

ランダムサンプリング法を用いた
燃焼後核燃料の核種組成に対する不確かさ評価

原子炉工学研究室

二平舜介

目次

第 1 章 序論

1.1 背景

1.1.1 核燃料燃焼後の核種組成における不確かさ	1
1.1.2 燃焼後核燃料組成不確かさの定量評価手法	1
1.1.3 ランダムサンプリング法を用いた不確かさ評価	1
1.1.4 リバースサンプリング法	2

1.2 研究目的	2
----------	---

第 2 章 ランダムサンプリング法を用いた燃焼後核燃料組成の不確かさ評価理論

2.1 不確かさ評価の流れ	3
---------------	---

2.1.1 概要	3
2.1.2 多群断面積の分散共分散行列	4
2.1.3 燃焼チェーン作成に関わる分散共分散行列	5
2.1.4 モンテカルロ法に基づいたサンプリング	5
2.1.5 相関を持った多変量正規乱数	6
2.1.6 断面積ライブラリの作成	7
2.1.7 燃焼チェーンの作成	8
2.1.8 モンテカルロ法に基づくサンプリングによる断面積と燃焼チェーン作成	8

2.2 ランダムサンプリング法	9
-----------------	---

2.2.1 概要	9
2.2.2 多変量標準正規乱数の作成	9

2.3 リバースサンプリング法	9
-----------------	---

2.3.1 概要	9
2.3.2 想定される問題点	10

2.4 統計的な評価手法	10
--------------	----

2.4.1 概要	10
2.4.2 確率論におけるモーメント	10

2.5 ブートストラップ法	12
---------------	----

第 3 章 計算手法

3.1 計算プログラム概要	13
---------------	----

3.2 CBZ コードシステム	14
-----------------	----

3.3 計算体系	14
----------	----

第4章 計算結果・考察.....	15
4.1 ランダムサンプリング法におけるサンプル数増加による収束の検証計算.....	15
4.2 対角化による多変量正規乱数の作成検証計算.....	16
4.3 ランダムサンプリング法を用いた燃焼後核種数密度の不確かさ計算.....	19
4.3.1 計算結果.....	19
4.3.2 非正規性が見られた核種の考察.....	26
4.4 リバースサンプリング法検証計算.....	29
4.4.1 計算結果.....	29
4.4.2 考察と有用性の評価.....	33
第5章 まとめ.....	35
参考文献.....	36
謝辞.....	36
付録.....	37～

第1章 序論

1.1 背景

1.1.1 燃焼後核燃料組成における不確かさ

燃焼後核燃料の核種インベントリを正確に予測することは、再処理、中間貯蔵、深地層処分等をはじめとする使用済み核燃料の効率的な取り扱いや、原子炉事故時の適切な対応のために必要不可欠である。現在、それらは燃焼計算による数値シミュレーションを行うことで得られているが、数値シミュレーションには様々な要因によって必ず不確かさが生じる。その不確かさを定量的に評価することが、解析結果の信頼性を論ずる上で非常に重要となる。

上記で述べた不確かさに影響を与える要因は主に、計算モデルの近似や燃料の製造工程で生じる公差、入力時に用いるデータ(運転条件や測定データ)の不確かさ、燃焼計算に用いる核データが持つ不確かさなどが考えられる。本研究ではその中でも、核データの持つ不確かさについて着目して評価を行う。

1.1.2 燃焼後数密度の不確かさ評価手法

核データの不確かさ(共分散で与えられる)が解析結果である燃焼後数密度に及ぼす不確かさの定量的な評価手法として、感度係数を用いた方法が挙げられる[1][2]。これは入力パラメータと出力値の間に線形性を仮定し、入出力間の関係性から評価された感度係数によって入力パラメータの不確かさを出力値へと伝播させる手法である。線形性を仮定しているため、この感度係数は入出力を示す関数の一次微係数として定義することができる。いわゆる決定論的な手法であり、感度係数の評価が出来ていれば入出力間の不確かさ伝播を直接計算できるという点で非常に計算コストが小さく、現在の不確かさ評価でも主として用いられている。

しかし、燃焼後数密度の予測を行う燃焼計算では極めて複雑な物理過程(崩壊や分岐、中性子の吸収など様々な過程が入り混じっている)を経ているため、入出力間の線形性に疑問が生じる。前述の通り、感度係数を用いた手法は入出力間の線形性を前提としているため、非線形性である計算に用いた場合は正確に評価することができないものと考えられる。

感度係数を用いた方法の他に、不確かさの定量評価手法としてランダムサンプリング法が挙げられる。ランダムサンプリング法とは、感度係数のような不確かさの伝播から評価するものとはまた別のアプローチで評価を行う手法で、線形性の仮定がなくても成立する。

1.1.3 ランダムサンプリング法を用いた不確かさ評価

ランダムサンプリング法とは、入力となるパラメータをその不確かさに沿った乱数でサンプリングし計算を行い、得られた出力値を統計的に評価する手法である。これによって入力の不確かさを起因とする出力の不確かさを評価することが可能となる。これは、前述

の通り出力側の不確かさを統計的な処理で得ているため、線形非線形に関わらず評価を行うことができる反面、得られる結果には必ず統計的な不確かさが生じる。そのため、ランダムサンプリング法を用いて不確かさの評価を精度よく行うためには、サンプリングする標本の数をできる限り多くとる必要がある。しかし、この手法ではサンプリング数と同数の計算を行う必要があり、精度の良い評価のためには必要な計算コストが大きくなる傾向がある。

1.1.4 リバースサンプリング法

前節の通り、少ないサンプリング数で精度の良い評価を行うためには、偏りのない(より一様な)サンプリングを行う必要がある。リバースサンプリング法とは入力値に左右対称な分布(本研究においては正規分布)を仮定した状態で行う手法で(核データの不確かさは正規分布が仮定されている)、あるサンプリング点を中央値(期待値) $+\sigma$ の位置に取った場合は次のサンプリング点を対象位置である期待値 $-\sigma$ の位置に取るような規則を持たせたものである[3][4]。これは、本来ランダムサンプリング法で感度係数の評価を行うために考案された手法であるが、出力が非正規分布であっても統計値の収束が速くなるような効果が見込める可能性がある。

1.2 研究目的

1.1 節で述べた通り、現行の感度係数を用いた評価手法において為されている線形性の仮定は確かなものでなく、燃焼計算を対象としたものについては過去にも評価されていない。ランダムサンプリング法を用いることで、入出力間の線形性に拠らず不確かさ評価が可能となる。また、現在ランダムサンプリング法を効率化する手法としてリバースサンプリング法が考案されている。

よって、本研究の目的を以下の通りとする。

1. ランダムサンプリング法によって燃焼後数密度の不確かさ評価を行い、入出力間の線形性を確認することで従来の感度係数を用いた評価手法の妥当性を検討する。
2. サンプリング手法の一つとして考案されたリバースサンプリング法を燃焼後数密度の不確かさ評価に適用することで、リバースサンプリング法の有用性を検討する。

第 2 章 ランダムサンプリング法による不確かさ評価理論

本章では、ランダムサンプリング法を用いて行う不確かさ評価の方法について述べる。2.1 節では本研究で行われる不確かさ評価の具体的な流れを示し、2.2 節と 2.3 節においてランダムサンプリング法とリバースサンプリング法それぞれにおけるサンプリングの手法を説明する。

また、統計的な評価手法について 2.4 節と 2.5 節で説明を加える。2.5 節では統計値の信頼性を評価する手段として、ブートストラップ法について説明する。

2.1 不確かさ評価の流れ

2.1.1 概要

以下に示す通りの手順にて不確かさ評価を行う。

1. 断面積データ、半減期、核分裂収率、分岐比のデータを評価済み核データライブラリより取得し、共分散行列を作成する。
2. 1 で得られた共分散行列に基づいてサンプリングを行い、断面積から多群断面積ライブラリを、上に述べた他 3 つのデータから燃焼チェーンを多数作成する。
3. 2 で作成した多群断面積ライブラリと燃焼チェーンを用いて燃焼計算を行い、着目した燃焼点での核種数密度データを得る。
4. 3 で得られた数密度データに統計処理を行い、燃焼後数密度の統計量を評価する。
5. 統計処理によって得られたデータから核種数密度分布の正規性を確認し、非正規性が見られたものについては考察を行う。

上で示した手順のうち、核データの抽出と燃焼計算を汎用炉物理解析コード **CBZ** によって、サンプリングと統計処理を今回作成したプログラムによって行う。この不確かさ評価においては、ランダムサンプリングをはじめとするサンプリング手法が特に重要となってくるため、別節で解説を行う。

汎用炉物理解析コード **CBZ** については後述する。

また、本研究では統計処理によって得られた標準偏差を燃焼後核種数密度の不確かさとして扱っているが、その統計処理の方法と信頼区間の判定についても後の節に示す。

2.1.2 多群断面積の分散共分散行列

ここでは、核データの中でも多群断面積の不確かさを表す共分散についての説明を行う。反応の種類によっては相互に影響を与える断面積も存在し、適切な不確かさ評価を行うためには各断面積の分散に限らず、断面積間の相関を示した共分散を考慮する必要がある。

本研究では、評価済み核データライブラリとして JENDL-4.0[] を使用しており、考慮している反応の種別は、弾性散乱、核分裂、捕獲、非弾性散乱、核分裂スペクトル、 ν (核分裂当たりの平均中性子発生数)、 $(n,2n)$ 反応の計 7 つである。このうち、断面積間の共分散が評価されているものは、弾性散乱、核分裂、捕獲断面積の 3 つのみであることから、本研究で扱う断面積の共分散行列は下式のようなになる。(式 2.1)

$$C = \begin{bmatrix} \Sigma_{e,e} & \Sigma_{e,f} & \Sigma_{e,c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{e,f}^T & \Sigma_{f,f} & \Sigma_{f,c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{e,c}^T & \Sigma_{f,c}^T & \Sigma_{c,c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{i,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{n2n,n2n} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

なお、式中的変数は以下の通りである。

- 0 : 零行列
- $\Sigma_{e,e}$: 弾性散乱断面積の共分散行列
- $\Sigma_{f,f}$: 核分裂断面積の共分散行列
- $\Sigma_{c,c}$: 捕獲断面積の共分散行列
- $\Sigma_{e,f}$: 弾性散乱断面積-核分裂断面積の共分散行列
- $\Sigma_{e,c}$: 弾性散乱断面積-捕獲断面積の共分散行列
- $\Sigma_{f,c}$: 核分裂断面積-捕獲断面積の共分散行列
- $\Sigma_{i,i}$: 非弾性散乱の共分散行列
- χ : 核分裂スペクトルの共分散行列
- ν : 平均中性子発生数の共分散行列
- $\Sigma_{n2n,n2n}$: $(n,2n)$ 反応の共分散行列

今回はエネルギーを 107 群として計算を行ったため、共分散行列と書かれたものはすべて (107×107) 行列となっている。上式における零行列の位置については共分散が評価されていないため、すべての要素を 0 とする。共分散行列は対称行列であり、式中の T は行列が転置行列であることを示している。また、JENDL-4.0 において評価されている核種間の相関が少ないことに加え、それを考慮した場合の計算コストが大きくなることから、本研究では核種間の相関はないものと仮定している。

なお、共分散行列が上式の通りになると示したが、計算コストの関係で一度に対角化の

処理(後述)を行う行列は左上部の 3×3 行列と、個々の共分散行列に分けている。

2.1.3 燃焼チェーン作成に関わる分散共分散行列

燃焼チェーン作成の際に考慮した不確かさは、半減期、核分裂収率、分岐比の三つである。これらはすべて前節同様、JENDL FP Decay Data File 2011, Fission Yield Data File 2011[5]の評価済み核データライブラリを参照している。摂動を与えた各要素について以下に述べる。

§ 半減期 半減期($T_{1/2}$)はある一定量の核種が崩壊して半分になるまでの平均時間を示す。崩壊を示す式は、崩壊定数 λ を用いて式(2.2)のように記述されるが、ここで崩壊定数と半減期の関係性は式(2.2)'に示す通りである。

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2.2)$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad (2.2)'$$

§ 核分裂収率 核分裂性核種が分裂する際に生成される核分裂生成物(FP)がどの割合でどの核種になるかを示したデータ。複数の入射中性子のエネルギーに対してそれぞれ分散を与えられている。共分散は片倉の方法[6]で評価された共分散を使用している。今回考慮した核分裂性核種は 23 核種で、収率を摂動させる核種は 1284 核種としている。

§ 分岐比 ある原子核が崩壊する際に、 α 崩壊や β 崩壊など複数の崩壊の形をとるものがある。このある核種が崩壊するときにとる種類の割合を示すのが分岐比である。これは分岐比ごとに個別で分散を与えられているが、その総和が 1.0 となる必要があるため、崩壊のチャンネル間で相関を考慮している。(共分散行列として考慮している)

共分散行列で与えられているものは後述する手順を踏んで乱数を作成し、燃焼計算ごとに摂動を与え、CBZ の燃焼チェーン作成機能によって燃焼チェーンを作成する。

また、燃焼チェーン作成時には FP-138 モデル[7]から Rh-105m を除いたものを用いている。Rh-105m については摂動の中で崩壊定数が負になる状況が高い頻度で生じ、時間経過とともに崩壊の逆（すなわち核種数密度が増加する）という物理的に起こりえない状況となるため暫定的にモデルから除いている。

2.1.4 モンテカルロ法に基づいたサンプリング

モンテカルロ法とは乱数を用いて数値計算を行う手法の総称で、今回用いるランダムサンプリング法とはある母集団中から乱数を用いて標本を無作為に抽出する手法のことである。本研究で取り扱う不確かさ(断面積、半減期、核分裂収率、分岐比)はすべて正規分布に従うという仮定が存在する。

本研究では上記のサンプリングによって、断面積や燃焼チェーンに関わる値を複数回サンプリングすることで断面積ライブラリと燃焼チェーンを多数作成する。

2.1.5 相関を持った多変量正規乱数

この節では、前節で説明したサンプリングで用いられる多変量正規乱数について説明を行う。本研究では、多数のパラメータをサンプリングするために多変量正規乱数を使用する必要がある。多変量正規乱数とは、正規乱数(正規分布に従う乱数)を多次元化したもので、パラメータ間の相関を考慮することができる。

まず、多次元化していない正規乱数について説明する。ある確率密度変数 x の確率分布が正規分布に従う場合、 x の確率密度関数 $P(x)$ は下式(2.3)に従う。

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (2.3)$$

式中の σ^2 は分散、 μ は平均を示している。これに式(2.4)を用いて変数変換を行うことで、式(2.5)のように表すことができる。

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \times \left|\frac{dx}{dz}\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \times \sigma \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

上式(2.4)の $P(z)$ は平均が 0、分散が 1 の正規分布を表す式である。これは標準正規分布と呼ばれ、この式から平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布に従う乱数 x は標準正規分布を示す乱数 z との関係式（下式 2.6）で表すことができる。

$$x = \sigma \cdot z + \mu \quad (2.6)$$

これより、標準正規分布に従う乱数 z と目的の平均値、分散から任意の正規分布に従う乱数 x を作成することができる。

以上の方法で、独立した任意の正規乱数を作成することができる。次に、これを多次元に拡張した多変量正規乱数について説明する。

二組の確率変数の相関を示す指標として共分散というものがある。これは下式(2.7)のように平均からの偏差を掛け合わせ平均を採ったものである。(ただし、Cov は共分散を表し、 $E[]$ はその期待値を、 X 、 Y は対象となる確率変数を示している)

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (2.7)$$

また、これを複数の組 (多次元) について考えたものが共分散行列であり式(2.8)である。

$$M = \frac{(F - \bar{F})(F - \bar{F})^T}{N} \quad (N \text{ は標本数}) \quad (2.8)$$

式(2.8)中の F 、 $\bar{F}$ はそれぞれ、複数の確率変数とその平均値の行列を表している (式(2.9))

$$F = (f^1 \ f^2 \ \dots \ f^N) = \begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_L^1 & \dots & f_L^N \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\bar{F} = (\bar{f}^1 \ \bar{f}^2 \ \dots \ \bar{f}^N) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1 & \dots & \bar{f}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{f}_L & \dots & \bar{f}_L \end{pmatrix}$$

ここで、 f はそれぞれ N 個の確率変数を意味し、 $\bar{f}$ は各々の期待値 (平均値) を意味している。ここで、逆説的ではあるが変換行列 P によって f を f' に変換するように定義を行う。

$$PMP^T = M' \quad (2.10)$$

同様の変換行列 P を用いて F の共分散行列である M を式(2.10)のように変換すると、 F を P で変換した結果である F' の共分散行列 M' と一致する。ここで、 M' を対角行列とすることで、 F' をすべて独立した正規乱数としてみなすことができるようになる。つまり、前述した(2.5)式によって f' を作成し、変換行列の逆行列である P^{-1} で変換を行うことで、互いに相関をもった多変量正規乱数が生成できることとなる。(式(2.11))

$$f = P^{-1}f' \quad (2.11)$$

よって、任意の共分散行列 M に従う多変量正規乱数を作成するためには対角行列である M' と式(2.9)を満たすような P を求める必要がある。そのため、本研究では特異値分解を用いた方法で共分散行列 M の対角化を行った。

