376953275 $\times 10^{-4}$	a_{31}	-1.45941387621185175154 $\times 10^{-1}$
a_{16}	6.27802370987072894855 $\times 10^{-4}$	a_{32}	1.96302163472770654506 $\times 10^{-1}$
		a_{33}	1.94359621399034246168 $\times 10^{-2}$
		a_{34}	-1.61183456416661665404 $\times 10^{-1}$
		a_{35}	3.90383777535117458433 $\times 10^{-2}$
		a_{36}	9.23539081507776911011 $\times 10^{-2}$
		a_{37}	-4.05000021404720038535 $\times 10^{-2}$
		a_{38}	-4.08467289393641917577 $\times 10^{-2}$
		a_{39}	2.30921776661640050464 $\times 10^{-2}$
		a_{40}	1.42014581862828809743 $\times 10^{-2}$
		a_{41}	-8.92005618313701178030 $\times 10^{-3}$
		a_{42}	-3.79863752471607763179 $\times 10^{-3}$
		a_{43}	2.34118905390600749517 $\times 10^{-3}$
		a_{44}	7.38259062938494630266 $\times 10^{-4}$
		a_{45}	-3.80952117729031241291 $\times 10^{-4}$
		a_{46}	-9.28456703025353238976 $\times 10^{-5}$
		a_{47}	2.91662482679018493634 $\times 10^{-5}$
		a_{48}	5.66483828337500656540 $\times 10^{-6}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{21}{7}$)			
a_0	3.18549678364201814378 $\times 10^{-20}$		
a_1	-8.81448948859912327271 $\times 10^{-19}$	a_{17}	-6.01730652910577527443 $\times 10^{-4}$
a_2	-3.23274824027187780722 $\times 10^{-17}$	a_{18}	1.89606915800582359295 $\times 10^{-3}$
a_3	1.19362994274515299337 $\times 10^{-16}$	a_{19}	-5.47982876209626742510 $\times 10^{-3}$
a_4	1.26445928536760821129 $\times 10^{-14}$	a_{20}	1.43240812811321312148 $\times 10^{-2}$
a_5	-1.18218945799314943542 $\times 10^{-13}$	a_{21}	-3.30915879136779990657 $\times 10^{-2}$
a_6	4.20953304816168497380 $\times 10^{-13}$	a_{22}	6.75742246055404312777 $\times 10^{-2}$
a_7	-1.08705171832039602642 $\times 10^{-11}$	a_{23}	-1.23132620949505862447 $\times 10^{-1}$
a_8	1.66615609337844261301 $\times 10^{-10}$	a_{24}	1.96866742119397176044 $\times 10^{-1}$
a_9	-1.27998378513465491483 $\times 10^{-9}$	a_{25}	-2.62933803549242414611 $\times 10^{-1}$
a_{10}	8.35301491283844819958 $\times 10^{-9}$	a_{26}	2.76746945908645199177 $\times 10^{-1}$
a_{11}	-6.07175372418896973740 $\times 10^{-8}$	a_{27}	-2.11983248289456202307 $\times 10^{-1}$
a_{12}	3.94593166992227177778 $\times 10^{-7}$	a_{28}	7.71139026122805876067 $\times 10^{-2}$
a_{13}	-2.07499772404597631334 $\times 10^{-6}$	a_{29}	1.00092541991638694157 $\times 10^{-1}$
a_{14}	9.68698867498085015104 $\times 10^{-6}$	a_{30}	-2.30354024172014530766 $\times 10^{-1}$
a_{15}	-4.27415611295419062126 $\times 10^{-5}$	a_{31}	1.58726458568609884271 $\times 10^{-1}$
a_{16}	1.71176035276515687753 $\times 10^{-4}$	a_{32}	9.79513769546466730839 $\times 10^{-2}$
		a_{33}	-2.23584849211081850389 $\times 10^{-1}$
		a_{34}	3.89043400226010822231 $\times 10^{-2}$
		a_{35}	1.57247205696744331196 $\times 10^{-1}$
		a_{36}	-8.01805356462278541652 $\times 10^{-2}$
		a_{37}	-7.70814110450085325545 $\times 10^{-2}$
		a_{38}	6.09407062985691518477 $\times 10^{-2}$
		a_{39}	2.82974699028654687738 $\times 10^{-2}$
		a_{40}	-3.05322008287095437785 $\times 10^{-2}$
		a_{41}	-7.77504775866096836365 $\times 10^{-3}$
		a_{42}	1.08625237044865836059 $\times 10^{-2}$
		a_{43}	1.52487252149640071036 $\times 10^{-3}$
		a_{44}	-2.67940682115865300253 $\times 10^{-3}$
		a_{45}	-1.91026264196047346152 $\times 10^{-4}$
		a_{46}	4.14358154717172020136 $\times 10^{-4}$
		a_{47}	1.14842818451754491218 $\times 10^{-5}$
		a_{48}	-3.0369489094006524852 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{22}{7}$)					
a_0	-3.86490764329514803835 $\times 10^{-20}$				
a_1	-5.04156465810758884107 $\times 10^{-18}$	a_{17}	-1.78362968952318732415 $\times 10^{-4}$	a_{33}	-8.58585246473952558528 $\times 10^{-2}$
a_2	4.83869383789384059862 $\times 10^{-17}$	a_{18}	5.86170628055816485772 $\times 10^{-4}$	a_{34}	2.49762561268859422068 $\times 10^{-1}$
a_3	2.03246876976459464588 $\times 10^{-15}$	a_{19}	-1.70002287261182555679 $\times 10^{-3}$	a_{35}	-4.69982734834404892986 $\times 10^{-2}$
a_4	-9.23538022360635084701 $\times 10^{-15}$	a_{20}	4.98674814686463108989 $\times 10^{-3}$	a_{36}	-1.53984918461657488927 $\times 10^{-1}$
a_5	-2.61364745632414813158 $\times 10^{-13}$	a_{21}	-1.34910215231491450664 $\times 10^{-2}$	a_{37}	7.09064862774634458119 $\times 10^{-2}$
a_6	9.54163191488826691920 $\times 10^{-13}$	a_{22}	3.05714779488082557459 $\times 10^{-2}$	a_{38}	6.57806049423569874335 $\times 10^{-2}$
a_7	1.26102881393478763245 $\times 10^{-11}$	a_{23}	-6.03681050215162453284 $\times 10^{-2}$	a_{39}	-4.41868848887966052966 $\times 10^{-2}$
a_8	-1.44537772225657735875 $\times 10^{-11}$	a_{24}	1.11942680406857159547 $\times 10^{-1}$	a_{40}	-2.04391741985000616454 $\times 10^{-2}$
a_9	-6.77576568539466634047 $\times 10^{-10}$	a_{25}	-1.87710365056429446177 $\times 10^{-1}$	a_{41}	1.75878592173111235245 $\times 10^{-2}$
a_{10}	2.52071144223356223708 $\times 10^{-9}$	a_{26}	2.54537707274938113287 $\times 10^{-1}$	a_{42}	4.52244760444953551269 $\times 10^{-3}$
a_{11}	-8.92395687519875073302 $\times 10^{-10}$	a_{27}	-2.64177504157567808565 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-4.65074737982795979939 $\times 10^{-3}$
a_{12}	5.57599049653329242392 $\times 10^{-8}$	a_{28}	2.18753535889773189736 $\times 10^{-1}$	a_{44}	-6.55715192296601833003 $\times 10^{-4}$
a_{13}	-5.77339273269911134088 $\times 10^{-7}$	a_{29}	-1.31373174259529028148 $\times 10^{-1}$	a_{45}	7.55007249943275485789 $\times 10^{-4}$
a_{14}	2.40444874495318775599 $\times 10^{-6}$	a_{30}	-4.54310781175904419531 $\times 10^{-2}$	a_{46}	5.08422081483474234741 $\times 10^{-5}$
a_{15}	-8.46925566230374954215 $\times 10^{-6}$	a_{31}	2.51510112382881171544 $\times 10^{-1}$	a_{47}	-5.74307158260097533234 $\times 10^{-5}$
a_{16}	4.07708895233420244379 $\times 10^{-5}$	a_{32}	-2.21026111887765242024 $\times 10^{-1}$	a_{48}	-1.01206667752366250330 $\times 10^{-6}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{23}{7}$)					
a_0	-5.39630854040827010975 $\times 10^{-20}$				
a_1	2.55730410213769657603 $\times 10^{-18}$	a_{17}	-3.32592348065462738124 $\times 10^{-5}$	a_{33}	2.89223616461002259718 $\times 10^{-1}$
a_2	6.80235162237172585177 $\times 10^{-17}$	a_{18}	1.83234390897767961203 $\times 10^{-4}$	a_{34}	2.18745933191362202283 $\times 10^{-2}$
a_3	-1.07690898395503590171 $\times 10^{-15}$	a_{19}	-6.02946370933249820832 $\times 10^{-4}$	a_{35}	-2.76988461072918176947 $\times 10^{-1}$
a_4	-1.41540661115687848163 $\times 10^{-14}$	a_{20}	1.53340921650089996554 $\times 10^{-3}$	a_{36}	1.04257958250048706108 $\times 10^{-1}$
a_5	1.33719683447496818385 $\times 10^{-13}$	a_{21}	-4.37089047543258140015 $\times 10^{-3}$	a_{37}	1.52702552827193187610 $\times 10^{-1}$
a_6	1.20475685388281993594 $\times 10^{-12}$	a_{22}	1.26017973363731373347 $\times 10^{-2}$	a_{38}	-1.02042869687713228307 $\times 10^{-1}$
a_7	-8.31246903834408727616 $\times 10^{-12}$	a_{23}	-2.89138560496407698608 $\times 10^{-2}$	a_{39}	-5.80688521834459311240 $\times 10^{-2}$
a_8	-4.93109352201852202440 $\times 10^{-11}$	a_{24}	5.45113946535978853096 $\times 10^{-2}$	a_{40}	5.56442879327677835647 $\times 10^{-2}$