まず、共分散行列 M に特異値分解を施すと下式(2.12)のようになる。

$$M = UDV^T = UDU^T \quad (2.12)$$

このとき、 M が対称行列であることから、 $U = V$ となる。また、 D は対角行列、 U はユニタリ行列である。ここで、 $UU^T = U^TU = I$ より(2.11)式は

$$U^TMU = D \quad (2.13)$$

と(2.12)式のように変形することができ、(2.10)式との比較から $P=U^T$ として変換行列を求めればよい。

2.1.6 断面積ライブラリの作成

断面積の共分散行列は 2.1.2 節で述べた通りである。ここでは、ランダムサンプリングによって得られた多変量正規乱数から断面積に摂動を与えて断面積ライブラリを作成する方法について述べる。まず、断面積に摂動を与える式は以下の通りである。(式(2.14))

$$\sigma'_{x,g} = (1 + f_{x,g})\sigma_{x,g} \quad (2.14)$$

ここで σ' が摂動後の断面積、 σ が摂動前の断面積を示している。また、摂動因子 $f_{\{x,g\}}$ は乱数によってサンプリングされた値で、断面積の摂動率となる。また、 x は断面積の種類

であり、2.1.2 節で述べた通り 7 種類考慮している。 g はエネルギー群である。

(2.14)式からも読み取れるように、摂動因子が断面積摂動の大きさに対応している。つまり、摂動因子が正であれば正の摂動を、負であれば負の摂動を与える。また、摂動因子の平均値は 0 であり、その分散と共分散は、2.1.2 節で述べた共分散行列に準じる。

2.1.7 燃焼チェーンの作成

2.1.3 節で示した通り、半減期においては分散を、核分裂収率には生成核種間の相関を考慮した共分散、分岐比にはチャンネル総和が 1 となるように調整を与えた共分散を用いている。これらに基づいて、燃焼チェーンに関わる各要素へ摂動を与える式は式(2.14)と同様の形式であり、サンプリングによって得られた摂動因子に対応した割合で摂動が与えられることとなる。

2.1.8 モンテカルロ法に基づくサンプリングによる断面積と燃焼チェーン作成のまとめ

この節では、2.1.2 節から述べたモンテカルロ法に基づくランダムサンプリングと、断面積、燃焼チェーンの作成についてまとめる。

- 1、断面積、半減期、分岐比、核分裂収率の分散共分散行列を特異値分解し P を求める。
- 2、 P によって共分散行列を対角化し、それに基づいた標準正規乱数を複数作成する。
- 3、作成した標準正規乱数を P^{-1} を用いて変換し、多変量正規乱数を作成する。
- 4、作成した多変量正規乱数を摂動因子として、目的の入力値に摂動を与える。
- 5、不確かさを考慮するすべての核種、すべての不確かさに 1 ～ 4 の工程を与え、断面積ライブラリと燃焼チェーンを作成する。
- 6、以上を必要なサンプル数だけ行い、複数の断面積、燃焼チェーンを得る。

また、本研究の目的でも述べた「効率的なサンプリング」等の文言におけるサンプリングとは、上記 2 の標準正規乱数を複数作成する作業を示す。ここで、より少ないサンプルでも統計精度の良くなる可能性を有したサンプリング法としてリバースサンプリング法に着目した。

次節からはサンプリング法の解説と、統計処理の手法について説明を行う。

2.2 ランダムサンプリング法

2.2.1 概要

ランダムサンプリング法とは、ある入力値をその不確かさに沿った乱数で繰り返しサンプリングする手法である。本研究においては、2.1.8 節でも述べた通り、ある共分散行列に従う標準正規乱数を複数個サンプリングする際に用いている。ここで、2.1 節で述べた内容に沿いつつ、実際に多変量標準正規乱数を作成する手法について示す。

2.2.2 多変量標準正規乱数の作成

本研究の不確かさ評価は C++ を用いたコードの中で行われるが、その計算プログラム内で標準正規乱数を作成する手法として Box-Muller 法を用いた。Box-Muller 法とは、独立な区間(0,1)内の一様乱数を用いて 2 個の独立な正規乱数を発生させる方法である。

また、C++ のプログラム内で区間(0,1)内の一様乱数を発生させるために、rand 関数によって生じた乱数を、その最大値である RAND_MAX で除するという手法を用いた。(rand 関数は 0 から RAND_MAX の区間で一様乱数を発生させる関数)

ここで得られた一様乱数を p_1, p_2 (互いに独立) とすると、標準正規乱数は下式(2.15)で表される。

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{-2\ln p_1} \cdot \sin(2\pi p_2) \\ z_2 = \sqrt{-2\ln p_1} \cdot \cos(2\pi p_2) \end{cases} \quad (2.15)$$

上式によって作成された標準正規乱数 z_1, z_2 を用いて多変量標準正規乱数を得る。 z_1, z_2 は互いに独立であることから、両方用いることができるが本研究では z_1 のみを用いた。

2.3 リバースサンプリング法

2.3.1 概要

リバースサンプリング法とは、正規分布において、ある入力パラメータをサンプリングした際に必ず、次のサンプリング点を対称の位置に取るサンプリング方法である。具体例として、標準正規分布を示した下図 2.1 を用いて説明する。

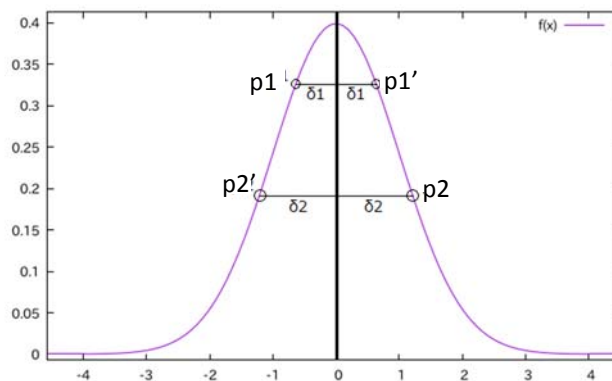


図 2.1 リバースサンプリング法の例

図中の δ は期待値からのずれを示している。 $p1$ 点をサンプリングした次は必ず $p1'$ 点のような正規分布の山の反対側からサンプリングを行う。上記のようにサンプリング点に偏りがないようサンプリングを行うことで、正規分布からのずれを通常のランダムサンプリング法よりも少ないサンプリング数で推定できることが期待される。

2.3.2 想定される問題点

リバースサンプリング法はサンプリング点の偏りを減じるという側面では優れているものの、分布の逆側を採るため期待値からの距離に関する情報は二重で採取してしまう懸念が存在する。その場合、収束に必要なサンプリング数が増え、ランダムサンプリング法を用いた不確かさ評価には不適である可能性がある。

2.4 統計的な評価手法

2.4.1 概要

前述の通り、モンテカルロ法に基づいた不確かさ評価は得られた複数の結果を統計的に処理することで出力の不確かさを得る。この節では、得られた結果の統計的な処理について説明を行う。なお、本研究では出力結果の分布がどの程度正規分布に即しているかという点を重視しているため、正規分布からのずれを示す指標である歪度、尖度といった高次のモーメントについても統計処理を行って算出した。

2.4.2 確率論におけるモーメント

ここで述べるモーメントとは、確率分布の形状が $E[X - \mu]^r$ という量 (r は任意の整数を示す) によって決まっていくことから呼ばれる、分散や歪度、尖度などの統計量のことである。なお、 μ は $E[X]$ 、つまり期待値を示している。

本研究で利用するモーメントは期待値まわりの三次モーメントである尖度までとした。以下で各統計量について解説を加える。

§ 期待値 (平均値)

期待値は $E[X]$ で表される原点周りの一次モーメントであり下式(2.16)で与えられる。

$$E[X] = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (2.16)$$

§ 分散

分散は確率分布のばらつきを示す量であり、(2.17)式で示される通りである。本研究で不確かさと称しているのは、二乗根をとった標準偏差 ($\sigma[X]$) を (数密度の) 期待値で割った相対標準偏差のことである。

$$V[X] = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - E)^2}{n - 1} \quad (2.17)$$
$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]}$$

§ 歪度

歪度は確率分布の左右対称性を示す指標である（式(2.18)）。歪度が正であるほど、頻度分布の山が左側（負の方向）に歪む傾向がある。正規分布の歪度は0になる(図 2.2)。

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - E)^3}{\sigma^3} \quad (2.18)$$

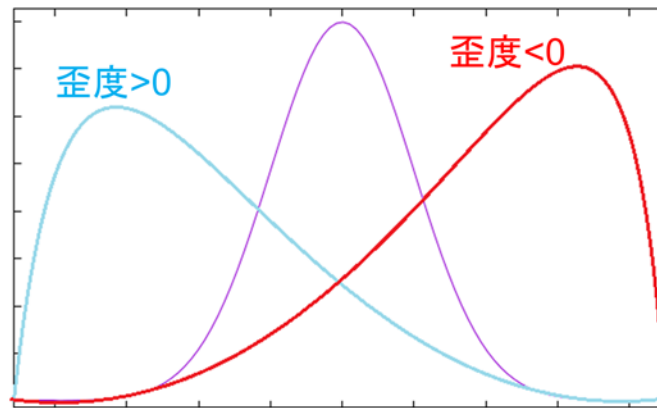


図 2.2 歪度

§ 尖度

尖度は分布の峰の鋭さ（中央への集中）もしくは裾野の広さを示す指標である。（式(2.19)）正規分布の場合は3となり、正規分布からのずれを示す指標としては尖度から3を引いたものを用いる。本研究では本来の尖度から予め3を引いたものを尖度として扱う。（図 2.3）

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - E)^4}{\sigma^4} - 3 \quad (2.19)$$

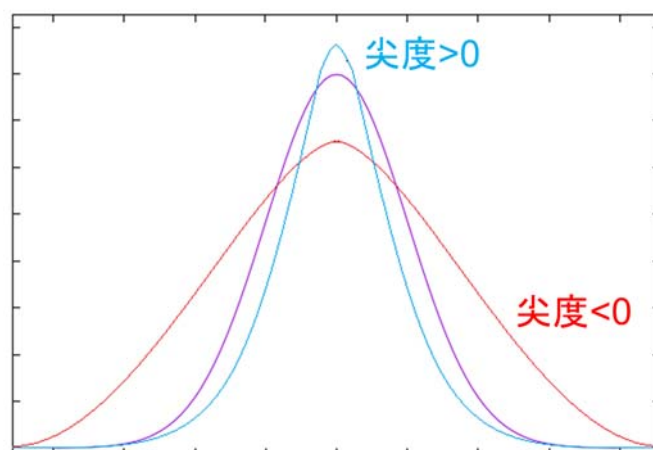


図 2.3 尖度

2.5 ブートストラップ法の概要

本研究では標本から有限のサンプリングを行い統計量を推定しているため、得られた期待値、分散、歪度、尖度といった統計量には必ず不確かさが存在する。よって、その不確かさを定量的に評価する必要がある。

標本が正規分布である場合は、式によって統計量の不確かさを評価することができるが、本研究で得られる結果については非正規性を示す可能性があるためそれを用いることができない。そのため、リサンプリング法的一种であるブートストラップ法を用いた。

ブートストラップ法とは予め得られた標本を、一様乱数によって（標本と同数だけ）再サンプリングし、リサンプリングされた確率変数の統計量を求め、複数回行ったリサンプリングの統計量をさらに統計的に評価することで母集団の推定量である標本の統計量を評価する手法である。[1]

第3章 計算手法

3.1 計算プログラム概要

ここでは本研究で用いたプログラムの概要を説明する。各プログラムで行っている計算等は第2章で解説したので省略する。図3.1に計算手順を示したフローを示す。

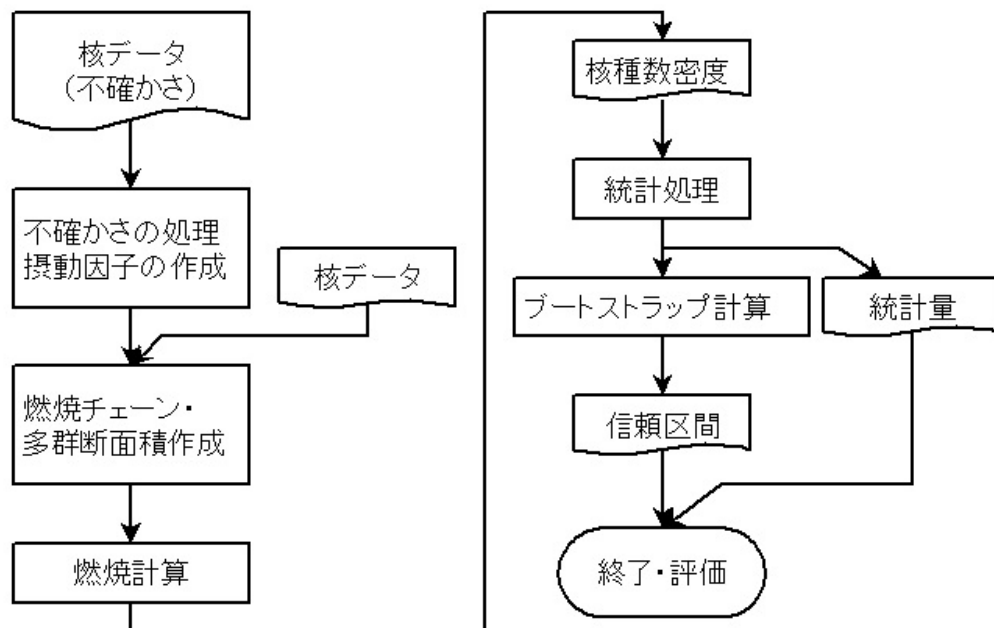


図 3.1 本研究における計算フロー

なお、上記フローにおける核データの摂動処理、核データのインプット、燃焼計算と、核種数密度のアウトプットについては後述の汎用炉物理解析コードCBZを用いて行った。

また、前述の通り入力となる核データは評価済み核データである JENDL-4.0 と一部 ENDF/B-VII.1 を使用した。図3.1中に出力として記載してある核種数密度、統計量、信頼区間はすべて外部ファイルに出力しており、核種数密度については再度読み込みを行っている。

3.2 CBZ コードシステム

CBZ とは本研究室で 2012 年 4 月から開発中の汎用炉物理計算コードである。このコードは臨界、燃焼、遮蔽といった原子炉内とその周囲における中性子やガンマ線の輸送に関わる物理現象を数値的に模擬する機能と、そのために用いられる核データの処理などの幅広い機能を有している。本研究ではその中でも、燃焼計算用の **Burner** というモジュールを用いた。

Burner はピンセル体系の燃焼計算を行うためのモジュール（クラス）で、衝突確率法によって中性子輸送方程式を解くことで中性子束計算を行っている。

また、燃焼後核特性の核データに対する感度を計算するメソッドも実装されており、ランダムサンプリング法によって評価した不確かさとの比較の際に利用した。

3.3 計算体系

本節では燃焼計算の際に設定した体系について記述する。前節でも述べた通り、**CBZ Burner** はピンセル体系で燃焼計算を行うツールであるため、本研究では酸化ウラン燃料を装荷した軽水炉を無限配列単ピンセルモデルとして考えた。詳細を以下に示す。

表 3.1 本研究における計算体系

燃料	UO ₂ 燃料 濃縮度 4.1%
被覆管材料	ジルカロイ
冷却材組成	軽水
ピンセル間の境界条件	等方反射条件
ピンピッチ	0.6325×2[cm]
燃料半径（被覆管込み半径）	0.412[cm]（0.476[cm]）
燃焼ステップ	20
線出力	179[W/cm]

第 4 章 計算結果・考察

本章では不確かさ評価に用いた手法の妥当性検証と、実際の計算体系で評価を行った結果について述べる。4.1～4.2 節においては前提となるランダムサンプリング法と、それに用いる多変量正規乱数の作成法の検証を行った。後の 4.3、4.4 節では実際の不確かさ評価とその考察について述べる。

4.1 ランダムサンプリング法のサンプル数増加による収束の検証計算

前章までに解説した通り、本研究では正規乱数を Box-Muller 法で作成している。本節では、Box-Muller 法にて作成された正規乱数に元の正規分布の再現性があるかを検証し、サンプル数の増加に伴う再現性の向上を確認する。サンプリング数と、統計計算によって得られた平均の変動を次ページの図 4.1.1、分散を図 4.1.2、歪度を図 4.1.3、尖度を図 4.1.4 に示す。なお、図中の横軸と平行な線は Box-Muller 法で正規乱数を作成する時に用いた母集団の平均、分散の参照値である。誤差棒はそれぞれ公式として与えられている式(4.1)、(4.2)を用いて計算しており、互いに 95%信頼区間を示している。

$$\sigma_{\text{誤差 Mean}} = \sqrt{\frac{V_{\text{標本}}}{N_{\text{標本数}}}}$$

(4.1)

$$\sigma_{\text{Variance}} = \sqrt{\frac{2 \cdot V_{\text{標本}}^2}{N_{\text{標本数}} - 1}}$$

(4.2)

また、母集団の統計量として用いた値を以下に示す。

表 4.1 母集団の統計量

平均	5.38
標準偏差	0.55

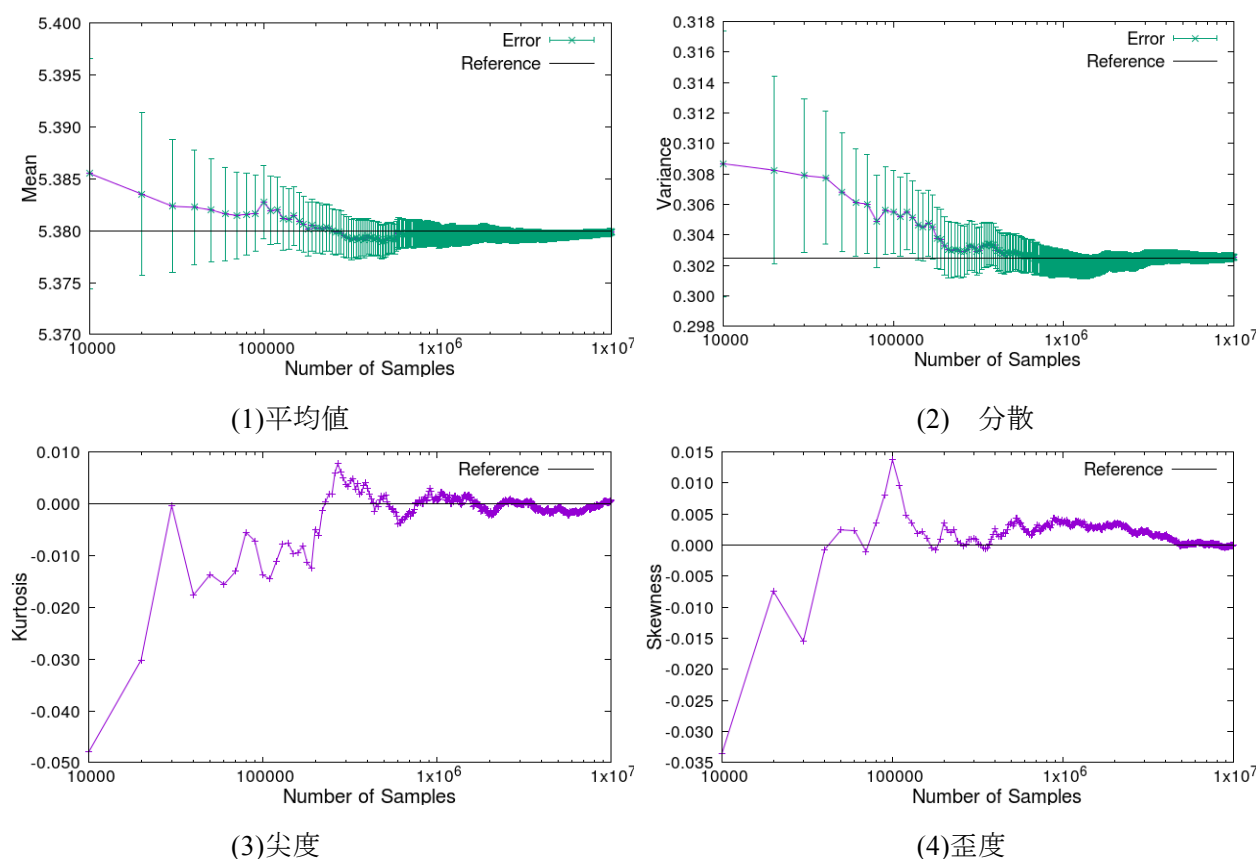


図 4.1.1 標本数増加による統計値の変化

図 4.1.1 よりサンプル数の増加に従ってすべての統計量が母集団の統計値に漸近していること、また平均と分散については信頼区間内に関しても問題なく評価できていることが確認できる。よって、Box-Muller 法にて作成された正規乱数は問題なく今後の不確かさ評価に用いることができると言える。

4.2 対角化による多変量正規乱数の作成検証計算

前節では正規乱数の作成について述べたが、本研究では断面積などの持つ相関についても考慮する必要があるため、多変量正規乱数を作成する必要がある。ここでは、既知である 2×2 の共分散行列を対角化し変換を行うことで作成した乱数が、元の統計的性質を再現しているかについて検証を行う。また、表 4.2 の条件で乱数を作成した。

表 4.2 多変量正規乱数の母集団条件

平均 (E_1, E_2)	5.38	$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 1 \cdot \sigma_1 \sigma_2 \\ 1 \cdot \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3025 & 0.242 \\ 0.242 & 0.3025 \end{pmatrix}$
標準偏差 (σ_1, σ_2)	0.55	
相関(I)	0.8	

なお、表右の行列が母集団の共分散行列で、これを対角化し多変量正規乱数を作成している。4.1 節同様、図 4.2.1 に平均値、標準偏差、相関のサンプル数増加に伴う変動を示す。こちらも平均と標準偏差にエラーバーがついているが、相関に関しては添付していない。

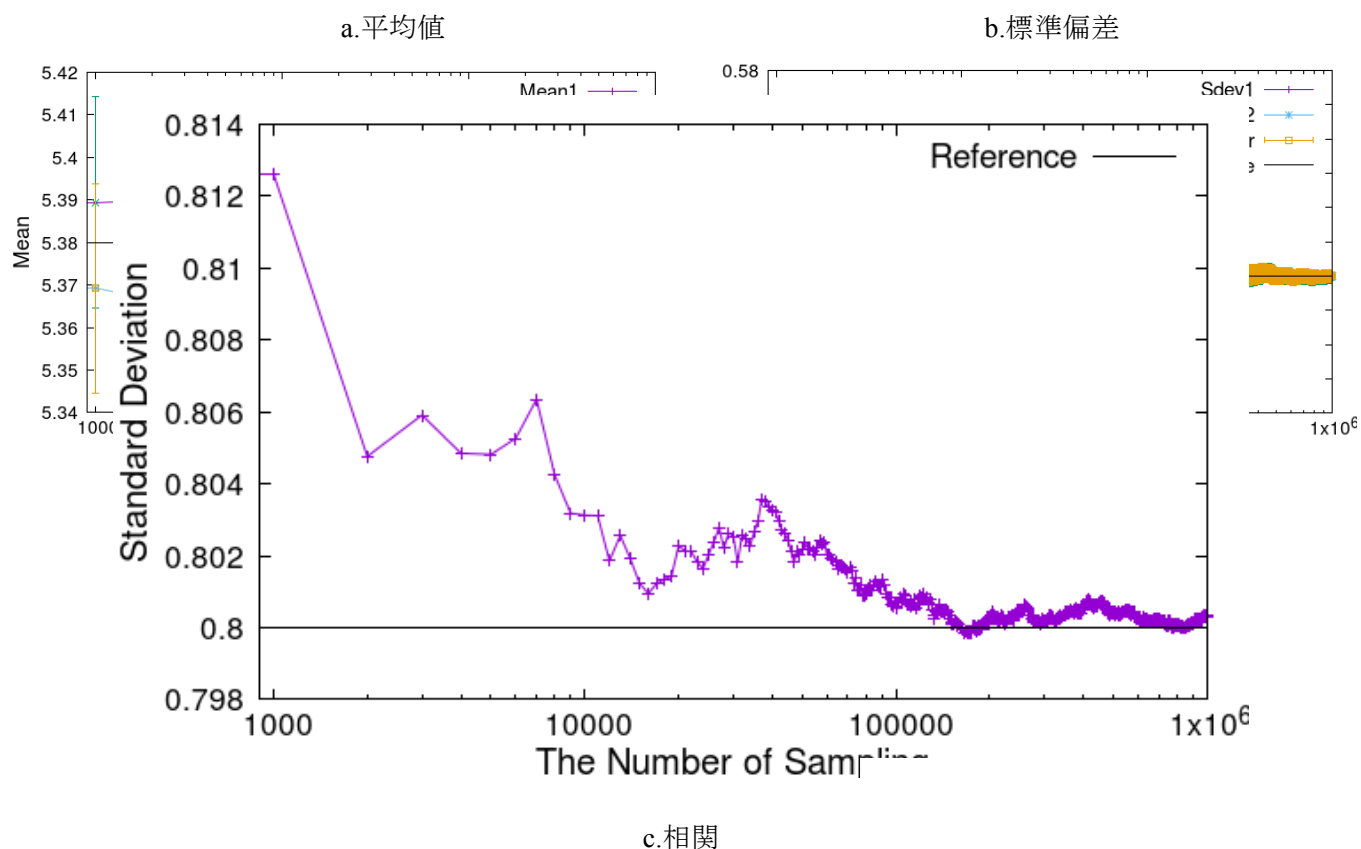


図 4.2.1 標本数増加に伴う統計量の変化

以上の図 4.2.1 より、標本数増加に伴って母集団の条件を標本が再現している様子が読み取れる。加えて、標本のエラーバー内に母集団の値が入っていることが確認できた。

これより、共分散行列の特異値分解による手法で多変量正規乱数が問題なく作成できていると判断した。

4.3 ランダムサンプリング法を用いた燃焼後核種数密度の不確かさ計算

前節までの検討から多変量正規乱数の作成やランダムサンプリング法の妥当性が確認されたので、ここで断面積、核分裂収率、分岐比、崩壊定数の不確かさ全てを考慮した計算を行った。本節では、核種数密度の不確かさ評価を行った 159 の核分裂性核種、FP 核種について得られた不確かさと、非線形性が見られた幾つかの核種について考察を述べる。

4.3.1 計算結果

詳細な数値結果は付録に示すが、感度係数を用いた手法と照合した結果おおよその核種と同様の不確かさが得られた。図 4.4.1～4.4.6 に不確かさ評価を行った全核種の歪度 (Skewness)と尖度(Kurtosis)を示す。また、図中の誤差棒は 95%信頼幅を示している。