a_9	2.46833521054504579704 $\times 10^{-10}$	a_{25}	-9.97843886447544833932 $\times 10^{-2}$	a_{41}	1.57364896972741884606 $\times 10^{-2}$
a_{10}	1.68713233272891057802 $\times 10^{-9}$	a_{26}	1.76351804158893572835 $\times 10^{-1}$	a_{42}	-2.04136973828517222133 $\times 10^{-2}$
a_{11}	-8.18405822784221168026 $\times 10^{-9}$	a_{27}	-2.50368342649781087067 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-2.93605105588275476067 $\times 10^{-3}$
a_{12}	-1.24178156921849814558 $\times 10^{-8}$	a_{28}	2.58025922879008976691 $\times 10^{-1}$	a_{44}	5.07036251891328658811 $\times 10^{-3}$
a_{13}	1.25268671818359974232 $\times 10^{-8}$	a_{29}	-2.12723418448493061812 $\times 10^{-1}$	a_{45}	3.38587884261462188193 $\times 10^{-4}$
a_{14}	7.99076812925031608234 $\times 10^{-7}$	a_{30}	1.62043909907936713435 $\times 10^{-1}$	a_{46}	-7.80693097842281357583 $\times 10^{-4}$
a_{15}	-3.38068718563000044627 $\times 10^{-6}$	a_{31}	-2.31893515855634769745 $\times 10^{-2}$	a_{47}	-1.80529923559998101114 $\times 10^{-5}$
a_{16}	7.09397786352030152636 $\times 10^{-6}$	a_{32}	-2.28925965323980578309 $\times 10^{-1}$	a_{48}	5.66686524400387517563 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{24}{7}$)					
a_0	8.86073622677284841664 $\times 10^{-20}$				
a_1	9.61497700145087936064 $\times 10^{-18}$	a_{17}	1.52816696905008705738 $\times 10^{-5}$	a_{33}	2.78749523584049498122 $\times 10^{-1}$
a_2	-1.08511214587961501968 $\times 10^{-16}$	a_{18}	5.89798937089372045906 $\times 10^{-6}$	a_{34}	-3.64528380949266990454 $\times 10^{-1}$
a_3	-3.91884032666371302034 $\times 10^{-15}$	a_{19}	-3.15630756285421068795 $\times 10^{-4}$	a_{35}	-4.53826398389680379857 $\times 10^{-2}$
a_4	2.21993887959092928325 $\times 10^{-14}$	a_{20}	7.23376796163235153867 $\times 10^{-4}$	a_{36}	3.04957574602414802908 $\times 10^{-1}$
a_5	4.77090451420411259421 $\times 10^{-13}$	a_{21}	-7.58854368869282618584 $\times 10^{-4}$	a_{37}	-7.61284642115739649154 $\times 10^{-2}$
a_6	-1.81005844664052031400 $\times 10^{-12}$	a_{22}	3.35568934445811249404 $\times 10^{-3}$	a_{38}	-1.51736368089823816442 $\times 10^{-1}$
a_7	-2.75241220284297622581 $\times 10^{-11}$	a_{23}	-1.41568386087835267823 $\times 10^{-2}$	a_{39}	6.97188443171949248422 $\times 10^{-2}$
a_8	7.94347123768292828815 $\times 10^{-11}$	a_{24}	2.89192631035731494988 $\times 10^{-2}$	a_{40}	5.15568034096824051934 $\times 10^{-2}$
a_9	9.09295793935718934375 $\times 10^{-10}$	a_{25}	-4.19298575832813710309 $\times 10^{-2}$	a_{41}	-3.18884691689426286278 $\times 10^{-2}$
a_{10}	-2.08274167538264696548 $\times 10^{-9}$	a_{26}	8.46195851483858593774 $\times 10^{-2}$	a_{42}	-1.21281726230891845243 $\times 10^{-2}$
a_{11}	-1.99654572784111269066 $\times 10^{-8}$	a_{27}	-1.83679435097868914673 $\times 10^{-1}$	a_{43}	9.01002247500604576512 $\times 10^{-3}$
a_{12}	4.10493811441311954372 $\times 10^{-8}$	a_{28}	2.54207581981170593050 $\times 10^{-1}$	a_{44}	1.86049511851291904415 $\times 10^{-3}$
a_{13}	2.75990058725071079599 $\times 10^{-7}$	a_{29}	-2.14039160747202597143 $\times 10^{-1}$	a_{45}	-1.51367754670359232043 $\times 10^{-3}$
a_{14}	-4.07359407340616210490 $\times 10^{-7}$	a_{30}	1.89551365470434495091 $\times 10^{-1}$	a_{46}	-1.57467376912816598275 $\times 10^{-4}$
a_{15}	-3.65662204314707910256 $\times 10^{-6}$	a_{31}	-2.47814477686533797958 $\times 10^{-1}$	a_{47}	1.17233284269013022460 $\times 10^{-4}$
a_{16}	7.23767175909770025743 $\times 10^{-6}$	a_{32}	1.08781499476920715925 $\times 10^{-1}$	a_{48}	4.38724136765583369580 $\times 10^{-6}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{25}{7}$)			
a_0	1.02227789680435617950 $\times 10^{-19}$		
a_1	-4.43278187012975661966 $\times 10^{-18}$	a_{17}	-1.90209306556624283751 $\times 10^{-5}$
a_2	-1.2888147349842333247 $\times 10^{-16}$	a_{18}	-3.51788604433832290844 $\times 10^{-5}$
a_3	1.86457791316953009797 $\times 10^{-15}$	a_{19}	6.94969971741185414508 $\times 10^{-5}$
a_4	2.70129235422556139494 $\times 10^{-14}$	a_{20}	4.09805000697443017029 $\times 10^{-4}$
a_5	-2.34947720164714365448 $\times 10^{-13}$	a_{21}	-1.07075199819888610642 $\times 10^{-3}$
a_6	-2.25148361991571833535 $\times 10^{-12}$	a_{22}	2.65554240537320041427 $\times 10^{-4}$
a_7	1.40250469881931002799 $\times 10^{-11}$	a_{23}	-1.51614257456074918173 $\times 10^{-3}$
a_8	9.97545965015845529875 $\times 10^{-11}$	a_{24}	1.44313527663552377091 $\times 10^{-2}$
a_9	-4.85792409832312642661 $\times 10^{-10}$	a_{25}	-3.17115674671185171249 $\times 10^{-2}$
a_{10}	-2.70647043270358278856 $\times 10^{-9}$	a_{26}	3.48786630484318816945 $\times 10^{-2}$
a_{11}	1.08040270923783918701 $\times 10^{-8}$	a_{27}	-6.39123019755795732401 $\times 10^{-2}$
a_{12}	5.00146436857707703442 $\times 10^{-8}$	a_{28}	1.77004108711420686352 $\times 10^{-1}$
a_{13}	-1.72121623169367517136 $\times 10^{-7}$	a_{29}	-2.7034599587226592229 $\times 10^{-1}$
a_{14}	-6.26266308855802041158 $\times 10^{-7}$	a_{30}	2.02567407226939132630 $\times 10^{-1}$
a_{15}	1.82054210705305017071 $\times 10^{-6}$	a_{31}	-1.44454028822938446723 $\times 10^{-1}$
a_{16}	6.74104357188890535280 $\times 10^{-6}$	a_{32}	2.67631412451673555024 $\times 10^{-1}$
		a_{33}	-2.15101179414504837714 $\times 10^{-1}$
		a_{34}	-2.33380850416337933015 $\times 10^{-1}$
		a_{35}	4.49811243571922179500 $\times 10^{-1}$
		a_{36}	-3.14833751919198280003 $\times 10^{-2}$
		a_{37}	-3.36189249147018314491 $\times 10^{-1}$
		a_{38}	1.32048080959631034091 $\times 10^{-1}$
		a_{39}	1.52941137018974843521 $\times 10^{-1}$
		a_{40}	-9.47541417602480626606 $\times 10^{-2}$
		a_{41}	-4.71287946039280815012 $\times 10^{-2}$
		a_{42}	3.92776862323712793526 $\times 10^{-2}$
		a_{43}	9.81315547881298142025 $\times 10^{-3}$
		a_{44}	-1.04047424716534966797 $\times 10^{-2}$
		a_{45}	-1.26438208080643068983 $\times 10^{-3}$
		a_{46}	1.66121800966234582494 $\times 10^{-3}$
		a_{47}	7.67230686414426701471 $\times 10^{-5}$
		a_{48}	-1.23162130083495349242 $\times 10^{-4}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{26}{7}$)			
a_0	-1.57093667319622599096 $\times 10^{-19}$		
a_1	-2.25788015312876227360 $\times 10^{-17}$	a_{17}	-6.01933881705042555072 $\times 10^{-5}$
a_2	1.91980221795299869807 $\times 10^{-16}$	a_{18}	6.64860623659958178157 $\times 10^{-5}$
a_3	9.18149573526842079938 $\times 10^{-15}$	a_{19}	3.64318736872231667259 $\times 10^{-4}$
a_4	-3.91977742468979631288 $\times 10^{-14}$	a_{20}	-3.34611753932403737882 $\times 10^{-4}$
a_5	-1.11600161298144033870 $\times 10^{-12}$	a_{21}	-1.99524728000925057441 $\times 10^{-3}$
a_6	3.19911815134842648271 $\times 10^{-12}$	a_{22}	2.21517361553633034005 $\times 10^{-3}$
a_7	6.41516634752417266302 $\times 10^{-11}$	a_{23}	5.95359039618627105106 $\times 10^{-3}$
a_8	-1.39324184924622051102 $\times 10^{-10}$	a_{24}	-2.97275323032059070911 $\times 10^{-3}$
a_9	-2.12953491696754608279 $\times 10^{-9}$	a_{25}	-3.25064474255687061731 $\times 10^{-2}$
a_{10}	3.75085011063516212553 $\times 10^{-9}$	a_{26}	4.19302760220473019938 $\times 10^{-2}$