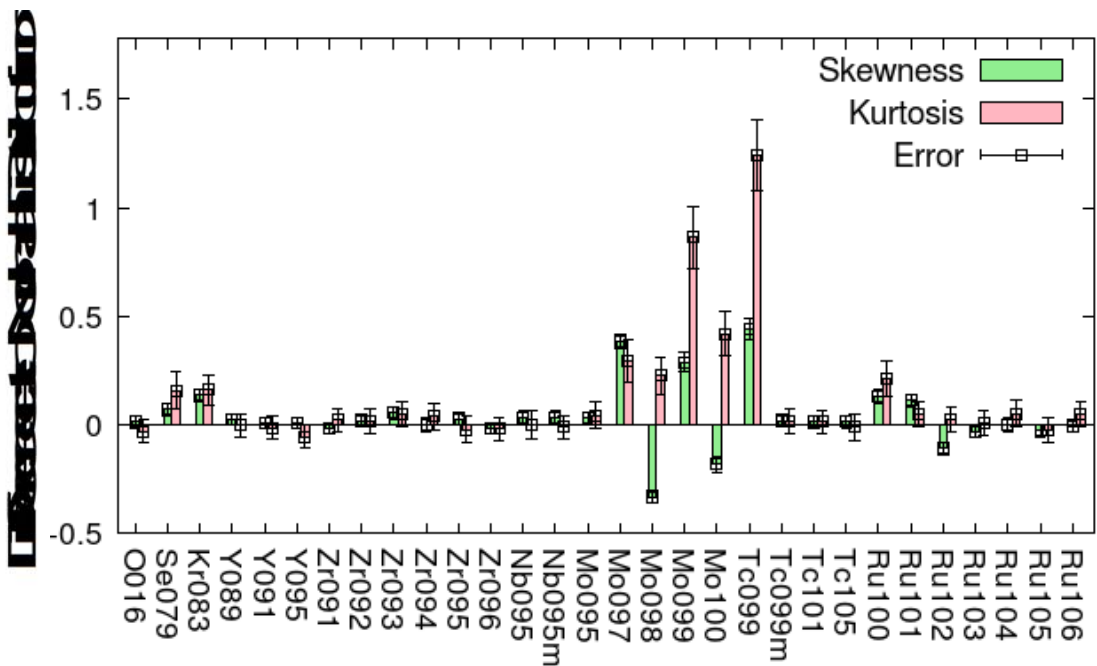


図 4.3.1 核種毎の歪度、尖度 1

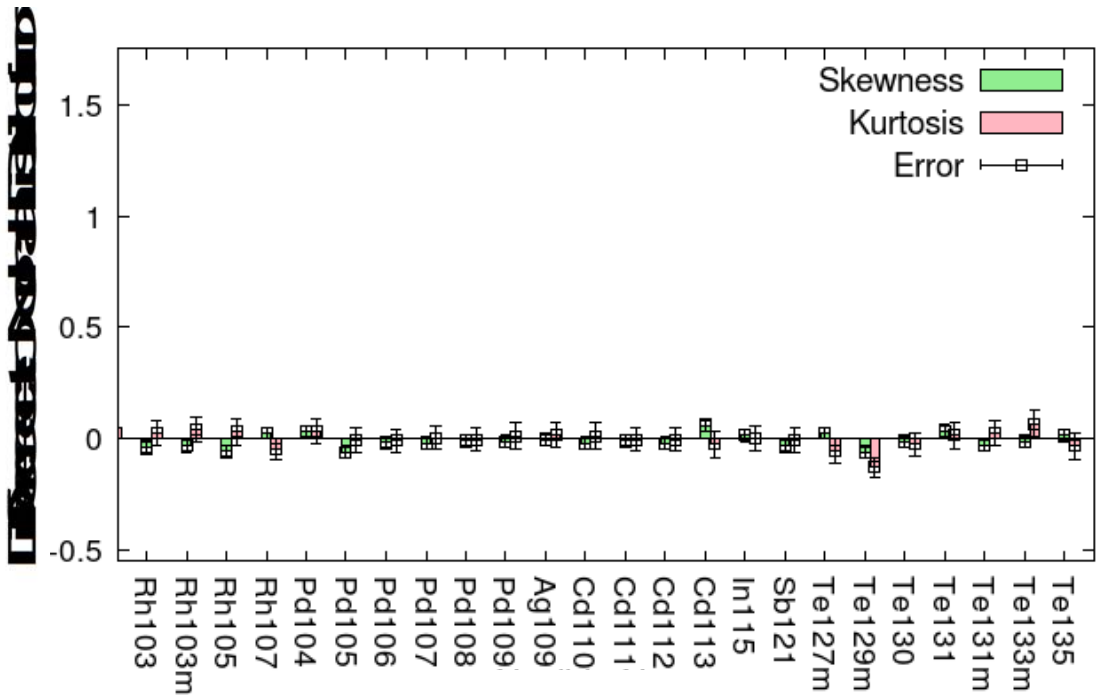


図 4.3.2 核種毎の歪度、尖度 2

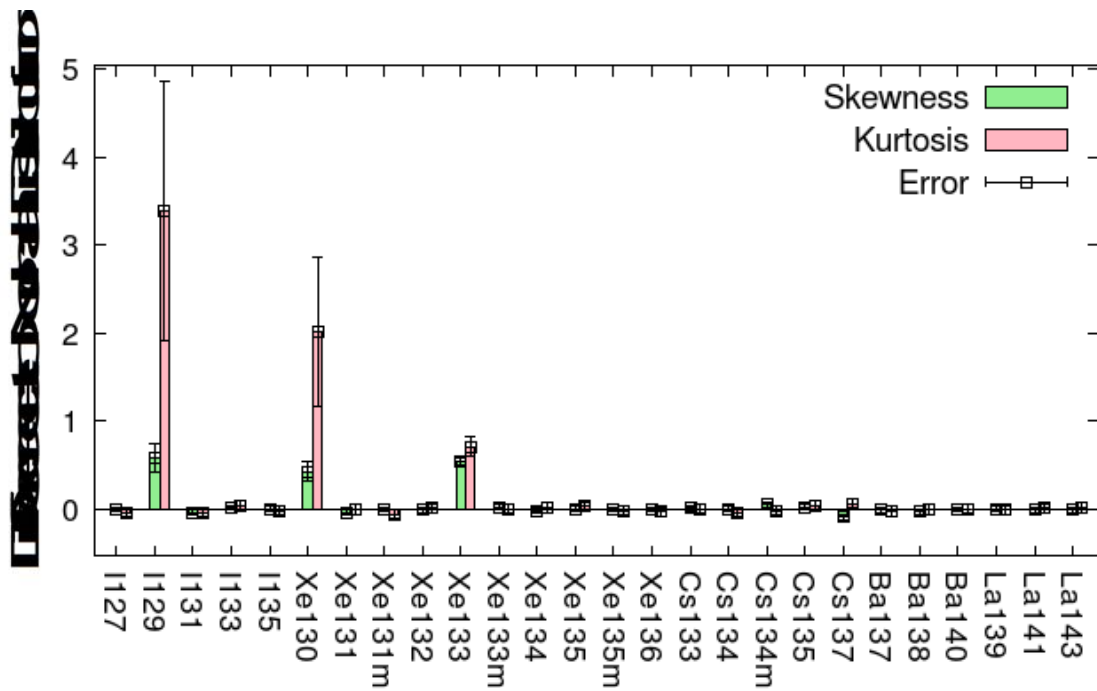


図 4.3.3 核種毎の歪度、尖度その 3

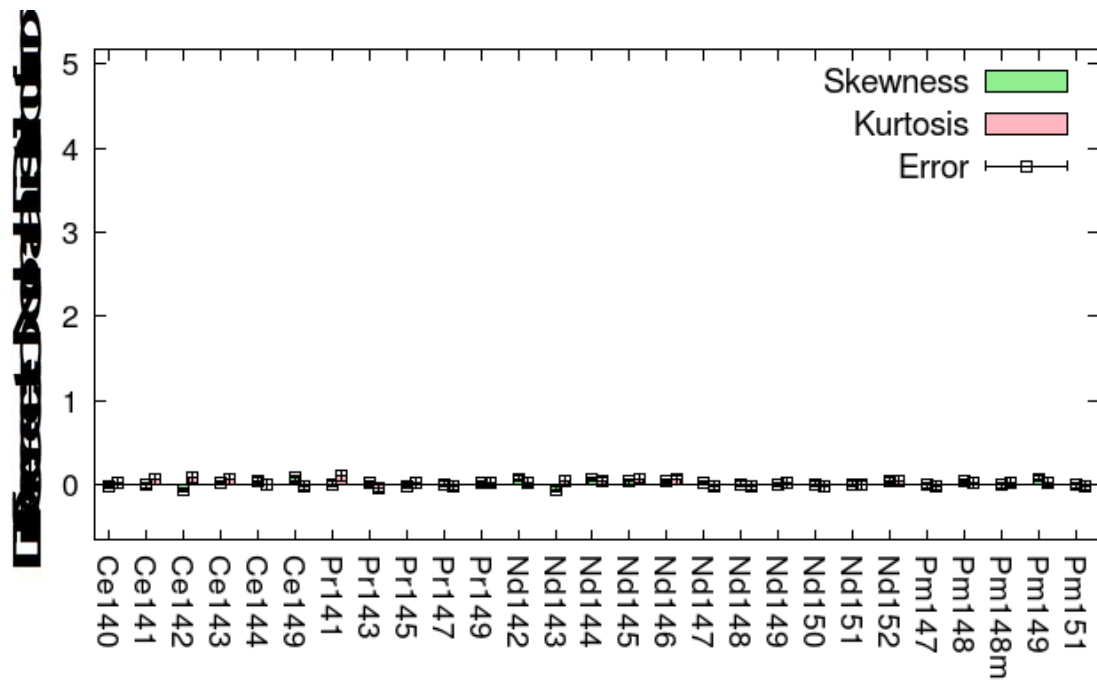


図 4.3.4 核種毎の歪度、尖度 4

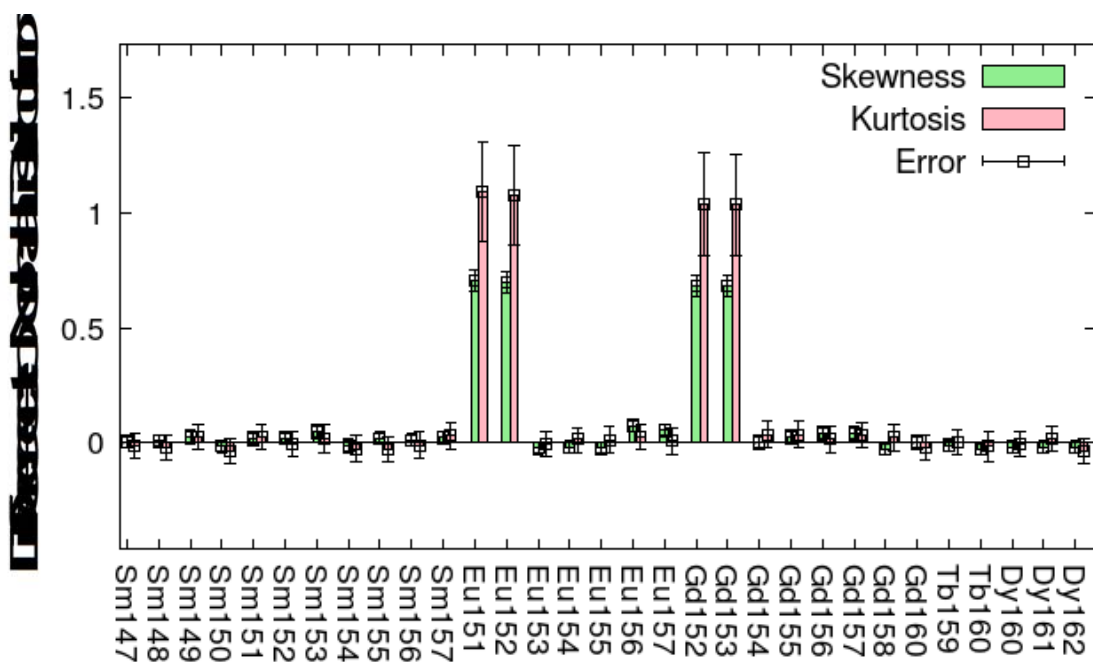


図 4.3.5 核種毎の歪度、尖度 5

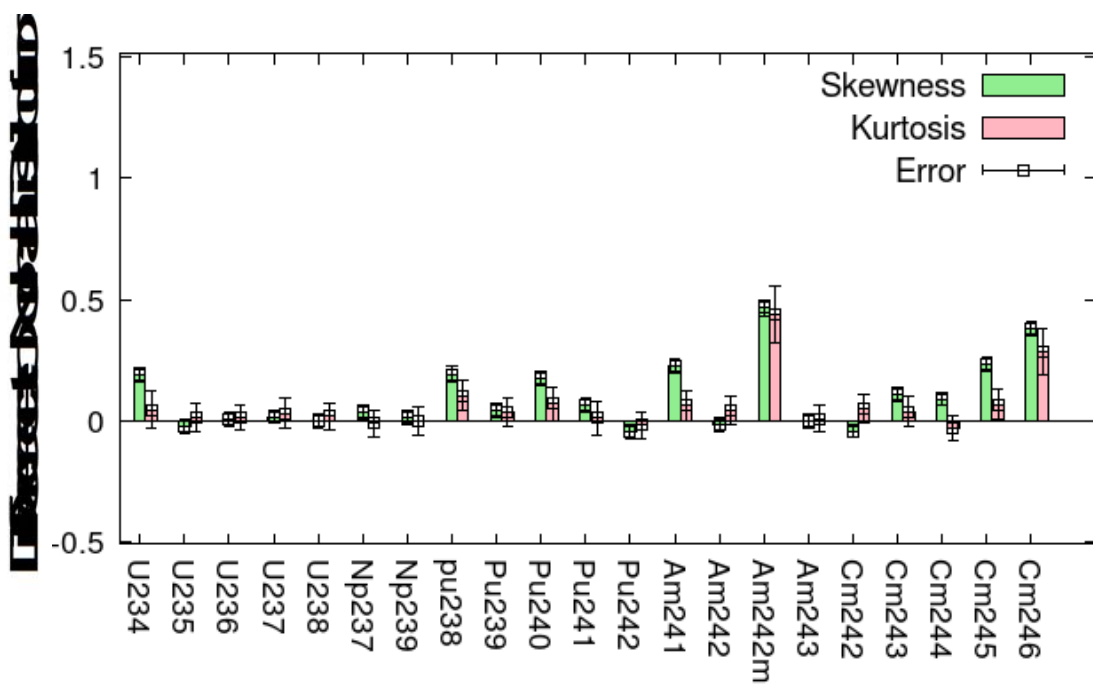


図 4.3.6 核種毎の歪度、尖度 6

図 4.3.1～4.3.6 より、一部を除くおよその核種で歪度、尖度ともに信頼区間内においては 0 を示し、正規性が有意であると言える。(頻度分布は付録に添付)

ここで、特に非正規性が有意である可能性の高いものについて図 4.3.7 に示す。

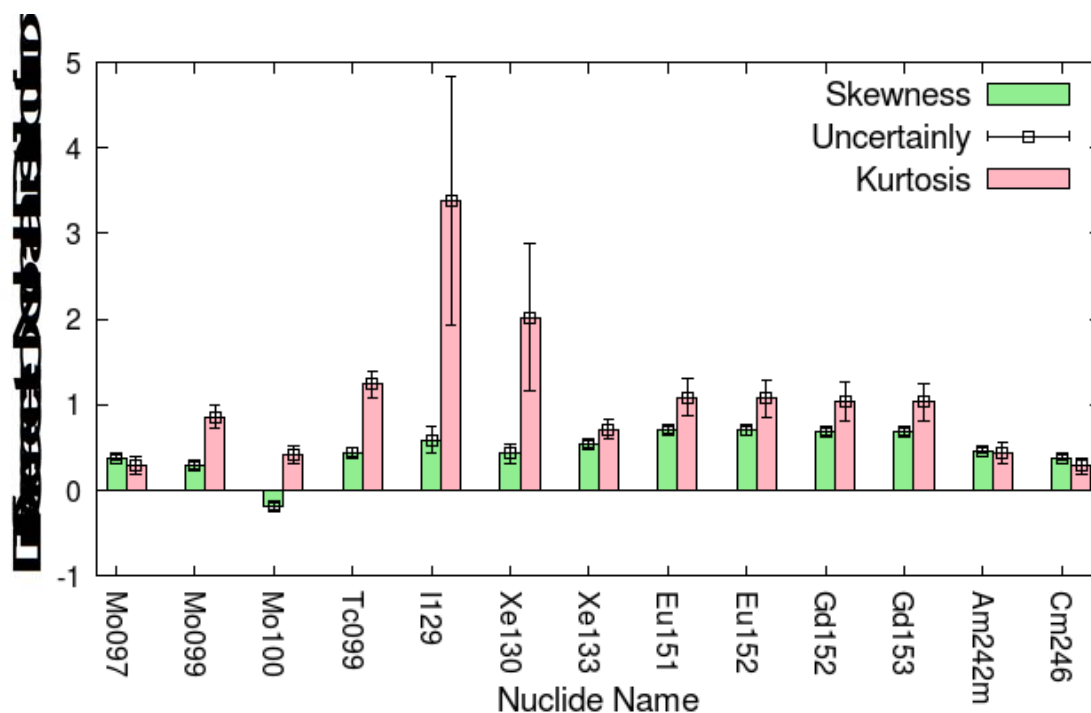
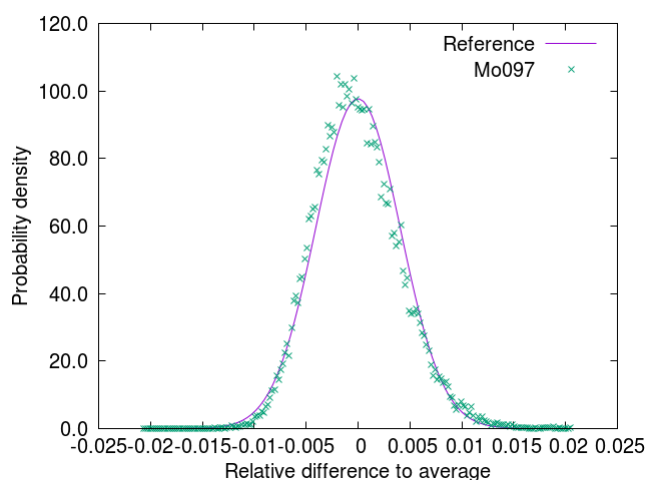


図 4.3.7 核種毎の歪度、尖度（抽出）

上の図から、Mo-97 から Tc-99、Xe-130 と I-129、Eu-151 から Gd-153 までと燃焼チェーンにおいて近くに存在する核種に集中して見られることが読み取れる。ここで、以上の核種の頻度分布を図 4.3.8～4.3.20 において示した。

図中の Reference は 30000 サンプルに対して得られた分散に従う正規分布を示している。横軸における 0 がサンプルの平均値に対応する。



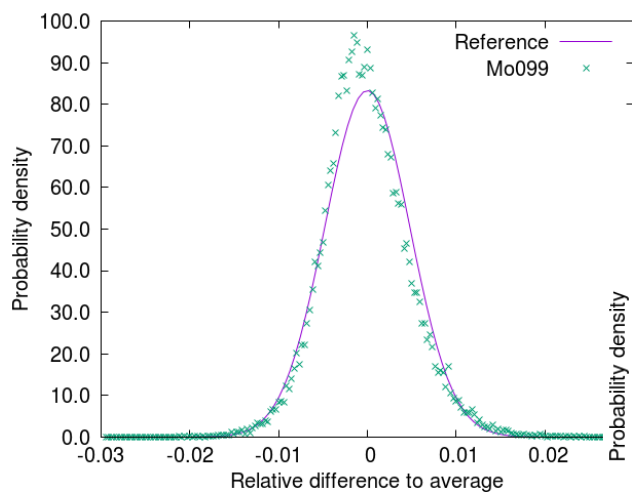


図 4.3.10 Mo-100 頻度分布

図 4.3.11 Tc-99 頻度分布

図 4.3.12 I-129 頻度分布

図 4.3.8 Mo-97 頻度分布

図 4.3.9 Mo-99 頻度分布

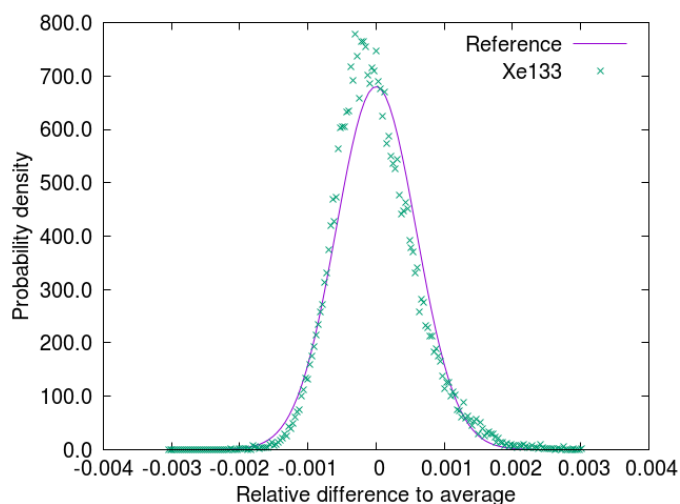
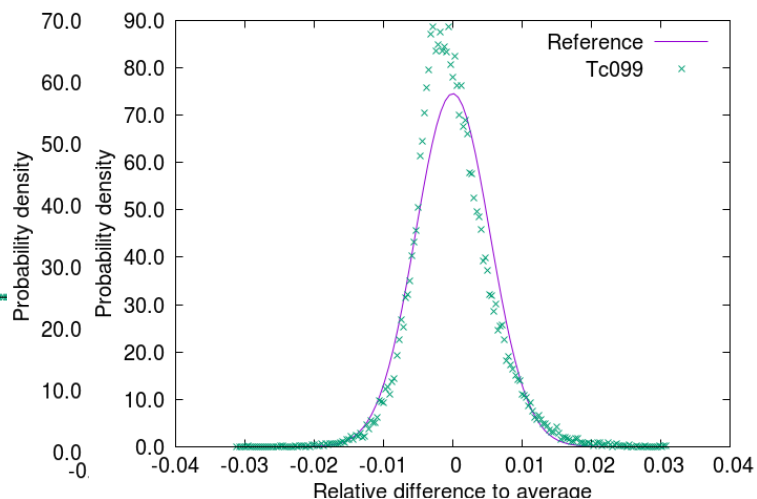


図 4.3.13 Xe-130 頻度分布

図 4.3.14 Xe-133 頻度分布

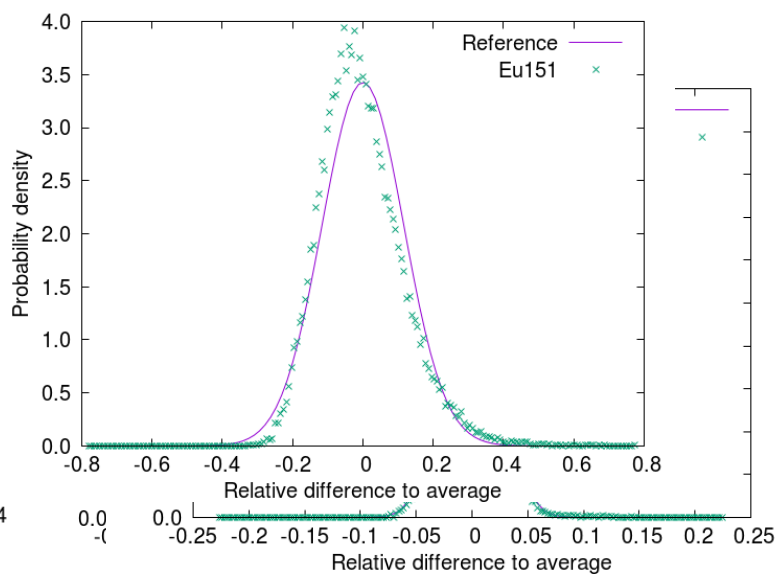


図 4.3.15 Eu-151 頻度分布

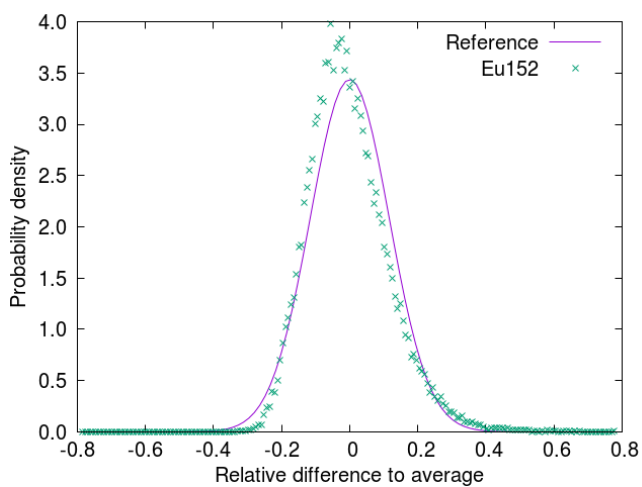


図 4.3.16 Eu-152 頻度分布

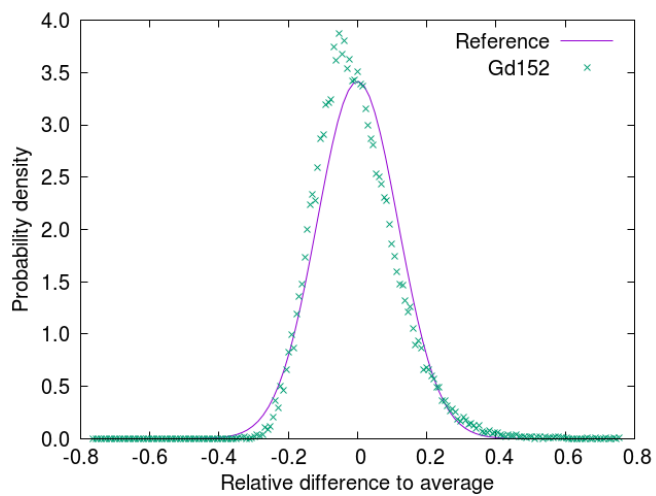


図 4.3.17 Gd-152 頻度分布

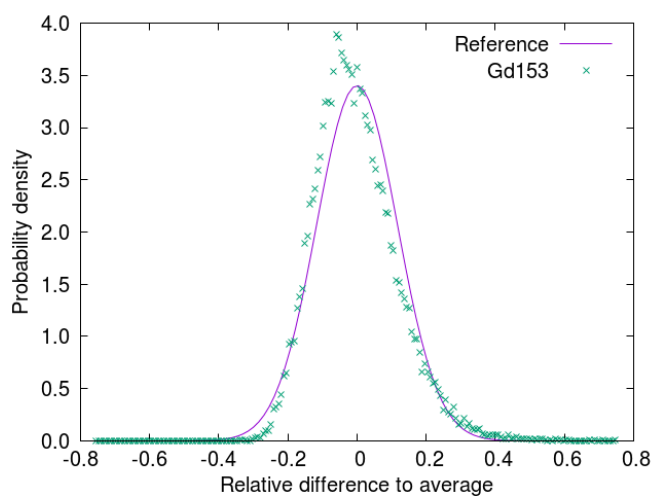


図 4.3.18 Gd-153 頻度分布

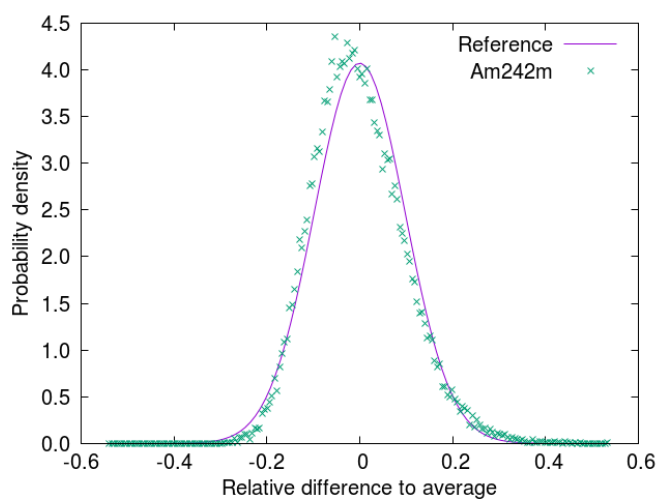


図 4.3.19 Am-242m 頻度分布

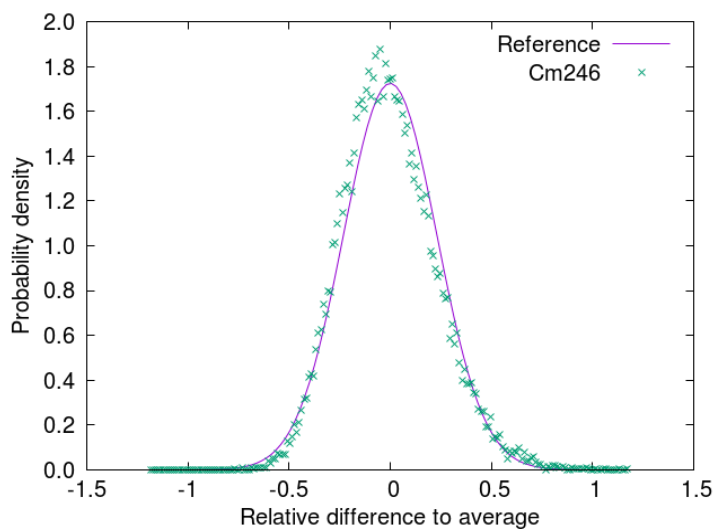


図 4.3.20 Cm-246 頻度分布

頻度分布を確認した結果、Mo-100 については正の方向へ歪む結果が、I-129 と Xe-130 を除くその他の核種では頻度分布が負の方向へと偏る傾向が見られた。また、I-129 と Xe-130 については非正規性を目視によって確認することはできなかった。

4.3.2 非正規性の見られた核種の考察

結果より、いくつかの核種については明らかな非正規性が確認された。ここではその原因について考察を行う。

4.3.2.1 Eu-151、Eu-152、Gd-152、Gd-153

上記の 4 核種は図 4.3.7 に示されるように、似通った傾向を示した核種である。また、これらの核種は核分裂連鎖反応において、分裂片として生じる他に、Eu-151 を起点とする（正確にはより上位の核種）核壊変によって生じる割合が大きい。詳細は後述するが、Eu-151 の非正規性が他 3 核種についても伝播したのではないかと考えられる。

Eu-151 の非正規性については、Sm-151 の半減期の不確かさが大きな原因であると推察された。その理由を以下に示す。

まず、Eu-151 の核種数密度不確かさが入力核データのどの不確かさに起因しているのかを調べるために、不確かさを考慮する要素をそれぞれ絞った計算を行った。その結果が以下の表 4.2 の通りである。

表 4.2 Eu-151 の要因別不確かさ評価

考慮条件	核種数密度[$10^{24}/\text{cm}^3$]	相対標準偏差	歪度	尖度
全て	5.679×10^{-10}	1.16×10^{-1}	0.707	1.09
断面積	5.614×10^{-10}	3.25×10^{-2}	0.085	-0.016
半減期	5.695×10^{-10}	1.08×10^{-1}	0.608	0.819
核分裂収率	5.617×10^{-10}	5.93×10^{-4}	0.060	0.032
分岐比	5.617×10^{-10}	2.15×10^{-4}	0.012	-0.029

上表より、Eu-151 の核種数密度不確かさは入力核データの半減期の不確かさに起因していることが分かる。同様の計算を他 3 核種についても行い、各核データの不確かさが出力数密度に与える影響を下図 4.3.21 に示した。また、図において、全て考慮して計算した際の標準偏差が 1 となるように規格化を行っている。

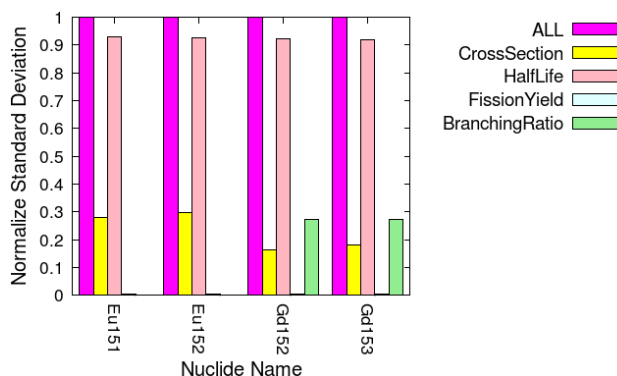


図 4.3.21 不確かさの起因割合

前頁図 4.3.21 より、本節で扱う 4 核種の数密度不確かさが全て半減期の不確かさを起因としていることが読み取れる。

ここで、Eu-151 の燃焼時の生成、消滅の経路を下に示す。

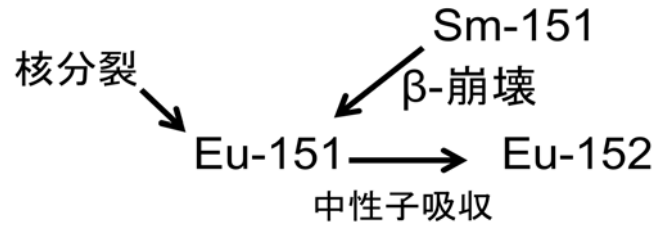


図 4.3.22 Eu-151 の生成と消滅に関わる燃焼チェーン

上図より、Eu-151 は核分裂による生成と、Sm-151 の β 崩壊によって生じていることが分かる。ここで、Sm-151 の崩壊について考える。Sm-151 の半減期を $T_{1/2}$ として、崩壊の式を記述すると以下の式 (4.4) のようになる。

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \quad (4.4)$$

式(4.4)において、 $N(t)$ は崩壊によって t 秒後に残る原子の数、 N_0 は初期状態の原子の数を示している。ここで、 t 秒後に生成する Eu-151 の数 $N_0 - N(t)$ を改めて $N(t)$ と定義して、テーラー展開すると以下のように記述できる。

$$N(t) = N_0 - N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = N_0 \left(\frac{-\ln 2}{1! (T_{1/2})} t + \frac{(-\ln 2)^2}{2! (T_{1/2})^2} t^2 + \frac{(-\ln 2)^3}{3! (T_{1/2})^3} t^3 + \dots \right) \quad (4.5)$$

加えて、Sm-151 の半減期が 90 年と、燃焼の期間と比べて長いことから $\frac{t^2}{(T_{1/2})^2}$ 以降の項が非常に小さな値を取り、二次以降の項の影響が小さくなると考えられることから、(4.5) 式は燃焼を考える中で、下式のようにみなすことができる。(式 4.6)

$$N(t) = N_0 \frac{-\ln 2}{1! (T_{1/2})} t \quad (4.6)$$

ここで知りたいのは半減期と核種数密度の関係であるため、上式はいわゆる $y=1/x$ のような形の式となる。つまり、半減期が 2 倍の時は核種数密度が 1/2 倍になるという非線形の関係を示している。そこで、一定期間後（ここでは、1 年後としている）の Eu-151 の数密度（Sm-151 の崩壊のみによって生じるもの）と半減期の関係考えた。

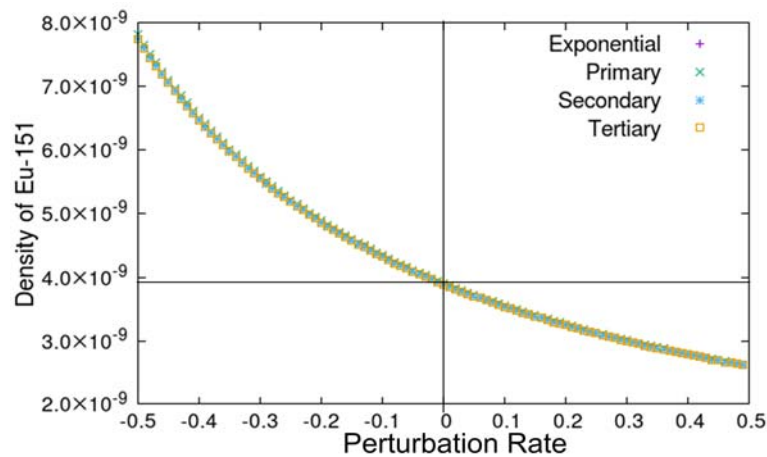


図 4.3.23 半減期の摂動量と、燃焼後核種数密度の変化

上図 4.3.23 は一定量の Sm-151 が崩壊して一年後に生じる Eu-151 の数密度について、計算を行ったものである。縦軸が Eu-151 数密度、横軸が 0 を基準として半減期に摂動を与えた量を示している。

図から明らかである通り、半減期に与えた摂動と結果変動する核種数密度の間に線形性は存在しない。しかし、本研究（を始めとする不確かさの取り扱い）においては、半減期の不確かさは横軸を線形に取った正規分布を仮定しているため、半減期の期待値+ δ と期待値- δ の値を取る確率というものは等しくなる。これにより、ある期待値に対する正側と負側が同様の確率で生じた結果、全体としては核種数密度が増える方向に偏る結果を示したのだと考えることができる。よって平均値が正の方向へとシフトし、最頻値が平均よりも少ない箇所に出てきたのだと考えられる。

また、Sm-151 にはそれに対応する偏りが見られなかったが、これは Sm-151 燃焼後核種数密度が Eu-151 と比べて 1000 倍近く大きく、崩壊による減少が Sm-151 の燃焼後核種数密度に与える影響が小さかったためだと考えられる。参考として、以下に Sm-151 と Eu-151 の統計値を示す。（表 4.3）

表 4.3 Sm-151 と Eu-151 の比較

	核種数密度	標準偏差	歪度	尖度
Sm-151	5.01711×10^{-7}	0.015	0	0
Relative Error[%]	0.009	0.41	76.6	98.5
Eu-151	5.6784×10^{-10}	0.116	0.706	1.09
Relative Error[%]	0.068	0.505	3.27	9.92

次に、残りの 3 核種についてだが、図 4.3.24 に示したチェーンの通り、核分裂による生成を除き、Eu-152 は Eu-151 の中性子捕獲、Gd-152 は Eu-151 の β 崩壊、Gd-153 は Gd-152 の中性子捕獲によって生じるものが大半を占めている。よって、これらの核種については、Eu-151 が非正規性を示す分布となった結果、それが伝播したものと思われる。

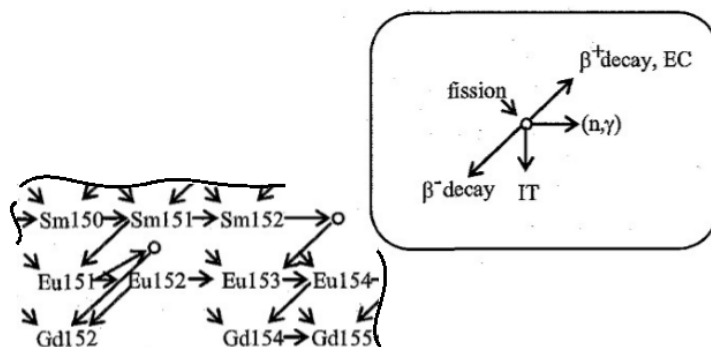


図 4.3.24 Eu-151 周辺の崩壊チェーン

4.3.2.2 I-129 と Xe-130

この節で、一度抽出された 13 核種の不確かさが入力核データのどこを起因としているか計算を行った結果を示す。(下図 4.4.25)

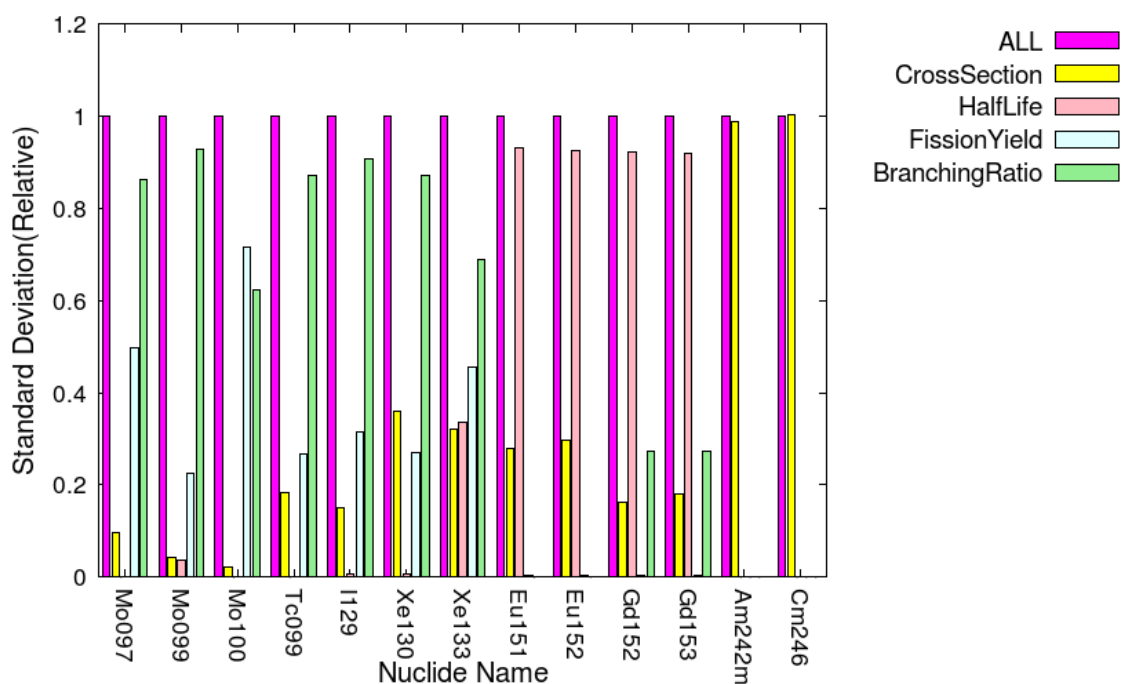


図 4.3.25 起因別不確かさ評価

上図からも分かる通り、FP 核種で前節に述べた 4 核種を除いた核種は殆どが分岐比を起因としていることが読み取れる。また、自明ではあるが、核分裂性核種については断面積の不確かさが大きく起因していることが分かる。

本節で扱う I-129 と Xe-130 についても、分岐比の不確かさを起因とする不確かさが大きく効いており、燃焼チェーンから考えた結果、Sb-129 の分岐比が大きく不確かさに起因していることが分かった。

次頁の図 4.3.26 に燃焼チェーン、表 4.4 に計算の結果を示す。

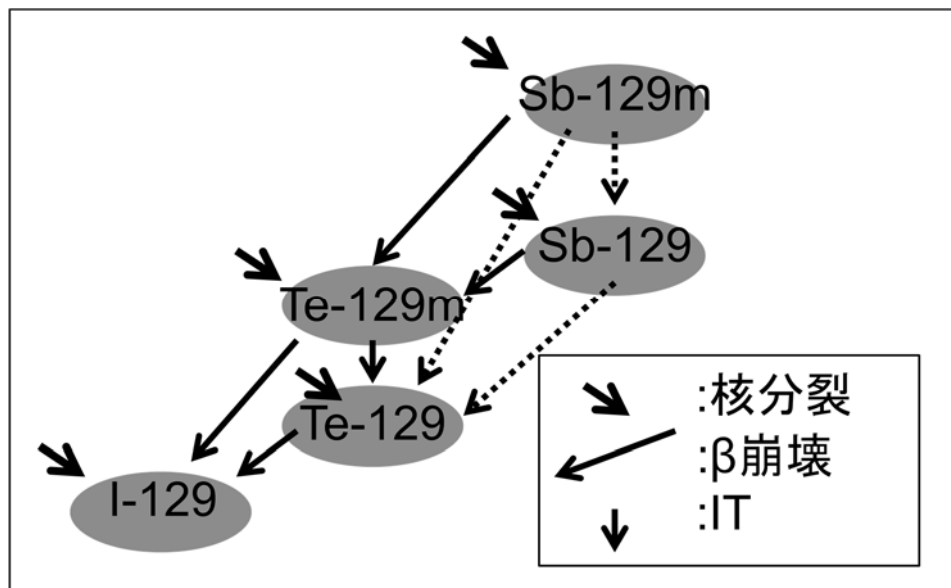


図 4.3.26 I-129 の生成に関わるチェーン

上図に示した核種のうち、FP-138 チェーン[6]で考慮されているものは Te-129m と I-129 のみである。よって、破線部の経路によって Te-129 から I-129 へと崩壊するものは燃焼チェーンを作成する際に全て I-129 の核分裂収率として扱われることとなる。また、実線を通して Te-129m となる経路に関しては Te-129m の核分裂収率として扱われることとなる。