a_{11}	4.56315795468959637782 $\times 10^{-8}$	a_{27}	1.61412697152788621949 $\times 10^{-2}$
a_{12}	-6.80372920971294260524 $\times 10^{-8}$	a_{28}	2.80612844548002263833 $\times 10^{-2}$
a_{13}	-6.78593976420637639212 $\times 10^{-7}$	a_{29}	-2.61251663483548055403 $\times 10^{-1}$
a_{14}	8.88912322183827707584 $\times 10^{-7}$	a_{30}	3.14444654776823876009 $\times 10^{-1}$
a_{15}	7.30724102366163378698 $\times 10^{-6}$	a_{31}	-4.10454765010880425755 $\times 10^{-2}$
a_{16}	-8.47093214986363269344 $\times 10^{-6}$	a_{32}	5.79442645381627937775 $\times 10^{-2}$
		a_{33}	-4.83394225560636023455 $\times 10^{-1}$
		a_{34}	3.61098821539457605824 $\times 10^{-1}$
		a_{35}	4.01161106931118456279 $\times 10^{-1}$
		a_{36}	-5.60184725695115625360 $\times 10^{-1}$
		a_{37}	-8.57959170511136602190 $\times 10^{-2}$
		a_{38}	3.80518909563408372060 $\times 10^{-1}$
		a_{39}	-4.67695150650479265647 $\times 10^{-2}$
		a_{40}	-1.61115634844755859102 $\times 10^{-1}$
		a_{41}	4.13278398455051433944 $\times 10^{-2}$
		a_{42}	4.62652963867804249408 $\times 10^{-2}$
		a_{43}	-1.46766266014434627323 $\times 10^{-2}$
		a_{44}	-8.92838723139026390036 $\times 10^{-3}$
		a_{45}	2.77015944679080471055 $\times 10^{-3}$
		a_{46}	1.05679651186795038563 $\times 10^{-3}$
		a_{47}	-2.29644927262829530437 $\times 10^{-4}$
		a_{48}	-5.82042733023956992837 $\times 10^{-5}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{27}{7}$)			
a_0	-2.91878564810542744533 $\times 10^{-19}$		
a_1	3.25383943247105813760 $\times 10^{-18}$	a_{17}	1.47390387275016168190 $\times 10^{-5}$
a_2	3.65479990151954315120 $\times 10^{-16}$	a_{18}	1.25564573521036273783 $\times 10^{-4}$
a_3	-1.36788783447904383753 $\times 10^{-15}$	a_{19}	-1.07081079089170687986 $\times 10^{-4}$
a_4	-7.61191985161363288223 $\times 10^{-14}$	a_{20}	-7.05464406659561476403 $\times 10^{-4}$
a_5	1.73675168630499560793 $\times 10^{-13}$	a_{21}	5.45300205070385476798 $\times 10^{-4}$
a_6	6.30902809414800453336 $\times 10^{-12}$	a_{22}	3.38857776022687495436 $\times 10^{-3}$
a_7	-1.05359631338740995017 $\times 10^{-11}$	a_{23}	-3.06771533382235548411 $\times 10^{-3}$
a_8	-2.77820943554839136778 $\times 10^{-10}$	a_{24}	-1.05974042663497682593 $\times 10^{-2}$
a_9	3.72782730785010484710 $\times 10^{-10}$	a_{25}	6.26795248562055331442 $\times 10^{-3}$
a_{10}	7.52513270679529514745 $\times 10^{-9}$	a_{26}	4.35196638062580971536 $\times 10^{-2}$
a_{11}	-8.60361676471811909338 $\times 10^{-9}$	a_{27}	-4.86844484557376403660 $\times 10^{-2}$
a_{12}	-1.36893252637080666313 $\times 10^{-7}$	a_{28}	-4.37684849770032531513 $\times 10^{-2}$
a_{13}	1.38824907958222418052 $\times 10^{-7}$	a_{29}	-1.81224431352537937069 $\times 10^{-3}$
a_{14}	1.77401334570869013353 $\times 10^{-6}$	a_{30}	2.89535519240899788126 $\times 10^{-1}$
a_{15}	-1.65187254218034859202 $\times 10^{-6}$	a_{31}	-3.40750929754638906528 $\times 10^{-1}$
a_{16}	-1.70112985894935138073 $\times 10^{-5}$	a_{32}	-1.21571465852458048056 $\times 10^{-2}$
		a_{33}	9.14040587509588489597 $\times 10^{-4}$
		a_{34}	5.29567567764767800264 $\times 10^{-1}$
		a_{35}	-4.63285267138928861129 $\times 10^{-1}$
		a_{36}	-3.67270589984482419288 $\times 10^{-1}$
		a_{37}	6.16425315362007260408 $\times 10^{-1}$
		a_{38}	2.15396305228174875600 $\times 10^{-2}$
		a_{39}	-3.79530853019476654384 $\times 10^{-1}$
		a_{40}	8.84282103239841792384 $\times 10^{-2}$
		a_{41}	1.43115662104210563453 $\times 10^{-1}$
		a_{42}	-5.68214886983377271925 $\times 10^{-2}$
		a_{43}	-3.48207236567379827436 $\times 10^{-2}$
		a_{44}	1.82027443158274604287 $\times 10^{-2}$
		a_{45}	5.13092214268592564765 $\times 10^{-3}$
		a_{46}	-3.22639528295595026876 $\times 10^{-3}$
		a_{47}	-3.53147885042919352604 $\times 10^{-4}$
		a_{48}	2.54862817683145023422 $\times 10^{-4}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{28}{9}$)					
a_0	1.26913280178746373023 $\times 10^{-19}$				
a_1	5.38848816762345245829 $\times 10^{-17}$	a_{17}	1.45072714231150295307 $\times 10^{-4}$	a_{33}	5.37138504052225120530 $\times 10^{-1}$
a_2	-1.55430102183906991694 $\times 10^{-16}$	a_{18}	-6.27204567965349113209 $\times 10^{-5}$	a_{34}	-1.82289025728053111012 $\times 10^{-1}$
a_3	-2.19351928097252029583 $\times 10^{-14}$	a_{19}	-9.16922990539131202893 $\times 10^{-4}$	a_{35}	-1.08224368572325644112 $\times 10^{+0}$
a_4	3.19724165848679661263 $\times 10^{-14}$	a_{20}	3.87025675737722873856 $\times 10^{-4}$	a_{36}	6.86627876529241724098 $\times 10^{-1}$
a_5	2.66994299918260428459 $\times 10^{-12}$	a_{21}	4.54737068461150877372 $\times 10^{-3}$	a_{37}	7.73265984475119700336 $\times 10^{-1}$
a_6	-2.64251509554628746150 $\times 10^{-12}$	a_{22}	-1.84962672957623973249 $\times 10^{-3}$	a_{38}	-7.65354983853921773084 $\times 10^{-1}$
a_7	-1.53748890432704954327 $\times 10^{-10}$	a_{23}	-1.82349617466024799002 $\times 10^{-2}$	a_{39}	-2.65407012447778153462 $\times 10^{-1}$
a_8	1.17140845975674346058 $\times 10^{-10}$	a_{24}	7.94303126061093714853 $\times 10^{-3}$	a_{40}	4.37368700083162815516 $\times 10^{-1}$
a_9	5.11424293864679473637 $\times 10^{-9}$	a_{25}	5.68425307547398177985 $\times 10^{-2}$	a_{41}	3.83297807257831992279 $\times 10^{-2}$
a_{10}	-3.22412010184930259325 $\times 10^{-9}$	a_{26}	-2.15385276843063475692 $\times 10^{-2}$	a_{42}	-1.56127751616441328205 $\times 10^{-1}$
a_{11}	-1.09891538738054275573 $\times 10^{-7}$	a_{27}	-1.58823116525978194739 $\times 10^{-1}$	a_{43}	3.83620102475475923966 $\times 10^{-3}$
a_{12}	6.01735728442222311635 $\times 10^{-8}$	a_{28}	8.47437195615951578182 $\times 10^{-2}$	a_{44}	3.61292448803275319744 $\times 10^{-2}$
a_{13}	1.63737966394498536662 $\times 10^{-6}$	a_{29}	2.8325982045395706034 $\times 10^{-1}$	a_{45}	-2.33616971871565790370 $\times 10^{-3}$
a_{14}	-8.07047125991706365202 $\times 10^{-7}$	a_{30}	-8.16378224837706974634 $\times 10^{-2}$	a_{46}	-5.06691972121955887516 $\times 10^{-3}$
a_{15}	-1.77580918432361523475 $\times 10^{-5}$	a_{31}	-6.69660956430568497763 $\times 10^{-1}$	a_{47}	2.73734747153514273829 $\times 10^{-4}$
a_{16}	8.11292398516529307557 $\times 10^{-6}$	a_{32}	4.60388605568153479532 $\times 10^{-1}$	a_{48}	3.31811774414157938198 $\times 10^{-4}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{29}{7}$)					
a_0	1.12127955746601933510 $\times 10^{-18}$				
a_1	3.75700371718746806799 $\times 10^{-17}$	a_{17}	8.55803731138781788319 $\times 10^{-5}$	a_{33}	-1.23894982101929404585 $\times 10^{-1}$
a_2	-1.36634954831810984480 $\times 10^{-15}$	a_{18}	-4.01937280942951994912 $\times 10^{-4}$	a_{34}	-8.52638251522048014184 $\times 10^{-1}$
a_3	-1.52082168487234183449 $\times 10^{-14}$	a_{19}	-5.13378865506503654413 $\times 10^{-4}$	a_{35}	-1.43971767755402366165 $\times 10^{-1}$
a_4	2.77499543153980748891 $\times 10^{-13}$	a_{20}	2.27924593260074866639 $\times 10^{-3}$	a_{36}	1.34157573849406121151 $\times 10^{+0}$
a_5	1.83439658941578266096 $\times 10^{-12}$	a_{21}	2.38828771970655630822 $\times 10^{-3}$	a_{37}	-4.47958494713151627758 $\times 10^{-1}$
a_6	-2.24714154399116182251 $\times 10^{-11}$	a_{22}	-1.02621597957558708361 $\times 10^{-2}$	a_{38}	-8.75924923564914766721 $\times 10^{-1}$
a_7	-1.04292746377655360164 $\times 10^{-10}$	a_{23}	-8.76261698867841473288 $\times 10^{-3}$	a_{39}	5.77591656412481069858 $\times 10^{-1}$
a_8	9.68562122422342656258 $\times 10^{-10}$	a_{24}	3.73974753347681003052 $\times 10^{-2}$	a_{40}	2.77088207199271286197 $\times 10^{-1}$
a_9	3.41123834462738335314 $\times 10^{-9}$	a_{25}	2.45882276814746834476 $\times 10^{-2}$	a_{41}	-3.07201208508950062185 $\times 10^{-1}$
a_{10}	-2.57231029861148441664 $\times 10^{-8}$	a_{26}	-1.08690582290990727436 $\times 10^{-1}$	a_{42}	-3.24088435028966103516 $\times 10^{-2}$
a_{11}	-7.17436195317808343013 $\times 10^{-8}$	a_{27}	-5.83729286223657453478 $\times 10^{-2}$	a_{43}	9.22214487674560828261 $\times 10^{-2}$
a_{12}	4.59677854713694219922 $\times 10^{-7}$	a_{28}	2.71066595953279492296 $\times 10^{-1}$	a_{44}	-6.57063041703308681120 $\times 10^{-3}$
a_{13}	1.04069557439148332595 $\times 10^{-6}$	a_{29}	7.60475141192043968534 $\times 10^{-2}$	a_{45}	-1.57016433899756657223 $\times 10^{-2}$
a_{14}	-5.85865329845260975569 $\times 10^{-6}$	a_{30}	-4.84559524948711191592 $\times 10^{-1}$	a_{46}	2.79016977169642544800 $\times 10^{-3}$
a_{15}	-1.09166254015560980498 $\times 10^{-5}$	a_{31}	-1.67738174282270464088 $\times 10^{-1}$	a_{47}	1.20242451947546032515 $\times 10^{-3}$
a_{16}	5.54740922391535252183 $\times 10^{-5}$	a_{32}	9.39509602691060121066 $\times 10^{-1}$	a_{48}	-3.00232393503435355518 $\times 10^{-4}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{30}{7}$)					
a_0	5.58307105577353396793 $\times 10^{-19}$				
a_1	-8.91356368688831001719 $\times 10^{-17}$	a_{17}	-2.64977255890276315245 $\times 10^{-4}$	a_{33}	-1.84301336528539978071 $\times 10^{+0}$
a_2	-6.88333166931756633017 $\times 10^{-16}$	a_{18}	-1.80804989857109019137 $\times 10^{-4}$	a_{34}	2.35227904350651394252 $\times 10^{-1}$
a_3	3.66554550704851511102 $\times 10^{-14}$	a_{19}	1.70134247226127402149 $\times 10^{-3}$	a_{35}	1.84401038140267300620 $\times 10^{+0}$
a_4	1.40759451594848005169 $\times 10^{-13}$	a_{20}	9.69342345828383290449 $\times 10^{-4}$	a_{36}	-5.42797700104077991170 $\times 10^{-2}$
a_5	-4.50941007783546573160 $\times 10^{-12}$	a_{21}	-8.61827767305482339744 $\times 10^{-3}$	a_{37}	-2.17098629296178123858 $\times 10^{+0}$
a_6	-1.14207188292190340889 $\times 10^{-11}$	a_{22}	-4.05046209981855953427 $\times 10^{-3}$	a_{38}	6.86901556193617968623 $\times 10^{-1}$
a_7	2.62591690936796726281 $\times 10^{-10}$	a_{23}	3.49200800044300221284 $\times 10^{-2}$	a_{39}	1.35867620127020672185 $\times 10^{+0}$
a_8	4.90686038465497476222 $\times 10^{-10}$	a_{24}	1.33061325932480306030 $\times 10^{-2}$	a_{40}	-7.26245897566643395837 $\times 10^{-1}$
a_9	-8.83817331502709329446 $\times 10^{-9}$	a_{25}	-1.14610823085850187209 $\times 10^{-1}$	a_{41}	-4.88342899950723730521 $\times 10^{-1}$
a_{10}	-1.29178576041021230254 $\times 10^{-8}$	a_{26}	-3.34259347960215650457 $\times 10^{-2}$	a_{42}	3.60123599032283235440 $\times 10^{-1}$
a_{11}	1.92289116879765138306 $\times 10^{-7}$	a_{27}	3.04654602567406406012 $\times 10^{-1}$	a_{43}	1.06029951618831674723 $\times 10^{-1}$
a_{12}	2.27402771025372172289 $\times 10^{-7}$	a_{28}	6.78119147990033614804 $\times 10^{-2}$	a_{44}	-1.03205259555300838760 $\times 10^{-1}$
a_{13}	-2.90336266168240019392 $\times 10^{-6}$	a_{29}	-6.74142514362229039845 $\times 10^{-1}$	a_{45}	-1.31165534880302680406 $\times 10^{-2}$
a_{14}	-2.83443669492206742645 $\times 10^{-6}$	a_{30}	-7.24299710610816922547 $\times 10^{-2}$	a_{46}	1.68931179392780330432 $\times 10^{-2}$
a_{15}	3.19363069601583341233 $\times 10^{-5}$	a_{31}	1.16236438738896051775 $\times 10^{+0}$	a_{47}	7.09540684828832191987 $\times 10^{-4}$
a_{16}	2.60193267058768840322 $\times 10^{-5}$	a_{32}	1.13808090357763184405 $\times 10^{-1}$	a_{48}	-1.24695738687239896923 $\times 10^{-3}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{31}{7}$)					
a_0	-2.26168750764301678394 $\times 10^{-18}$				
a_1	-2.28326402723173750711 $\times 10^{-16}$	a_{17}	-5.61111279600846104636 $\times 10^{-4}$	a_{33}	-2.22991892221202221418 $\times 10^{+0}$
a_2	2.74500224169970693247 $\times 10^{-15}$	a_{18}	8.23607215156371822029 $\times 10^{-4}$	a_{34}	2.75905875569884257878 $\times 10^{+0}$
a_3	9.22143944022288748219 $\times 10^{-14}$	a_{19}	3.47744086807581192551 $\times 10^{-3}$	a_{35}	2.03124204532353605079 $\times 10^{+0}$
a_4	-5.56061111313968208446 $\times 10^{-13}$	a_{20}	-4.71567348285749977758 $\times 10^{-3}$	a_{36}	-2.73123598553517054167 $\times 10^{+0}$
a_5	-1.11282093609537880934 $\times 10^{-11}$	a_{21}	-1.69229620893010735698 $\times 10^{-2}$	a_{37}	-1.83603318962438857775 $\times 10^{+0}$
a_6	4.49750392723324751680 $\times 10^{-11}$	a_{22}	2.15230891494081562886 $\times 10^{-2}$	a_{38}	2.80781947247606645123 $\times 10^{+0}$
a_7	6.34818433192556296121 $\times 10^{-10}$	a_{23}	6.55220300114546911990 $\times 10^{-2}$	a_{39}	5.30431758184046343210 $\times 10^{-1}$
a_8	-1.93886308201218444351 $\times 10^{-9}$	a_{24}	-7.92722771854559765254 $\times 10^{-2}$	a_{40}	-1.64556071145355710463 $\times 10^{+0}$
a_9	-2.08987613631966919444 $\times 10^{-8}$	a_{25}	-2.03698975768237431423 $\times 10^{-1}$	a_{41}	8.59626771269658000800 $\times 10^{-2}$
a_{10}	5.15735868877975946136 $\times 10^{-8}$	a_{26}	2.37967425593033453115 $\times 10^{-1}$	a_{42}	5.69046976966441587154 $\times 10^{-1}$
a_{11}	4.43930852227574960297 $\times 10^{-7}$	a_{27}	5.10349219920720523465 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-9.44867222212905899496 $\times 10^{-2}$
a_{12}	-9.24416343926656839767 $\times 10^{-7}$	a_{28}	-5.83724182205689737724 $\times 10^{-1}$	a_{44}	-1.20063006841313152640 $\times 10^{-1}$
a_{13}	-6.53034504414610392254 $\times 10^{-6}$	a_{29}	-1.03638591140291775374 $\times 10^{+0}$	a_{45}	2.43736810767679304907 $\times 10^{-2}$
a_{14}	1.18354484114668403573 $\times 10^{-5}$	a_{30}	1.18730638670226465360 $\times 10^{+0}$	a_{46}	1.45172203956796281888 $\times 10^{-2}$
a_{15}	6.98053332048283879523 $\times 10^{-5}$	a_{31}	1.66892457417268128597 $\times 10^{+0}$	a_{47}	-2.33933073052371213154 $\times 10^{-3}$
a_{16}	-1.12758823901271774745 $\times 10^{-4}$	a_{32}	-1.93261638799660250190 $\times 10^{+0}$	a_{48}	-7.72911383558160407037 $\times 10^{-4}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{32}{7}$)					
a_0	-4.03179333430547456666 $\times 10^{-18}$				
a_1	-3.52676838016951272409 $\times 10^{-18}$	a_{17}	4.56878394252166166459 $\times 10^{-5}$	a_{33}	1.68653021158191787471 $\times 10^{+0}$
a_2	4.95035594603081795799 $\times 10^{-15}$	a_{18}	1.45667962103045824825 $\times 10^{-3}$	a_{34}	3.10248310531165334567 $\times 10^{+0}$
a_3	1.27916327578299242910 $\times 10^{-15}$	a_{19}	-3.93023856293715955683 $\times 10^{-4}$	a_{35}	-2.50055183864076581431 $\times 10^{+0}$
a_4	-1.01146836004888534189 $\times 10^{-12}$	a_{20}	-8.17747854709344510868 $\times 10^{-3}$	a_{36}	-2.72008370189720949734 $\times 10^{+0}$