ここで、分岐比すべての不確かさを考慮した計算結果と、Sb-129 のみ、Sb-129m のみの不確かさを考慮した計算結果を以下表 4.4 に示す。

表 4.4 I-129 の不確かさ

条件	数密度	相対偏差[%]	誤差[%]	歪度	誤差[%]	尖度	誤差[%]
全て	7.935×10^{-6}	2.07	1.32	0.64	26.5	4.21	40.1
分岐比全	7.937×10^{-6}	1.86	1.39	0.29	50.8	1.97	57.7
Sb-129	7.931×10^{-6}	1.85	1.95	0.17	81.3	0.99	69.8
Sb-129m	7.931×10^{-6}	0.19	4.46	0	243	-0.41	41.2

上表より、I-129 の核種数密度不確かさが主に Sb-129 の分岐比不確かさに起因していることが分かる。しかし、尖度に関しては影響が大きいと言い切るだけの結果を得ることはできなかった。また、Sb-129 と Sb-129m の不確かさを同時に考慮した場合の尖度が $2.9 \pm 79[\%]$ と大きな値を示すことから、複合的な要素が尖度の大きさに影響を与えているのではないかと考えられる。

以上より、I-129 に関してはより調査を行う必要があり、分岐比の不確かさに起因する核分裂収率の不確かさを統計的に扱うことで、I-129 の（ひいては Xe-130 の）非正規性を示す原因の特定につながるのではないかという知見が得られた。

4.3.2.3 Mo-97、Mo-99、Mo-100、Tc-99 について

図 4.4.25 より Mo-97、Mo-100 は核分裂収率と分岐比、Mo-99 と Tc-99 は分岐比の不確かさを起因としている数密度の不確かさを持っている。ここで、Mo-97～Mo-100 については Mo-99 を除くすべての核種が安定同位体（もしくは長半減期核種）であり、Mo-99 のみは 3 日程度という短い半減期でベータ崩壊を起こし、Tc-99 となる。

下図 4.3.27 にチェーンを示したが、核種名の後ろに m が付きされているものは meta を意味している。

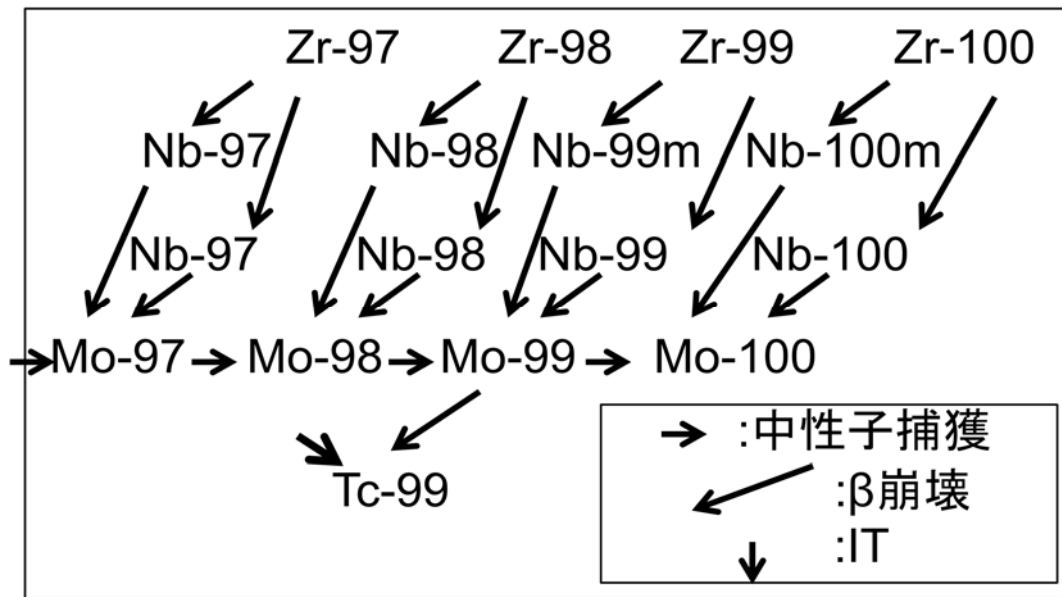


図 4.3.27 Mo の生成に関わるチェーン

また、計算の結果から Mo 同位体間の中性子捕獲による核種変換は殆どないものと考えてよい。以上より、Tc-99 は Mo-99 の非正規性が伝播したもの、Mo 同位体に関してはチェーンにて考慮していない Nb や Zr の同位体（特に Zr の分岐比）が Mo 同位体の収率に不確かさを与えているのかを検証する必要がある。また、Mo-98 と Mo-100 については歪度が負を示すという特徴があり、こちらについても検証を行う必要がある。

4.4 リバースサンプリング法の検証計算

2.3 節で説明した、リバースサンプリング法の検証を行った。条件は 4.3 節で示した燃焼計算と同様で、乱数の取り方のみを変更している。また、サンプル数はともに最大 5000 で比較している。(すなわち、リバースサンプリング法について作成した乱数は 2500 となる)

4.4.1 単純なモデルでの検証

実際、本研究で行ったような断面積、収率、半減期、分岐比すべてを考慮した計算に適用する前に、U238 の中性子捕獲断面積のみに摂動を与えた計算にリバースサンプリング法を用いた。また、結果として出力しているのは変化が大きく傾向が目立って見られた Pu240 である。この不確かさ考慮の場合は、入出力間の正規性を前提として考える。

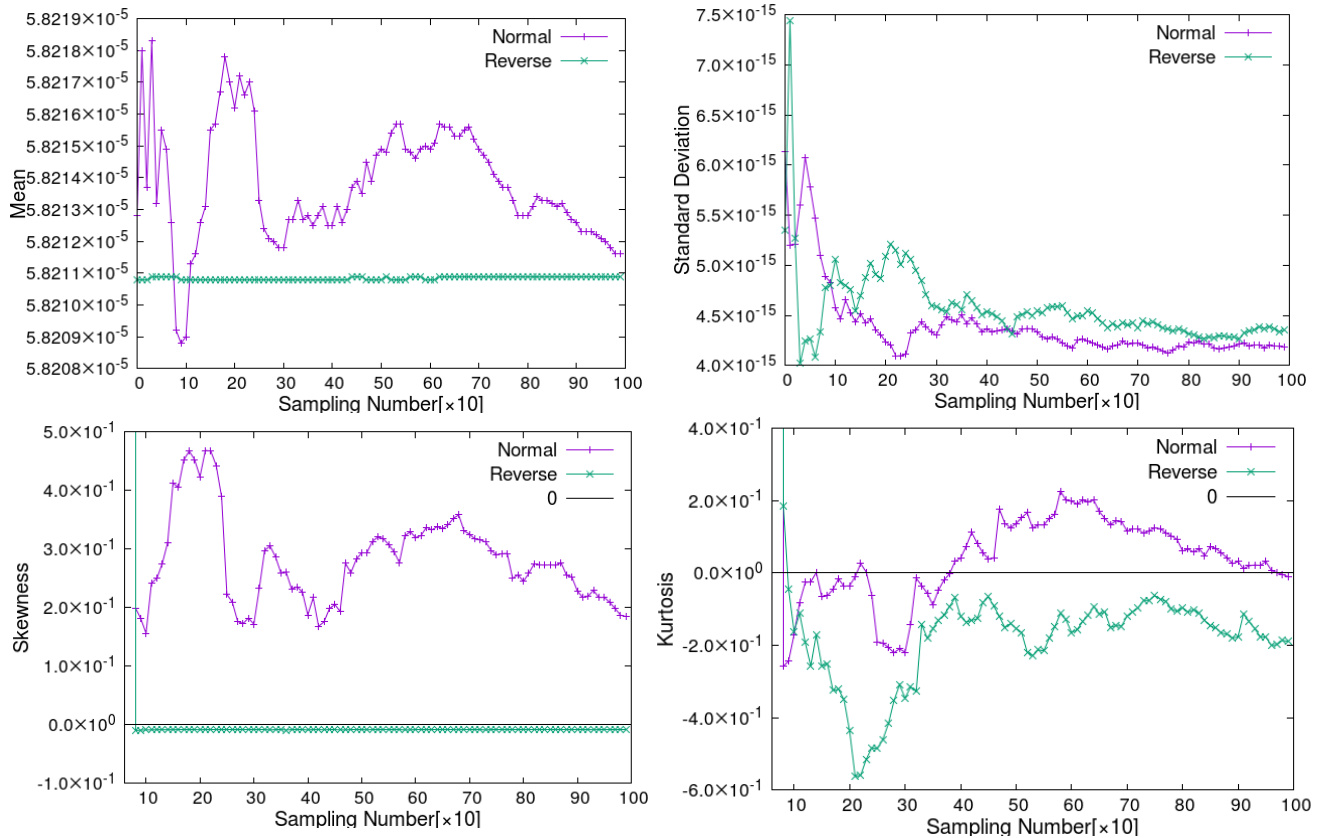


図 4.5.1 リバースサンプリング法を用いた際の収束比較

上図からも明らかであるように、平均値と歪度に関しては（奇数次のモーメント、つまり正負の方向）非常に速い収束が見られた。しかし、偶数時のモーメントに関しては、収束が遅くなっているようにも見える。

4.5.2 不確かさ評価での検証計算

ここで、実際の不確かさ評価に適用した結果を示す。

サンプル数の増加と、各統計量の変動をランダムサンプリング法で比較した結果を図に示す。Reference は通常の 30000 サンプルで計算を行った値を用いている。