a_5	-1.0957336221117006419 $\times 10^{-13}$	a_{21}	2.57451942576342686267 $\times 10^{-3}$	a_{37}	2.52513791165917740546 $\times 10^{+0}$
a_6	8.22738537931020752913 $\times 10^{-11}$	a_{22}	3.63863027117477849598 $\times 10^{-2}$	a_{38}	2.17223293838879436035 $\times 10^{+0}$
a_7	2.03134046229322259605 $\times 10^{-12}$	a_{23}	-1.31602846682840582741 $\times 10^{-2}$	a_{39}	-2.63334378276893067901 $\times 10^{+0}$
a_8	-3.55642200292350396984 $\times 10^{-9}$	a_{24}	-1.29785456909304183596 $\times 10^{-1}$	a_{40}	-5.73913841612376116952 $\times 10^{-1}$
a_9	1.31860264385269034357 $\times 10^{-10}$	a_{25}	5.33793156815520633674 $\times 10^{-2}$	a_{41}	1.46729341029811251494 $\times 10^{+0}$
a_{10}	9.45689644471046456037 $\times 10^{-8}$	a_{26}	3.73917177430834567767 $\times 10^{-1}$	a_{42}	-1.13474957605784642113 $\times 10^{-1}$
a_{11}	-8.43901303291841598971 $\times 10^{-9}$	a_{27}	-1.74071559034178220699 $\times 10^{-1}$	a_{43}	-4.54065506984851676558 $\times 10^{-1}$
a_{12}	-1.68910792885708229595 $\times 10^{-6}$	a_{28}	-8.72745978782720531054 $\times 10^{-1}$	a_{44}	1.07766775495080223581 $\times 10^{-1}$
a_{13}	2.30780148423933920518 $\times 10^{-7}$	a_{29}	4.57924980874304495674 $\times 10^{-1}$	a_{45}	7.74787336173891108277 $\times 10^{-2}$
a_{14}	2.14761051656973430205 $\times 10^{-5}$	a_{30}	1.65425606059231700474 $\times 10^{+0}$	a_{46}	-2.66460023550604480164 $\times 10^{-2}$
a_{15}	-3.90097545433624894931 $\times 10^{-6}$	a_{31}	-9.88942134071675188230 $\times 10^{-1}$	a_{47}	-5.83296245212712134594 $\times 10^{-3}$
a_{16}	-2.02428633044629299622 $\times 10^{-4}$	a_{32}	-2.50596273566395010339 $\times 10^{+0}$	a_{48}	2.47366436403923535289 $\times 10^{-3}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{33}{7}$)					
a_0	-2.53842824493719543645 $\times 10^{-19}$				
a_1	5.71658619641016243580 $\times 10^{-16}$	a_{17}	1.54124645981241259135 $\times 10^{-3}$	a_{33}	8.15071527287170107876 $\times 10^{+0}$
a_2	3.06604557438201383070 $\times 10^{-16}$	a_{18}	-9.10270626304319997962 $\times 10^{-5}$	a_{34}	-2.55676379107552684921 $\times 10^{+0}$
a_3	-2.32710636800253575270 $\times 10^{-13}$	a_{19}	-9.73228187441743128960 $\times 10^{-3}$	a_{35}	-9.20612422463855655817 $\times 10^{+0}$
a_4	-5.87459226006583057150 $\times 10^{-14}$	a_{20}	8.09326181939780980344 $\times 10^{-4}$	a_{36}	3.52166929904626819220 $\times 10^{+0}$
a_5	2.83288977104651930083 $\times 10^{-11}$	a_{21}	4.83927097029933186347 $\times 10^{-2}$	a_{37}	7.95814670505726797729 $\times 10^{+0}$
a_6	4.22604007741804643129 $\times 10^{-12}$	a_{22}	-5.219536260836445347 $\times 10^{-3}$	a_{38}	-3.47807203570593905840 $\times 10^{+0}$
a_7	-1.63164297487318065881 $\times 10^{-9}$	a_{23}	-1.92139621076523008767 $\times 10^{-1}$	a_{39}	-5.62454293673603370264 $\times 10^{+0}$
a_8	-1.48242867661366153288 $\times 10^{-10}$	a_{24}	2.57190330551860862354 $\times 10^{-2}$	a_{40}	3.27309097237516163191 $\times 10^{+0}$
a_9	5.42873081442273028918 $\times 10^{-8}$	a_{25}	6.15250217325603976337 $\times 10^{-1}$	a_{41}	2.26664105115570456293 $\times 10^{+0}$
a_{10}	2.72667886885904663382 $\times 10^{-9}$	a_{26}	-9.95841552688241485492 $\times 10^{-2}$	a_{42}	-1.72623271725663091090 $\times 10^{+0}$
a_{11}	-1.16677548791056689121 $\times 10^{-6}$	a_{27}	-1.59934363485331903326 $\times 10^{+0}$	a_{43}	-5.12400982709609901484 $\times 10^{-1}$
a_{12}	-2.11304071540940371355 $\times 10^{-8}$	a_{28}	3.08419219221066381111 $\times 10^{-1}$	a_{44}	5.15145347466673423596 $\times 10^{-1}$
a_{13}	1.73889568509477824368 $\times 10^{-5}$	a_{29}	3.38573537254137679979 $\times 10^{+0}$	a_{45}	6.11806524899429671785 $\times 10^{-2}$
a_{14}	-1.65744888740406055537 $\times 10^{-7}$	a_{30}	-7.70098387031316671083 $\times 10^{-1}$	a_{46}	-8.52387967135445076725 $\times 10^{-2}$
a_{15}	-1.88610223533479946550 $\times 10^{-4}$	a_{31}	-5.84025531469037028884 $\times 10^{+0}$	a_{47}	-2.89189566716464285737 $\times 10^{-3}$
a_{16}	6.56792206353368377331 $\times 10^{-6}$	a_{32}	1.57020991659198731028 $\times 10^{+0}$	a_{48}	6.23094880759489506883 $\times 10^{-3}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{34}{7}$)					
a_0	1.35883330931699899908 $\times 10^{-17}$				
a_1	1.10004110669742350675 $\times 10^{-15}$	a_{17}	2.59366232892283981218 $\times 10^{-3}$	a_{33}	9.04574579951502162001 $\times 10^{+0}$
a_2	-1.64290366694254763233 $\times 10^{-14}$	a_{18}	-4.65762766589528564340 $\times 10^{-3}$	a_{34}	-1.26600395376182922108 $\times 10^{+1}$
a_3	-4.42564194518337041732 $\times 10^{-13}$	a_{19}	-1.59475038354124050833 $\times 10^{-2}$	a_{35}	-8.89884690933056006154 $\times 10^{+0}$
a_4	3.31350282889653321347 $\times 10^{-12}$	a_{20}	2.63482861843639717329 $\times 10^{-2}$	a_{36}	1.34153796847263684696 $\times 10^{+1}$
a_5	5.31886332901340516401 $\times 10^{-11}$	a_{21}	7.69172341668110366825 $\times 10^{-2}$	a_{37}	6.32528924808653078331 $\times 10^{+0}$
a_6	-2.66667380020048442188 $\times 10^{-10}$	a_{22}	-1.18600458390090770174 $\times 10^{-1}$	a_{38}	-1.10040873020079986303 $\times 10^{+1}$
a_7	-3.02084030702117398352 $\times 10^{-9}$	a_{23}	-2.94805715464213959075 $\times 10^{-1}$	a_{39}	-3.13731961238534075802 $\times 10^{+0}$
a_8	1.14311537624313361336 $\times 10^{-8}$	a_{24}	4.29967488222827184213 $\times 10^{-1}$	a_{40}	7.21904835034735048607 $\times 10^{+0}$
a_9	9.89752370300673994618 $\times 10^{-8}$	a_{25}	9.05693629617630851800 $\times 10^{-1}$	a_{41}	1.61988451568940969168 $\times 10^{-1}$
a_{10}	-3.02128983469673865373 $\times 10^{-7}$	a_{26}	-1.26627300437593364838 $\times 10^{+0}$	a_{42}	-2.80601148303902968167 $\times 10^{+0}$
a_{11}	-2.09152192342746275698 $\times 10^{-6}$	a_{27}	-2.240704921666361989625 $\times 10^{+0}$	a_{43}	3.48528630576738364386 $\times 10^{-1}$
a_{12}	5.37639330883805781927 $\times 10^{-6}$	a_{28}	3.04601893355423170800 $\times 10^{+0}$	a_{44}	6.26672931953323529535 $\times 10^{-1}$
a_{13}	3.05916284318309905752 $\times 10^{-5}$	a_{29}	4.46631708293897776399 $\times 10^{+0}$	a_{45}	-1.15833683900075238811 $\times 10^{-1}$
a_{14}	-6.82734500160249822084 $\times 10^{-5}$	a_{30}	-5.99865402163271053729 $\times 10^{+0}$	a_{46}	-7.55519386138315759046 $\times 10^{-2}$
a_{15}	-3.24945870045378909038 $\times 10^{-4}$	a_{31}	-7.14160313027751858562 $\times 10^{+0}$	a_{47}	1.22840878135597846300 $\times 10^{-2}$
a_{16}	6.44442632318017138003 $\times 10^{-4}$	a_{32}	9.66610491225745652421 $\times 10^{+0}$	a_{48}	3.75353148344963653298 $\times 10^{-3}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{35}{7}$)					
a_0	2.10739148127899322346 $\times 10^{-17}$				
a_1	1.51615126779283562329 $\times 10^{-17}$	a_{17}	-2.35986710243914998475 $\times 10^{-4}$	a_{33}	-7.62322915253804407711 $\times 10^{+0}$
a_2	-2.57385909684450777927 $\times 10^{-14}$	a_{18}	-7.21838981307502633067 $\times 10^{-3}$	a_{34}	-1.39208300749083829573 $\times 10^{+1}$
a_3	-5.31705095415893722579 $\times 10^{-15}$	a_{19}	1.99214748538817399475 $\times 10^{-3}$	a_{35}	1.04317698349663027695 $\times 10^{+1}$