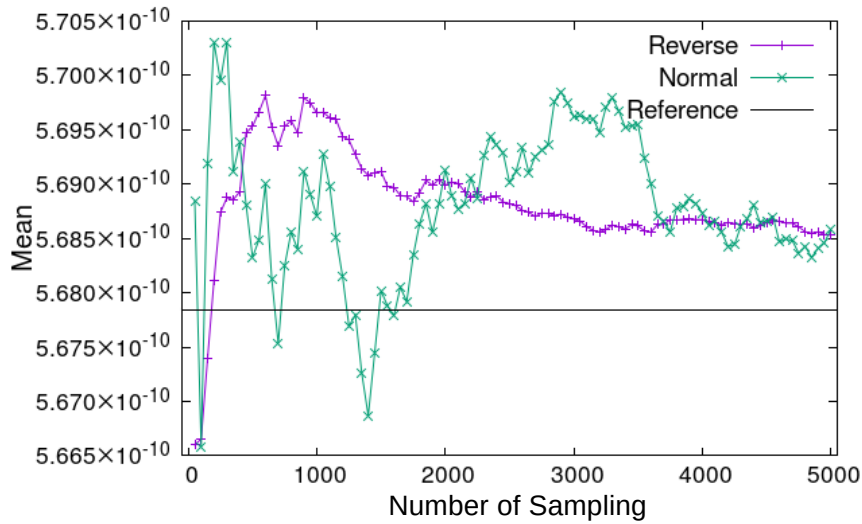


図 4.5.2 Eu-151 の標本数増加に伴う収束の比較（平均）

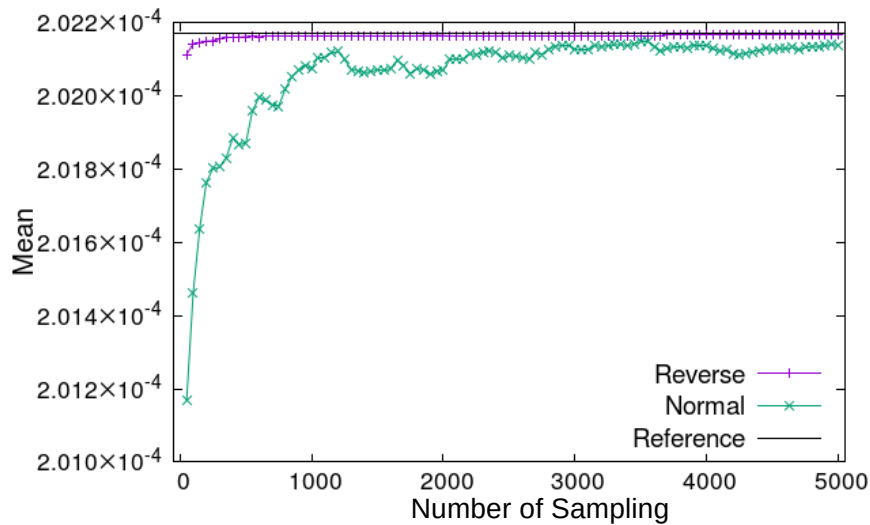


図 4.5.3 U-235 の標本数増加に伴う収束の比較（平均）

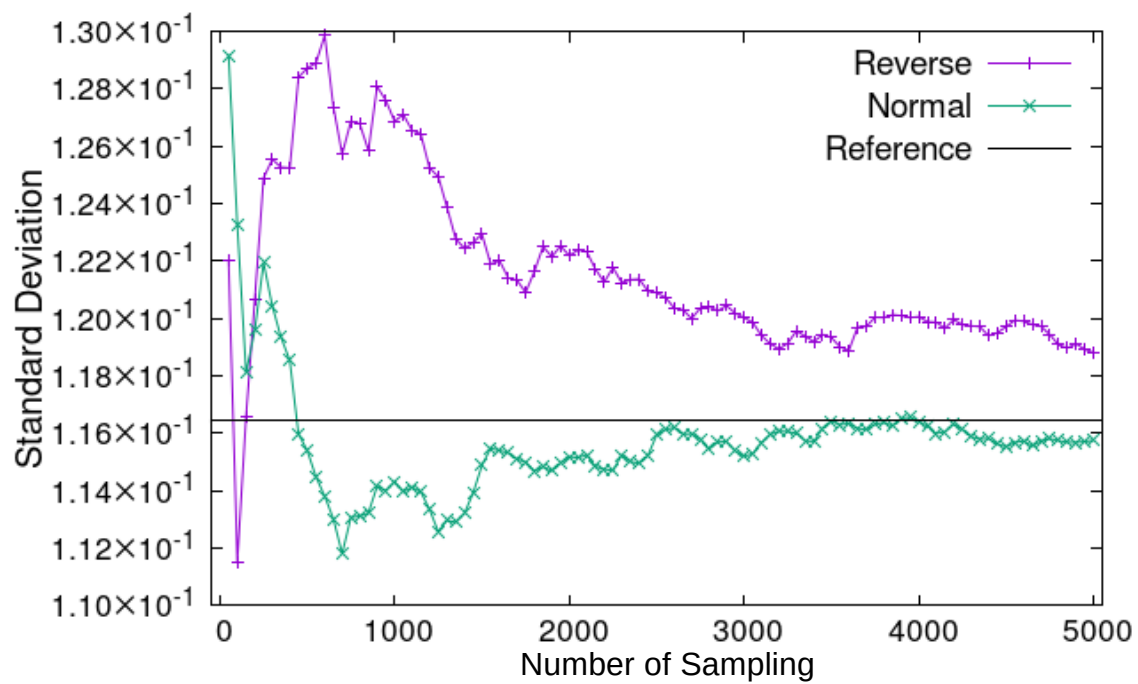


図 4.5.4 Eu-151 の標本数増加に伴う収束の比較（標準偏差）

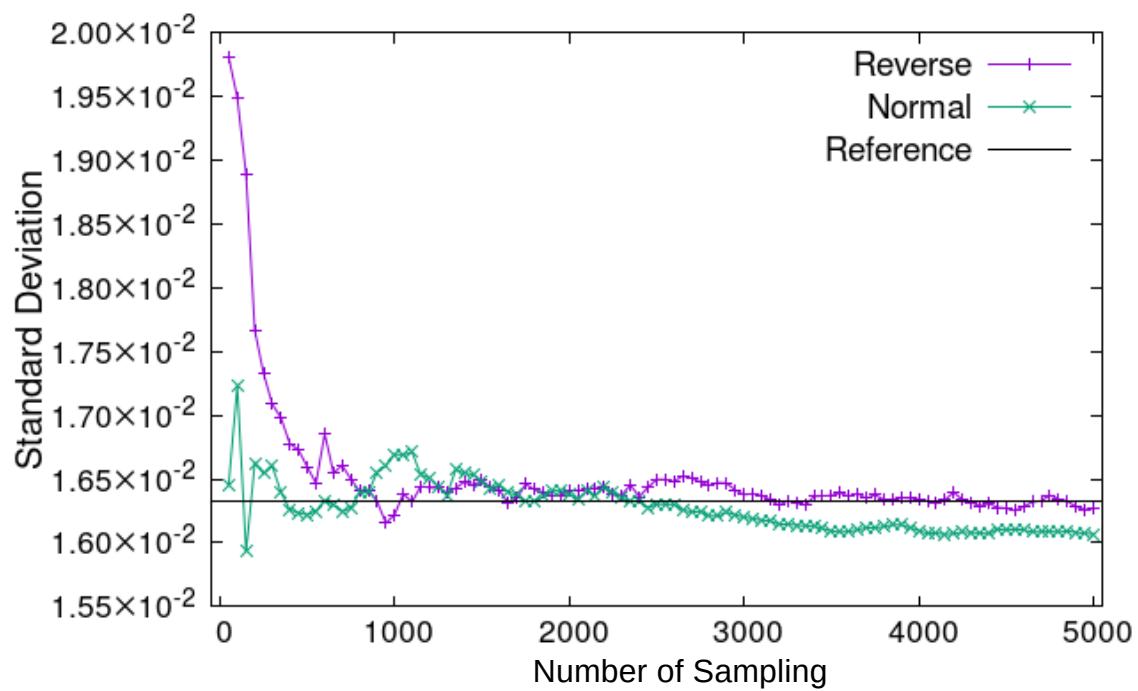


図 4.5.5 U-235 の標本数増加に伴う収束の比較（標準偏差）

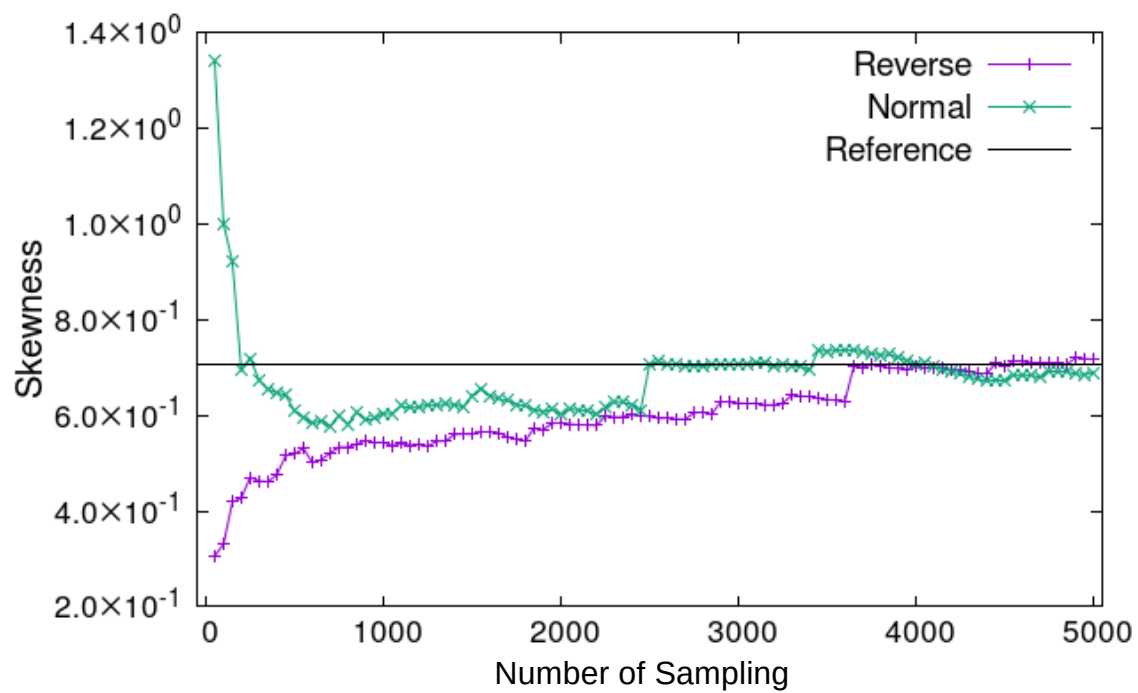


図 4.5.6 Eu-151 の標本数増加に伴う収束の比較（歪度）

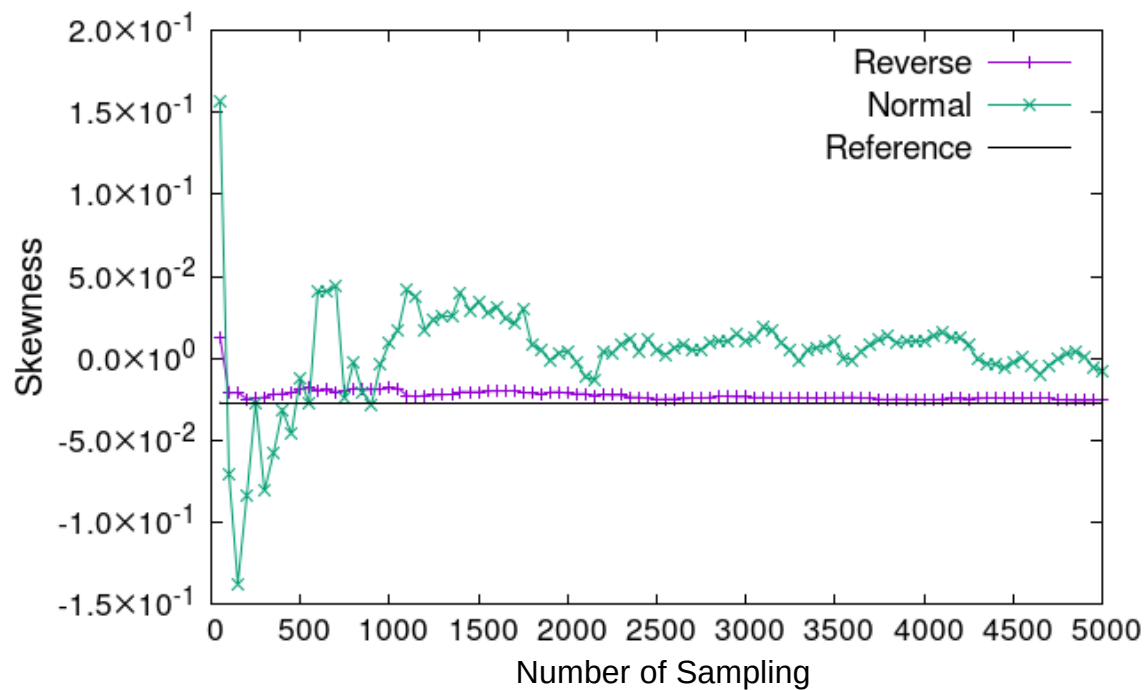


図 4.5.7 U-235 の標本数増加に伴う収束の比較（歪度）

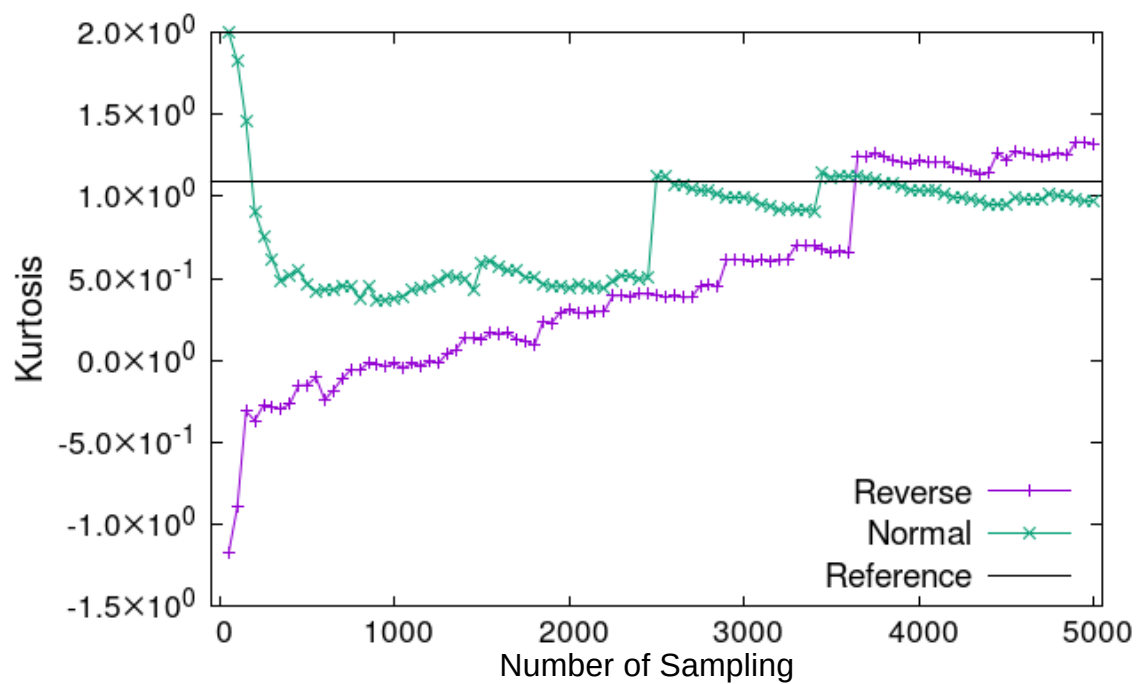


図 4.5.8 Eu-151 の標本数増加に伴う収束の比較（尖度）

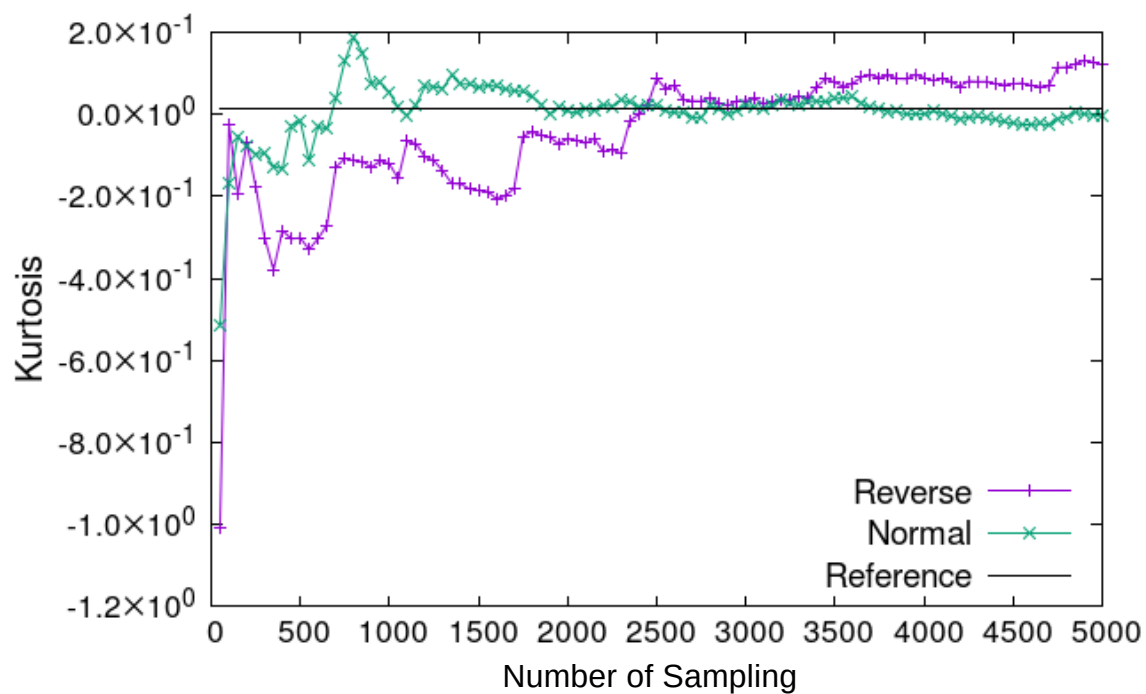


図 4.5.9 U-238 の標本数増加に伴う収束の比較（尖度）

正規性の強い核種に関しては、単純なモデル時と同様に平均値と歪度の収束が非常に早くなっていることが確認できた。標準偏差と尖度については特にそういった効果は見られなかった。

また、非正規性の強い核種（Eu-151）については、全ての統計量において収束が早くなるような効果は見られなかった。また、歪度と尖度に関しては、通常のサンプリングとリバースサンプリングで得られたグラフの形状に一部類似した箇所が見られた。どちらのグラフにおいても、通常のサンプリングよりもサンプル数が増加した点でそのような現象が観測された。

4.5.2 計算上の考察

ここで、リバースサンプリング法の有用性を考えるために線形非線形による不確かさ伝搬についてテーラー展開を用いて整理する。

まず、入力値を a 、出力値を p として以下のような関係式（式 4.7）を考える。

$$\begin{aligned} p &= f(a) \quad (p \text{ は } a \text{ の値によって一意に決まる関数である}) \\ f(\bar{a}) &= \bar{p} \quad (\text{入力の平均 } \bar{a} \text{ の時の出力値は } \bar{p} \text{ となる}) \\ \Delta a_i &= a_i - \bar{a} \quad (i \text{ 番目のサンプル } a_i \text{ と平均値の差を } \Delta a_i \text{ と表す}) \\ \Delta p_i &= p_i - \bar{p} \quad (a_i \text{ 時の出力 } p_i \text{ と } \bar{p} \text{ の差を } \Delta p_i \text{ と表す}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

式 7.4 の関係の元に、 p_i をテーラー展開すると以下の式で表される。（式 4.8）

$$\begin{aligned} p_i &= \bar{p} + \left(\frac{dp}{da}\right) \Delta a_i + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2p}{da^2}\right) (\Delta a_i)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3p}{da^3}\right) (\Delta a_i)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4p}{da^4}\right) (\Delta a_i)^4 + \dots \\ p_i &= \bar{p} + S_1 \Delta a_i + S_2 (\Delta a_i)^2 + S_3 (\Delta a_i)^3 + S_4 (\Delta a_i)^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

ただし、 $(\Delta a_i)^n$ の係数をまとめて S_n と表している。

また、入力となる a が正規分布である前提から a に対する各統計量は、

$$\begin{aligned} E(a) &= \frac{1}{I} \sum a_i = \bar{a}, \frac{1}{I} \sum \Delta a_i = 0 \dots (\text{平均}) \\ V(a) &= \frac{1}{I} \sum (\Delta a_i)^2 \dots (\text{分散}) \\ S(a) &= \frac{\sum (\Delta a_i)^3}{\sigma^3} = \frac{\sum (\Delta a_i)^3}{V(a)^{3/2}} = 0, \sum (\Delta a_i)^3 = 0 \dots (\text{歪度}) \\ K(a) &= \frac{\sum (\Delta a_i)^4}{\sigma^4} = \frac{\sum (\Delta a_i)^4}{V(a)^2} = 3, \sum (\Delta a_i)^4 = 3V(a)^2 \dots (\text{尖度}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

と示すことができる。（式 4.9）ここでは、歪度、尖度を S, K と表したがこれは一般的な表記ではないことを追記しておく。また、これは $i \rightarrow \infty$ の時の値である。

前述した式を用いて、出力である p の統計量を求めることを考える。もし、 a と p の関係が線形であるならば、テーラー展開の式において S_2 以降の係数は 0 と表すことができ、 p の統計量は単純に以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 E(p) &= \frac{1}{I} \sum p_i = \frac{1}{I} \sum (\bar{p} + S_1 \Delta a_i) = \bar{p} \\
 V(p) &= \frac{1}{I} \sum (\Delta p_i)^2 = \frac{1}{I} \sum (S_1 \Delta a_i)^2 = S_1^2 V(a) \\
 S(p) &= \frac{\sum (\Delta p_i)^3}{V(p)^{3/2}}, \sum (\Delta p_i)^3 = \sum (S_1 \Delta a_i)^3 = 0, \quad S(p) = 0 \\
 K(p) &= \frac{\sum (\Delta p_i)^4}{V(p)^2}, \sum (\Delta p_i)^4 = \sum (S_1 \Delta a_i)^4 = 3 S_1^4 V(a)^2, \quad K(p) = 3
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

上式 4.10 より、入出力間に線形性が認められる場合は出力も正規分布を示すことが証明された。次に、入出力間が非線形性となる場合（すなわち S_2 以降の係数が影響を持つ場合）を上記と同様に考える。

$$\begin{aligned}
 E(p) &= \frac{1}{I} \sum p_i = \frac{1}{I} \sum (\bar{p} + S_1 \Delta a_i + S_2 (\Delta a_i)^2 + S_3 (\Delta a_i)^3 + S_4 (\Delta a_i)^4 + \dots) \\
 &= \bar{p} + S_2 V(a) + S_4 \{V(a)\}^2 + \dots \\
 V(p) &= \frac{1}{I} \sum (S_1 \Delta a_i + S_2 (\Delta a_i)^2 + S_3 (\Delta a_i)^3 + S_4 (\Delta a_i)^4 + \dots)^2
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

式 4.11 より、非線形を示す場合、出力の平均値が平均の入力の時よりも分散と偶数項の係数に応じた値だけ大きくなることが読み取れる。また、分散以降の高次モーメントに関しても、 $(\Delta a_i)^n$ の n が偶数となる項が残り、非正規性を示すことが予想される。

4.5.3 リバースサンプリング法に関する考察

次に、リバースサンプリングを行った際の結果を前節同様テーラー展開の形を用いて考える。まず、偶数回 ($2I$ 回) サンプリングを行った結果を以下のように考える。(式 4.12) なお下式については $i \rightarrow \infty$ で考える必要はない。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{2I} (\Delta a_i) &= 0 \\
 \sum_{i=0}^{2I} (\Delta a_i)^2 &= 2 \sum_{i=0}^I (\Delta a_i)^2 \dots (\text{右辺はランダムサンプリングを } I \text{ 回行ったもの}) \\
 \sum_{i=0}^{2I} (\Delta a_i)^3 &= 0 \\
 \sum_{i=0}^{2I} (\Delta a_i)^4 &= 2 \sum_{i=0}^I (\Delta a_i)^4 \dots (\text{上に同じく})
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