a_4	5.23104103781712597369 $\times 10^{-12}$	a_{20}	4.02109911395090799942 $\times 10^{-2}$	a_{36}	1.29712792281924837728 $\times 10^{+1}$
a_5	4.03859409116627559794 $\times 10^{-13}$	a_{21}	-1.28347755451987298394 $\times 10^{-2}$	a_{37}	-1.14287364306671868913 $\times 10^{+1}$
a_6	-4.23204341940641769338 $\times 10^{-10}$	a_{22}	-1.77424931555815094603 $\times 10^{-1}$	a_{38}	-8.81962286762845499066 $\times 10^{+0}$
a_7	-1.03917495556637777111 $\times 10^{-12}$	a_{23}	6.45682157463300325116 $\times 10^{-2}$	a_{39}	9.54540213210229010231 $\times 10^{+0}$
a_8	1.81926872192673195269 $\times 10^{-8}$	a_{24}	6.27077776315005430389 $\times 10^{-1}$	a_{40}	4.11853460855327216995 $\times 10^{+0}$
a_9	-9.88146687777282026140 $\times 10^{-10}$	a_{25}	-2.57750746851854578446 $\times 10^{-1}$	a_{41}	-6.28022951363763026462 $\times 10^{+0}$
a_{10}	-4.81001668563190969630 $\times 10^{-7}$	a_{26}	-1.78829500715905134138 $\times 10^{+0}$	a_{42}	-3.37854565004145342303 $\times 10^{-1}$
a_{11}	4.96414449290866874965 $\times 10^{-8}$	a_{27}	8.25567386306454421654 $\times 10^{-1}$	a_{43}	2.28601360223625307981 $\times 10^{+0}$
a_{12}	8.54009683922490513941 $\times 10^{-6}$	a_{28}	4.12989323578987963906 $\times 10^{+0}$	a_{44}	-3.48882381810577418926 $\times 10^{-1}$
a_{13}	-1.26561034295266753862 $\times 10^{-6}$	a_{29}	-2.13669465718515966160 $\times 10^{+0}$	a_{45}	-4.33198356493741013919 $\times 10^{-1}$
a_{14}	-1.07902718211513735603 $\times 10^{-4}$	a_{30}	-7.72092366407843306275 $\times 10^{+0}$	a_{46}	1.19946891446650512028 $\times 10^{-1}$
a_{15}	2.06378666622147880249 $\times 10^{-5}$	a_{31}	4.48289103831774250881 $\times 10^{+0}$	a_{47}	3.46858415593211783702 $\times 10^{-2}$
a_{16}	1.01030277361960267869 $\times 10^{-3}$	a_{32}	1.16258194567005544649 $\times 10^{+1}$	a_{48}	-1.26207831046867863320 $\times 10^{-2}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{36}{7}$)					
a_0	2.81245862212401728503 $\times 10^{-18}$				
a_1	-2.89977148910757519253 $\times 10^{-15}$	a_{17}	-7.76789065553577383311 $\times 10^{-3}$	a_{33}	-4.04133227430238332079 $\times 10^{+1}$
a_2	-3.41620343781359799254 $\times 10^{-15}$	a_{18}	-9.05928807303049755503 $\times 10^{-5}$	a_{34}	1.03288772743057009468 $\times 10^{+1}$
a_3	1.17966931630924616756 $\times 10^{-12}$	a_{19}	4.89854993079216746115 $\times 10^{-2}$	a_{35}	4.52979625750434156739 $\times 10^{+1}$
a_4	6.76186078423031458324 $\times 10^{-13}$	a_{20}	-9.34472628420884910840 $\times 10^{-4}$	a_{36}	-1.38155160114107203779 $\times 10^{+1}$
a_5	-1.43513293189487965959 $\times 10^{-10}$	a_{21}	-2.43194389180379908338 $\times 10^{-1}$	a_{37}	-4.01633104536365474005 $\times 10^{+1}$
a_6	-5.20588243572506887246 $\times 10^{-11}$	a_{22}	1.18722452968700254561 $\times 10^{-2}$	a_{38}	1.46843609964638001288 $\times 10^{+1}$
a_7	8.26033977420125801274 $\times 10^{-9}$	a_{23}	9.63808551885872311259 $\times 10^{-1}$	a_{39}	2.72022463559075347987 $\times 10^{+1}$
a_8	2.07096999289567275356 $\times 10^{-9}$	a_{24}	-7.56330106740920565466 $\times 10^{-2}$	a_{40}	-1.18985994018678732573 $\times 10^{+1}$
a_9	-2.74639851867353558531 $\times 10^{-7}$	a_{25}	-3.07957796476941984077 $\times 10^{+0}$	a_{41}	-1.35066285678441492414 $\times 10^{+1}$
a_{10}	-4.88317883809930933338 $\times 10^{-8}$	a_{26}	3.35211084623382242912 $\times 10^{-1}$	a_{42}	7.44978301017562126929 $\times 10^{+0}$
a_{11}	5.89816263611108712086 $\times 10^{-6}$	a_{27}	7.98523427349864673681 $\times 10^{+0}$	a_{43}	3.82339618949604459218 $\times 10^{+0}$
a_{12}	7.32350493474191525566 $\times 10^{-7}$	a_{28}	-1.12391599183904559562 $\times 10^{+0}$	a_{44}	-2.62585007622618213044 $\times 10^{+0}$
a_{13}	-8.78268827288134068162 $\times 10^{-5}$	a_{29}	-1.68588636969891609588 $\times 10^{+1}$	a_{45}	-5.66195853368153384399 $\times 10^{-1}$
a_{14}	-7.13235971276790059407 $\times 10^{-6}$	a_{30}	2.95131126035877440716 $\times 10^{+0}$	a_{46}	4.85660820509380784907 $\times 10^{-1}$
a_{15}	9.51680496211598366433 $\times 10^{-4}$	a_{31}	2.89816941342219803007 $\times 10^{+1}$	a_{47}	3.46644948514932898140 $\times 10^{-2}$
a_{16}	4.23981324766398143247 $\times 10^{-5}$	a_{32}	-6.16853881651608855605 $\times 10^{+0}$	a_{48}	-3.80342690014295478962 $\times 10^{-2}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{37}{7}$)			
a_0	$-6.94071061750235524908 \times 10^{-17}$		
a_1	$-7.10981868696220741089 \times 10^{-15}$	a_{17}	$-1.67708212396747802604 \times 10^{-2}$
a_2	$8.38033163353628088580 \times 10^{-14}$	a_{18}	$2.35756949168714156395 \times 10^{-2}$
a_3	$2.85710607094982866748 \times 10^{-12}$	a_{19}	$1.03347761558064544332 \times 10^{-1}$
a_4	$-1.68811471635388893409 \times 10^{-11}$	a_{20}	$-1.33257240163471171593 \times 10^{-1}$
a_5	$-3.43086668233457035622 \times 10^{-10}$	a_{21}	$-5.00028004952811781796 \times 10^{-1}$
a_6	$1.35705433769706269455 \times 10^{-9}$	a_{22}	$5.99306422663882837132 \times 10^{-1}$
a_7	$1.94752046887927936040 \times 10^{-8}$	a_{23}	$1.92488070666440645910 \times 10^{+0}$
a_8	$-5.81126316967473585159 \times 10^{-8}$	a_{24}	$-2.17070787361341806129 \times 10^{+0}$
a_9	$-6.37954125365734896754 \times 10^{-7}$	a_{25}	$-5.94976261284246743974 \times 10^{+0}$
a_{10}	$1.53447387642252965371 \times 10^{-6}$	a_{26}	$6.38670317848752331057 \times 10^{+0}$
a_{11}	$1.34829336838719494040 \times 10^{-5}$	a_{27}	$1.48475192482088679343 \times 10^{+1}$
a_{12}	$-2.72816818695565933183 \times 10^{-5}$	a_{28}	$-1.53480347500399295761 \times 10^{+1}$
a_{13}	$-1.97311610473269545152 \times 10^{-4}$	a_{29}	$-2.99691656020977058663 \times 10^{+1}$
a_{14}	$3.46149578968546116607 \times 10^{-4}$	a_{30}	$3.02004739038959950160 \times 10^{+1}$
a_{15}	$2.09790880373794862794 \times 10^{-3}$	a_{31}	$4.88260304461995144704 \times 10^{+1}$
a_{16}	$-3.26466725768283081507 \times 10^{-3}$	a_{32}	$-4.86264566005241538870 \times 10^{+1}$
		a_{33}	$-6.37567792094280651809 \times 10^{+1}$
		a_{34}	$6.37854742482059035337 \times 10^{+1}$
		a_{35}	$6.57847018618720194456 \times 10^{+1}$
		a_{36}	$-6.75168432625078189981 \times 10^{+1}$
		a_{37}	$-5.22617367039565412528 \times 10^{+1}$
		a_{38}	$5.67106051053005327218 \times 10^{+1}$
		a_{39}	$3.03449739588589079277 \times 10^{+1}$
		a_{40}	$-3.65374726183692725379 \times 10^{+1}$
		a_{41}	$-1.16286828731878742757 \times 10^{+1}$
		a_{42}	$1.72347209939658041527 \times 10^{+1}$
		a_{43}	$1.70482476658868640962 \times 10^{+0}$
		a_{44}	$-4.76415900766504137086 \times 10^{+0}$
		a_{45}	$7.83477890623604278418 \times 10^{-2}$
		a_{46}	$7.02621562690404978747 \times 10^{-1}$
		a_{47}	$-3.36141726154784040169 \times 10^{-2}$
		a_{48}	$-4.36054355847301722894 \times 10^{-2}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{38}{7}$)			
a_0	$-1.67126149300188477179 \times 10^{-16}$		
a_1	$-5.35356593591178519896 \times 10^{-15}$	a_{17}	$-1.10703744754360946923 \times 10^{-2}$
a_2	$2.01168935188840988316 \times 10^{-13}$	a_{18}	$5.23314610995593455883 \times 10^{-2}$
a_3	$2.14115729008950151599 \times 10^{-12}$	a_{19}	$6.56022593599480955454 \times 10^{-2}$
a_4	$-4.03459995823197145102 \times 10^{-11}$	a_{20}	$-2.90267093019129567891 \times 10^{-1}$
a_5	$-2.55203493001922910215 \times 10^{-10}$	a_{21}	$-3.02323193393071957015 \times 10^{-1}$
a_6	$3.22489800883783745071 \times 10^{-9}$	a_{22}	$1.27716167516749832975 \times 10^{+0}$
a_7	$1.43376582119852046214 \times 10^{-8}$	a_{23}	$1.09436078740438930710 \times 10^{+0}$
a_8	$-1.37120333878582323466 \times 10^{-7}$	a_{24}	$-4.50945579230543594372 \times 10^{+0}$
a_9	$-4.63380516200811258251 \times 10^{-7}$	a_{25}	$-3.12383990107441073865 \times 10^{+0}$
a_{10}	$3.58967100558313627738 \times 10^{-6}$	a_{26}	$1.28776928234616889234 \times 10^{+1}$
a_{11}	$9.62844218267231580457 \times 10^{-6}$	a_{27}	$7.00774368151047808809 \times 10^{+0}$
a_{12}	$-6.31722732461290056716 \times 10^{-5}$	a_{28}	$-2.98766320149560809488 \times 10^{+1}$
a_{13}	$-1.37969378030990323484 \times 10^{-4}$	a_{29}	$-1.21738918966330770240 \times 10^{+1}$
a_{14}	$7.91962474300860796845 \times 10^{-4}$	a_{30}	$5.63755672417139878335 \times 10^{+1}$
a_{15}	$1.42949203512013149704 \times 10^{-3}$	a_{31}	$1.57635267093343181042 \times 10^{+1}$
a_{16}	$-7.36545083361738677733 \times 10^{-3}$	a_{32}	$-8.62931903330837860071 \times 10^{+1}$
		a_{33}	$-1.36333189033223617602 \times 10^{+1}$
		a_{34}	$1.06365462767900443951 \times 10^{+2}$
		a_{35}	$4.25315126402831720089 \times 10^{+0}$
		a_{36}	$-1.04091197056544323948 \times 10^{+2}$
		a_{37}	$8.05390388506835601795 \times 10^{+0}$
		a_{38}	$7.88566074463802275997 \times 10^{+1}$
		a_{39}	$-1.56737052902072272008 \times 10^{+1}$
		a_{40}	$-4.40498857750574865525 \times 10^{+1}$
		a_{41}	$1.45602862239239287199 \times 10^{+1}$
		a_{42}	$1.65026930102802472548 \times 10^{+1}$
		a_{43}	$-8.29010472878884147625 \times 10^{+0}$
		a_{44}	$-2.77246544633647191160 \times 10^{+0}$
		a_{45}	$2.11254047830341428012 \times 10^{+0}$
		a_{46}	$5.68649579806828641017 \times 10^{-2}$
		a_{47}	$-2.04161702842069897135 \times 10^{-1}$
		a_{48}	$2.53453322155167169862 \times 10^{-2}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{39}{7}$)			
a_0	$-8.55951929546784999419 \times 10^{-17}$		
a_1	$8.46114188454856765942 \times 10^{-15}$	a_{17}	$2.59403668533440289661 \times 10^{-2}$
a_2	$1.05894911407990565566 \times 10^{-13}$	a_{18}	$2.94096852543581900840 \times 10^{-2}$
a_3	$-3.49193208838420718821 \times 10^{-12}$	a_{19}	$-1.67015485285650669364 \times 10^{-1}$
a_4	$-2.17415930652651681959 \times 10^{-11}$	a_{20}	$-1.60303752737463464172 \times 10^{-1}$
a_5	$4.31237247833965196084 \times 10^{-10}$	a_{21}	$8.47547251708268366332 \times 10^{-1}$
a_6	$1.77201855281891877423 \times 10^{-9}$	a_{22}	$6.86543322915966339276 \times 10^{-1}$
a_7	$-2.52132909346251540468 \times 10^{-8}$	a_{23}	$-3.43790112264249666669 \times 10^{+0}$
a_8	$-7.65204513529239964381 \times 10^{-8}$	a_{24}	$-2.33050594128325219112 \times 10^{+0}$
a_9	$8.52130571066568927034 \times 10^{-7}$	a_{25}	$1.12601130152765133478 \times 10^{+1}$
a_{10}	$2.02604368509891422536 \times 10^{-6}$	a_{26}	$6.29166646602687529588 \times 10^{+0}$
a_{11}	$-1.86162704489595588896 \times 10^{-5}$	a_{27}	$-2.99819961205931148585 \times 10^{+1}$
a_{12}	$-3.59017241947992289414 \times 10^{-5}$	a_{28}	$-1.34692195757362479192 \times 10^{+1}$
a_{13}	$2.82216682102677474322 \times 10^{-4}$	a_{29}	$6.5141712803227280831 \times 10^{+1}$
a_{14}	$4.51003692008160215591 \times 10^{-4}$	a_{30}	$2.25854648189662258083 \times 10^{+1}$
a_{15}	$-3.11602119408941362031 \times 10^{-3}$	a_{31}	$-1.15558282603652458176 \times 10^{+2}$
a_{16}	$-4.1800719727293690133 \times 10^{-3}$	a_{32}	$-2.87755443996413015744 \times 10^{+1}$
		a_{33}	$1.66891131063554367709 \times 10^{+2}$
		a_{34}	$2.57451210897927716499 \times 10^{+1}$
		a_{35}	$-1.94802416523471381156 \times 10^{+2}$
		a_{36}	$-1.18155893982542389204 \times 10^{+1}$
		a_{37}	$1.81300845997035205926 \times 10^{+2}$
		a_{38}	$-6.11409165892739913312 \times 10^{+0}$
		a_{39}	$-1.31401053163863567461 \times 10^{+2}$
		a_{40}	$1.72684050498199355094 \times 10^{+1}$
		a_{41}	$7.10181881075004915709 \times 10^{+1}$
		a_{42}	$-1.66736904609247431901 \times 10^{+1}$
		a_{43}	$-2.63796917871675628111 \times 10^{+1}$
		a_{44}	$9.36378349546675921905 \times 10^{+0}$
		a_{45}	$5.15499294286096173115 \times 10^{+0}$
		a_{46}	$-2.35185076150312305444 \times 10^{+0}$
		a_{47}	$-4.09263147903246988390 \times 10^{-1}$
		a_{48}	$2.24165039496220495880 \times 10^{-1}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{40}{7}$)					
a_0	$2.01724467237981859617 \times 10^{-16}$				
a_1	$4.44020938436635734330 \times 10^{-14}$	a_{17}	$1.08799132602278247526 \times 10^{-1}$	a_{33}	$4.75626193089268061433 \times 10^{+2}$
a_2	$-2.44303805196415936640 \times 10^{-13}$	a_{18}	$-7.48932937455378679244 \times 10^{-2}$	a_{34}	$-2.53667452242901589090 \times 10^{+2}$
a_3	$-1.78951661266176977451 \times 10^{-11}$	a_{19}	$-6.76003783330560268204 \times 10^{-1}$	a_{35}	$-5.14917417582111569431 \times 10^{+2}$
a_4	$4.94432167802347685357 \times 10^{-11}$	a_{20}	$4.31477637273839281239 \times 10^{-1}$	a_{36}	$2.81104867242383477422 \times 10^{+2}$
a_5	$2.15605419384255929881 \times 10^{-9}$	a_{21}	$3.30219003599465885036 \times 10^{+0}$	a_{37}	$4.39325232826675043651 \times 10^{+2}$
a_6	$-4.00003184324418692150 \times 10^{-9}$	a_{22}	$-1.98209464084557036224 \times 10^{+0}$	a_{38}	$-2.49396280324555482047 \times 10^{+2}$
a_7	$-1.22851684029322369215 \times 10^{-7}$	a_{23}	$-1.28559979787888696252 \times 10^{+1}$	a_{39}	$-2.87292034720770630506 \times 10^{+2}$
a_8	$1.72675846963682095261 \times 10^{-7}$	a_{24}	$7.34959525115492170916 \times 10^{+0}$	a_{40}	$1.72919352066022107648 \times 10^{+2}$
a_9	$4.04156121411788831794 \times 10^{-6}$	a_{25}	$4.02758038557495526140 \times 10^{+1}$	a_{41}	$1.36965834699730756787 \times 10^{+2}$
a_{10}	$-4.60426222734877280691 \times 10^{-6}$	a_{26}	$-2.21912700794084380977 \times 10^{+1}$	a_{42}	$-8.96983310357305365800 \times 10^{+1}$
a_{11}	$-8.58320753314085186010 \times 10^{-5}$	a_{27}	$-1.02164447872218466352 \times 10^{+2}$	a_{43}	$-4.31080381098145914341 \times 10^{+1}$
a_{12}	$8.28077608026970409048 \times 10^{-5}$	a_{28}	$5.48738328219594446422 \times 10^{+1}$	a_{44}	$3.20511145616240807783 \times 10^{+1}$
a_{13}	$1.26300288013289179545 \times 10^{-3}$	a_{29}	$2.10449492301828965960 \times 10^{+2}$	a_{45}	$6.76640587615821513279 \times 10^{+0}$
a_{14}	$-1.06473729482220984334 \times 10^{-3}$	a_{30}	$-1.11442578781321288758 \times 10^{+2}$	a_{46}	$-6.12990749670591102772 \times 10^{+0}$
a_{15}	$-1.35130367796586743008 \times 10^{-2}$	a_{31}	$-3.51896143590335979522 \times 10^{+2}$	a_{47}	$-3.97536235509740939541 \times 10^{-1}$
a_{16}	$1.01953065279562854519 \times 10^{-2}$	a_{32}	$1.85862284543037994320 \times 10^{+2}$	a_{48}	$4.81074830301764370959 \times 10^{-1}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{41}{7}$)					
a_0	$1.05800586876192118428 \times 10^{-15}$				
a_1	$8.57140578553390403272 \times 10^{-14}$	a_{17}	$1.94085021765884566210 \times 10^{-1}$	a_{33}	$6.84009749547327766665 \times 10^{+2}$
a_2	$-1.27212589070081649641 \times 10^{-12}$	a_{18}	$-3.37006212942234546361 \times 10^{-1}$	a_{34}	$-7.80561553056888809201 \times 10^{+2}$
a_3	$-3.43018813303681437365 \times 10^{-11}$	a_{19}	$-1.18769562122405328369 \times 10^{+0}$	a_{35}	$-6.98604561352076742552 \times 10^{+2}$
a_4	$2.55031583093686388670 \times 10^{-10}$	a_{20}	$1.88179748739616249191 \times 10^{+0}$	a_{36}	$8.00183906490466734473 \times 10^{+2}$
a_5	$4.10121837847875200849 \times 10^{-9}$	a_{21}	$5.70279934357293615981 \times 10^{+0}$	a_{37}	$5.51951736050014358193 \times 10^{+2}$
a_6	$-2.03907428386831348805 \times 10^{-8}$	a_{22}	$-8.34791693584980479738 \times 10^{+0}$	a_{38}	$-6.49092296130781855198 \times 10^{+2}$
a_7	$-2.31745209792867289914 \times 10^{-7}$	a_{23}	$-2.17708992727541965801 \times 10^{+1}$	a_{39}	$-3.24012904227117363795 \times 10^{+2}$
a_8	$8.67857716744754657899 \times 10^{-7}$	a_{24}	$2.97726604956333260091 \times 10^{+1}$	a_{40}	$4.05255892711105635484 \times 10^{+2}$
a_9	$7.55477361361465419417 \times 10^{-6}$	a_{25}	$6.66820029967070680126 \times 10^{+1}$	a_{41}	$1.30486098356286171138 \times 10^{+2}$
a_{10}	$-2.27588634758893273733 \times 10^{-5}$	a_{26}	$-8.60803428846585338695 \times 10^{+1}$	a_{42}	$-1.85411006799409305292 \times 10^{+2}$
a_{11}	$-1.58848399830703893476 \times 10^{-4}$	a_{27}	$-1.64754201651005471135 \times 10^{+2}$	a_{43}	$-2.94559649800089674930 \times 10^{+1}$
a_{12}	$4.01525200715966148902 \times 10^{-4}$	a_{28}	$2.02805945778799771268 \times 10^{+2}$	a_{44}	$5.64770201175904899486 \times 10^{+1}$
a_{13}	$2.31184170358556701237 \times 10^{-3}$	a_{29}	$3.28985065431343572181 \times 10^{+2}$	a_{45}	$8.27392532230431222145 \times 10^{-1}$
a_{14}	$-5.05071984801013112030 \times 10^{-3}$	a_{30}	$-3.90195411346867222896 \times 10^{+2}$	a_{46}	$-8.88880830250388670208 \times 10^{+0}$
a_{15}	$-2.44351195614659756519 \times 10^{-2}$	a_{31}	$-5.29899721907717048025 \times 10^{+2}$	a_{47}	$3.69294531817961848824 \times 10^{-1}$
a_{16}	$4.71764205387903108582 \times 10^{-2}$	a_{32}	$6.12448376401164698380 \times 10^{+2}$	a_{48}	$5.46236872996079769395 \times 10^{-1}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{42}{7}$)					
a_0	$2.13826366462893920418 \times 10^{-15}$				
a_1	$6.89470842884031805388 \times 10^{-14}$	a_{17}	$1.39647089677719158253 \times 10^{-1}$	a_{33}	$2.22048100866731279155 \times 10^{+2}$
a_2	$-2.56370348635849444092 \times 10^{-12}$	a_{18}	$-6.41359633609478917653 \times 10^{-1}$	a_{34}	$-1.21963863709343771790 \times 10^{+3}$
a_3	$-2.74737165815100664350 \times 10^{-11}$	a_{19}	$-8.27478004382134334494 \times 10^{-1}$	a_{35}	$-1.37201780031930503652 \times 10^{+2}$
a_4	$5.12088108767486563658 \times 10^{-10}$	a_{20}	$3.53440038776844905436 \times 10^{+0}$	a_{36}	$1.18502072984707496447 \times 10^{+3}$
a_5	$3.26339097291260888247 \times 10^{-9}$	a_{21}	$3.81872744036784549479 \times 10^{+0}$	a_{37}	$7.16168757949468125654 \times 10^{+0}$
a_6	$-4.07595909001578569364 \times 10^{-8}$	a_{22}	$-1.54422468583111999800 \times 10^{+1}$	a_{38}	$-8.96500912843714817860 \times 10^{+2}$
a_7	$-1.82762885362025800501 \times 10^{-7}$	a_{23}	$-1.38749008494569261167 \times 10^{+1}$	a_{39}	$8.90650780895647117544 \times 10^{+1}$
a_8	$1.72544785438340066504 \times 10^{-6}$	a_{24}	$5.41102902692768934237 \times 10^{+1}$	a_{40}	$5.08700845907950062803 \times 10^{+2}$
a_9	$5.88969673479342150040 \times 10^{-6}$	a_{25}	$3.99079416658467952157 \times 10^{+1}$	a_{41}	$-1.05339246697494596795 \times 10^{+2}$
a_{10}	$-4.49614676652496098842 \times 10^{-5}$	a_{26}	$-1.53254480081824066266 \times 10^{+2}$	a_{42}	$-2.01722105978345481564 \times 10^{+2}$
a_{11}	$-1.22064543181624001011 \times 10^{-4}$	a_{27}	$-9.08273157092029884397 \times 10^{+1}$	a_{43}	$6.52577324265017791606 \times 10^{+1}$
a_{12}	$7.87371613327832104825 \times 10^{-4}$	a_{28}	$3.52415655869165549676 \times 10^{+2}$	a_{44}	$4.75454227162317135848 \times 10^{+1}$
a_{13}	$1.74524535402511845058 \times 10^{-3}$	a_{29}	$1.62208897489948809820 \times 10^{+2}$	a_{45}	$-2.22360921760002363867 \times 10^{+1}$
a_{14}	$-9.81944841368238032079 \times 10^{-3}$	a_{30}	$-6.58764865471765769166 \times 10^{+2}$	a_{46}	$-3.40155252799985713417 \times 10^{+0}$
a_{15}	$-1.80512480447438085950 \times 10^{-2}$	a_{31}	$-2.22399263566270443677 \times 10^{+2}$	a_{47}	$2.61468674366827562630 \times 10^{+0}$
a_{16}	$9.08137071614657093439 \times 10^{-2}$	a_{32}	$9.98664483983556397082 \times 10^{+2}$	a_{48}	$-2.07406846106877246964 \times 10^{-1}$

Coefficient a_i ($c = 16 \times \frac{43}{7}$)			
a_0	1.01807284937180847658 $\times 10^{-15}$		
a_1	-8.33828013398877855960 $\times 10^{-14}$	a_{17}	-2.61850277117144381440 $\times 10^{-1}$
a_2	-1.26252235009198639447 $\times 10^{-12}$	a_{18}	-3.60637121728048327014 $\times 10^{-1}$
a_3	3.44983536663943080319 $\times 10^{-11}$	a_{19}	1.69132669615695362619 $\times 10^{+0}$
a_4	2.59882905603588248895 $\times 10^{-10}$	a_{20}	1.97762614993828641530 $\times 10^{+0}$
a_5	-4.27191726959393077756 $\times 10^{-9}$	a_{21}	-8.60954853997448490203 $\times 10^{+0}$
a_6	-2.12402640777831420491 $\times 10^{-8}$	a_{22}	-8.53419089659388661644 $\times 10^{+0}$
a_7	2.50488159391959165845 $\times 10^{-7}$	a_{23}	3.50251977575808560770 $\times 10^{+1}$
a_8	9.19940586393844951369 $\times 10^{-7}$	a_{24}	2.92610479964297871095 $\times 10^{+1}$
a_9	-8.49140064558924758634 $\times 10^{-6}$	a_{25}	-1.15026524666943472305 $\times 10^{+2}$
a_{10}	-2.44353118117126904879 $\times 10^{-5}$	a_{26}	-8.01049137970166421093 $\times 10^{+1}$
a_{11}	1.86093808313184350403 $\times 10^{-4}$	a_{27}	3.07012106367272034052 $\times 10^{+2}$
a_{12}	4.34499385117122984209 $\times 10^{-4}$	a_{28}	1.75073538314840523005 $\times 10^{+2}$
a_{13}	-2.83023904645871024228 $\times 10^{-3}$	a_{29}	-6.68419618756934458211 $\times 10^{+2}$
a_{14}	-5.47915091336201069226 $\times 10^{-3}$	a_{30}	-3.03476632866083726238 $\times 10^{+2}$
a_{15}	3.13516133157031657780 $\times 10^{-2}$	a_{31}	1.18781773765095564477 $\times 10^{+3}$
a_{16}	5.10021855169249267061 $\times 10^{-2}$	a_{32}	4.10301839773426346461 $\times 10^{+2}$
		a_{33}	-1.71818775240875863254 $\times 10^{+3}$
		a_{34}	-4.16824214426102341031 $\times 10^{+2}$
		a_{35}	2.00931117864786072796 $\times 10^{+3}$
		a_{36}	2.89193968866775446747 $\times 10^{+2}$
		a_{37}	-1.87628961281699127368 $\times 10^{+3}$
		a_{38}	-8.99309791310541142593 $\times 10^{+1}$
		a_{39}	1.37017304239542059585 $\times 10^{+3}$
		a_{40}	-6.42892120745143520491 $\times 10^{+1}$
		a_{41}	-7.55247612508762958400 $\times 10^{+2}$
		a_{42}	1.07533325112888425900 $\times 10^{+2}$
		a_{43}	2.94505612178565051475 $\times 10^{+2}$
		a_{44}	-7.08600754339670215934 $\times 10^{+1}$
		a_{45}	-7.07099744820332493385 $\times 10^{+1}$
		a_{46}	2.43499715512091786702 $\times 10^{+1}$
		a_{47}	6.68759354077623884689 $\times 10^{+0}$
		a_{48}	-2.85639601608367412781 $\times 10^{+0}$