前頁で考えた関係式を用いて、線形である（正規分布である）時と、非線形（非正規分布を示す）時の比較を行う。まず正規分布時についてだが、これは前節でも示したように第一項のみを考えればよい。

$$\begin{aligned}
E(p) &= \frac{1}{2I} \sum p_i = \frac{1}{2I} \sum (\bar{p} + S_1 \Delta a_i) = \bar{p} \\
V(p) &= \frac{1}{2I} \sum (\Delta p_i)^2 = \frac{1}{2I} \sum_{i=0}^{2I} (S_1 \Delta a_i)^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^I (S_1 \Delta a_i)^2 \\
S(p) &= \frac{\sum (\Delta p_i)^3}{V(p)^{3/2}}, \sum (\Delta p_i)^3 = \sum (S_1 \Delta a_i)^3 = 0, \quad S(p) = 0 \\
K(p) &= \frac{\sum (\Delta p_i)^4}{V(p)^2}, \sum (\Delta p_i)^4 = \sum_{i=0}^{2I} (S_1 \Delta a_i)^4 = 2 \sum_{i=0}^I (S_1 \Delta a_i)^4
\end{aligned} \tag{4.13}$$

上式より、平均値と歪度に関しては偶数項では常に 0 となり、奇数項の影響も次第に小さくなるため、線形性を示す場合はこれらが早く収束する結果となる。また、分散や尖度といった偶数次のモーメントに関してはランダムサンプリングを I 回行った場合と、リバースサンプリングを同様の乱数の組み合わせで 2I 回行った場合で数値が等しくなり、結果収束が遅くなるのだと考えられる。

また、非線形である場合は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
E(p) &= \frac{1}{I} \sum p_i = \frac{1}{I} \sum (\bar{p} + S_1 \Delta a_i + S_2 (\Delta a_i)^2 + S_3 (\Delta a_i)^3 + S_4 (\Delta a_i)^4 + \dots) \\
&= \bar{p} + S_2 V(a) + S_4 \{V(a)\}^2 + \dots \\
V(p) &= \frac{1}{I} \sum (S_1 \Delta a_i + S_2 (\Delta a_i)^2 + S_3 (\Delta a_i)^3 + S_4 (\Delta a_i)^4 + \dots)^2 \\
S(p) &= \frac{1}{V(p)^{3/2}} \sum (S_1 \Delta a_i + S_2 (\Delta a_i)^2 + S_3 (\Delta a_i)^3 + S_4 (\Delta a_i)^4 + \dots)^3 \\
K(p) &= \frac{1}{V(p)^2} \sum (S_1 \Delta a_i + S_2 (\Delta a_i)^2 + S_3 (\Delta a_i)^3 + S_4 (\Delta a_i)^4 + \dots)^4
\end{aligned} \tag{4.14}$$

上式 4.14 から、本来 0 に収束する奇数項はすぐに収束し、それ以外の値に収束する偶数次の項は収束が遅くなると考えられる。そのため、非線形性が強ければ強いほど、奇数次の項の影響が大きくなり収束が遅くなる可能性が高いと言える。

第5章 まとめ

燃焼後核燃料の核種数密度における不確かさの評価を、ランダムサンプリング法を用いて行った。159 核種をターゲットに評価を行い、およそ 150 核種の頻度分布が正規性を示すことを確認し、それらの核種については入出力間の線形性が認められることを確認した。すなわち、これらの核種においては、感度係数を用いた不確かさ評価手法が妥当である可能性が高い。また、非線形性を示す核種を特定し、その中でも Eu-151 を中心とした Eu-152, Gd-152, Gd-153 の 4 核種についてはその原因について考察を行った。これにより、感度係数を用いた評価を行う際に注意すべき核種を特定し、手法改善へのアプローチを得た。

また、リバースサンプリング法において正規性、非正規性の強い 2 核種で検証計算を行い、特に正規性の強い核種についてはある一定の法則を確認した。結果、正規性の強い核種にリバースサンプリング法を適用した場合、平均や歪度などの奇数時モーメントに関しては収束が早く、分散や尖度などの偶数時モーメントでは逆に収束が遅くなるという知見を得た。非正規性の強い核種において、Eu-151 に関しては一定の法則を得ることはできず、より多くの核種を含めて詳細な検証が必要であることが分かった。以上より、リバースサンプリング法を用いて不確かさ評価を行う場合は、正規性の強い核種の対象となる統計値を絞った場合のみ有効であるという結論となる。

本研究によって、感度係数を用いた不確かさ評価の妥当性をはかる上で重要となる入出力間の線形性を多くの核種で認めることができた。また、非線形性を考慮する必要のある核種を特定することができた。今後、非正規性の強い核種については、その原因について定性的に考察すると同時に、リバースサンプリング法の可否についてより検証を重ねていく必要がある。

参考文献

- [1]「第 48 回炉物理夏期セミナーテキスト(2016)」
- [2]Go Chiba, “Development of a fuel depletion sensitivity calculation module for multi-cell problems in a deterministic reactor physics code system CBZ” *Annals of Nuclear Energy*(2016)
- [3]Go Chiba, “Uncertainly quantification of neutronic parameters of light water reactor fuel cells with JENDL-4.0 covariance data” *Jurnal of Nuclear Science and Technology*,2013
- [4]Go Chiba, “Estimation of neutronics parameter sensitivity to nuclear data in random sampling-based uncertainty quantification calculations” *Annals of Nuclear Energy*(2015)
- [5]J. Katakura, “[JENDL FP Decay Data File 2011 and Fission Yields Data File 2011](#),” *JAEA-Data/Code 2011-025* (Mar 2012)
- [6]Go Chiba, “**Important fission product nuclides identification method for simplified burnup chain construction**” *Jurnal of Nuclear Science and Technology*,2015
- [7]木下国治「ラテン超方格サンプリング法を用いた BWR 炉心特性の不確かさ評価」,2014 年 2 月

謝辞

本研究を進めるにおいて、指導教官であり、また燃焼計算等に用いた CBZ の開発者でもある千葉豪准教授をはじめ、奈良林直教授に深く感謝いたします。また、報告会などを通じ、研究の指針を示してくださった先輩方、自身の研究から有意義なアドバイスを頂けた片桐さんをはじめとする同期の皆さまにも厚く御礼申し上げます。

付録

付録1 燃焼計算によって得られた統計量一覧

	数密度平均値	標準偏差	歪度	尖度
-----O016(1)-----				
結果	0.0450458	4.62376e-06	-0.0159744	0.00736231
誤差	2.19539e-09	3.45317e-08	0.0262225	0.0515798
相対誤差	4.873684e-08	0.00746832	-1.64153	7.00592
-----Se079(2)-----				
結果	3.95205e-07	0.00298754	0.0631416	0.0373134
誤差	1.25041e-11	2.23655e-05	0.0260476	0.0527637
相対誤差	3.16396e-05	0.00748623	0.412527	1.41407
-----Kr083(3)-----				
結果	3.5107e-06	0.00715842	0.118334	0.214412
誤差	2.62142e-10	5.60186e-05	0.0290313	0.0614744
相対誤差	7.46695e-05	0.00782555	0.245333	0.286712
-----Y089(4)-----				
結果	3.64682e-05	0.003685	0.0393028	0.0230493
誤差	1.42049e-09	2.75755e-05	0.0258535	0.0475636
相対誤差	3.89515e-05	0.00748318	0.657802	2.06356
-----Y091(5)-----				
結果	2.66985e-06	0.00362455	0.0376609	-0.0113558
誤差	1.02164e-10	2.70214e-05	0.0256726	0.0530507
相対誤差	3.82659e-05	0.00745513	0.681679	-4.67166
-----Y095(6)-----				
結果	4.59957e-10	0.0124228	0.0137403	-0.0164963
誤差	5.98428e-14	9.14952e-05	0.0258083	0.0526459
相対誤差	0.000130105	0.0073651	1.87828	-3.19139
-----Zr091(7)-----				
結果	4.38373e-05	0.00280412	-0.0119633	0.050838
誤差	1.30213e-09	2.13003e-05	0.0265528	0.054541
相対誤差	2.97038e-05	0.00759608	-2.21953	1.07284
-----Zr092(8)-----				
結果	5.03815e-05	0.00227553	0.0345551	-0.0384351
誤差	1.22582e-09	1.66081e-05	0.0245777	0.0467176
相対誤差	2.43307e-05	0.00729855	0.711259	-1.21549

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Zr093(9)-----				
結果	5.47806e-05	0.002078	0.0961007	0.0660708
誤差	1.18154e-09	1.5762e-05	0.0261342	0.0521752
相對誤差	2.15686e-05	0.00758514	0.271946	0.789686
-----Zr094(10)-----				
結果	5.85273e-05	0.00258373	0.023739	0.130172
誤差	1.58846e-09	1.99801e-05	0.0289153	0.0633144
相對誤差	2.71406e-05	0.00773302	1.21805	0.48639
-----Zr095(11)-----				
結果	4.26111e-06	0.00191011	0.0335104	-0.00827989
誤差	8.61466e-11	1.43525e-05	0.0255955	0.0521068
相對誤差	2.0217e-05	0.00751396	0.763808	-6.29318
-----Zr096(12)-----				
結果	6.04972e-05	0.00763243	0.012416	-0.051949
誤差	4.82458e-09	5.64698e-05	0.0249241	0.0481246
相對誤差	7.97488e-05	0.00739867	2.00743	-0.92638
-----Nb095(13)-----				
結果	2.33727e-06	0.0018789	0.0411209	0.0132053
誤差	4.65077e-11	1.40781e-05	0.0261597	0.0538199
相對誤差	1.98983e-05	0.00749272	0.636165	4.07564
-----Nb095m(14)-----				
結果	2.60419e-09	0.064255	0.0176504	-0.00276218
誤差	1.75541e-12	0.000485771	0.0249421	0.0451306
相對誤差	0.000674072	0.00756005	1.41312	-16.3388
-----Mo095(15)-----				
結果	5.06103e-05	0.00134727	0.023671	0.132445
誤差	7.16781e-10	1.04225e-05	0.0279368	0.0588744
相對誤差	1.41628e-05	0.00773604	1.18021	0.44452
-----Mo097(16)-----				
結果	6.09487e-05	0.00409816	0.347207	0.196701
誤差	2.61503e-09	3.17534e-05	0.0275989	0.0745585
相對誤差	4.29055e-05	0.00774821	0.0794883	0.379044

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Mo098(17)-----				
結果	6.04752e-05	0.00433673	-0.286647	0.137327
誤差	2.74939e-09	3.33049e-05	0.0265354	0.0642704
相對誤差	4.5463e-05	0.00767973	-0.0925719	0.46801
-----Mo099(18)-----				
結果	2.14573e-07	0.00484322	0.272504	0.888685
誤差	1.09124e-11	4.37492e-05	0.0401846	0.110943
相對誤差	5.08565e-05	0.00903309	0.147464	0.12484
-----Mo100(19)-----				
結果	6.9694e-05	0.00668576	-0.184673	0.332362
誤差	4.891e-09	5.40269e-05	0.030844	0.0688135
相對誤差	7.01783e-05	0.0080809	-0.167019	0.207044
-----Tc099(20)-----				
結果	5.61626e-05	0.00539475	0.426233	1.25717
誤差	3.17054e-09	5.12332e-05	0.0462727	0.148427
相對誤差	5.64529e-05	0.00949685	0.108562	0.118065
-----Tc099m(21)-----				
結果	1.73161e-08	0.0157491	-0.00935469	-0.0179328
誤差	2.86355e-12	0.000116915	0.0255452	0.0498104
相對誤差	0.000165369	0.0074236	-2.73074	-2.77762
-----Tc101(22)-----				
結果	7.25364e-10	0.00699597	-0.0136056	0.0462933
誤差	5.3084e-14	5.30628e-05	0.0254222	0.0463195
相對誤差	7.31827e-05	0.00758476	-1.86851	1.00056
-----Tc105(23)-----				
結果	2.76222e-10	0.0139263	0.0339508	0.00390254
誤差	4.03664e-14	0.000103088	0.0266028	0.0532281
相對誤差	0.000146137	0.00740235	0.78357	13.6393
-----Ru100(24)-----				
結果	8.51467e-06	0.0084995	0.117593	0.206318
誤差	7.66915e-10	6.65282e-05	0.0319402	0.089798
相對誤差	9.00698e-05	0.0078273	0.271616	0.43524

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Ru101(25)-----				
結果	5.55091e-05	0.000869792	0.123686	0.111131
誤差	5.08171e-10	6.70427e-06	0.0269624	0.0534932
相對誤差	9.15473e-06	0.0077079	0.21799	0.481354
-----Ru102(26)-----				
結果	5.64674e-05	0.00103064	-0.123557	0.00999864
誤差	6.14871e-10	7.72414e-06	0.0259347	0.0521323
相對誤差	1.0889e-05	0.00749451	-0.209901	5.21394
-----Ru103(27)-----				
結果	2.80053e-06	0.00137626	-0.0800603	-0.0492811
誤差	4.07528e-11	1.00939e-05	0.0244252	0.043461
相對誤差	1.45518e-05	0.00733434	-0.305085	-0.881899
-----Ru104(28)-----				
結果	3.89714e-05	0.00403578	-0.0101266	0.0670899
誤差	1.66129e-09	3.04557e-05	0.0260972	0.0517191
相對誤差	4.26284e-05	0.00754641	-2.57709	0.770892
-----Ru105(29)-----				
結果	9.82663e-09	0.00574712	-0.0447101	0.0235585
誤差	5.97871e-13	4.30998e-05	0.0267249	0.0526674
相對誤差	6.0842e-05	0.00749938	-0.597737	2.23561
-----Ru106(30)-----				
結果	1.0588e-05	0.00561128	-0.0293702	-0.0391165
誤差	6.23235e-10	4.13437e-05	0.024513	0.0446989
相對誤差	5.88624e-05	0.00736797	-0.834622	-1.14271
-----Rh103(31)-----				
結果	2.93027e-05	0.00574904	-0.0567855	-0.0779298
誤差	1.7771e-09	4.20696e-05	0.0248156	0.0493047
相對誤差	6.06463e-05	0.00731768	-0.437006	-0.632681
-----Rh103m(32)-----				
結果	2.74809e-09	0.00151024	-0.0909482	0.031984
誤差	4.33268e-14	1.12895e-05	0.0263388	0.0526217
相對誤差	1.57661e-05	0.00747529	-0.289602	1.64525

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Rh105(33)-----				
結果	7.1636e-08	0.00418475	-0.0995016	-0.00735801
誤差	3.15673e-12	3.12069e-05	0.0243165	0.0476923
相對誤差	4.40662e-05	0.00745729	-0.244383	-6.48168
-----Rh107(34)-----				
結果	4.62746e-10	0.0188054	0.0148808	-0.0775072
誤差	1.98648e-11	4.07236	0.999791	94.7954
相對誤差	0.042928	216.552	67.1867	-1223.05
-----Pd104(35)-----				
結果	1.70552e-05	0.00656675	0.0458045	0.0134596
誤差	1.17978e-09	4.87669e-05	0.0250916	0.0463847
相對誤差	6.91744e-05	0.00742634	0.547797	3.44622
-----Pd105(36)-----				
結果	2.69036e-05	0.00542547	-0.0702835	-0.0524317
誤差	1.54173e-09	4.02435e-05	0.0247797	0.0476166
相對誤差	5.73055e-05	0.00741751	-0.352568	-0.908164
-----Pd106(37)-----				
結果	1.5266e-05	0.00447706	-0.0492196	0.000135587
誤差	7.1381e-10	3.35737e-05	0.0256096	0.050812
相對誤差	4.67582e-05	0.00749904	-0.520313	374.755
-----Pd107(38)-----				
結果	1.48492e-05	0.00619819	-0.0503687	-0.0542682
誤差	9.64513e-10	4.52505e-05	0.0243741	0.0439225
相對誤差	6.49539e-05	0.00730059	-0.483914	-0.809361
-----Pd108(39)-----				
結果	9.85094e-06	0.00704762	-0.0453986	-0.0406671
誤差	7.29656e-10	5.10469e-05	0.0248295	0.0459067
相對誤差	7.40696e-05	0.00724314	-0.546921	-1.12884
-----Pd109(40)-----				
結果	9.90867e-09	0.00598442	-0.0496011	-0.000997377
誤差	6.28151e-13	4.51505e-05	0.0249208	0.0477252
相對誤差	6.33941e-05	0.00754467	-0.502424	-47.8507

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Ag109(41)-----				
結果	4.98402e-06	0.00796901	-0.0410787	-0.0473482
誤差	4.18039e-10	5.85085e-05	0.0243754	0.0443557
相對誤差	8.38759e-05	0.007342	-0.593384	-0.936797
-----Cd110(42)-----				
結果	2.64372e-06	0.00778574	-0.0559229	-0.0385546
誤差	2.16517e-10	5.77404e-05	0.024644	0.0469808
相對誤差	8.18987e-05	0.00741617	-0.440678	-1.21855
-----Cd111(43)-----				
結果	1.47996e-06	0.00674841	-0.0564104	-0.0205336
誤差	1.03201e-10	5.00094e-05	0.0249648	0.0474241
相對誤差	6.9732e-05	0.00741055	-0.442557	-2.30959
-----Cd112(44)-----				
結果	7.16009e-07	0.00546345	-0.0546173	-0.0336579
誤差	4.14115e-11	4.02148e-05	0.0245751	0.0453918
相對誤差	5.78365e-05	0.0073607	-0.449951	-1.34862
-----Cd113(45)-----				
結果	5.66724e-09	0.0274819	0.0666256	-0.134311
誤差	1.64181e-12	0.000200336	0.0239908	0.0462247
相對誤差	0.000289702	0.00728975	0.360085	-0.344163
-----In115(46)-----				
結果	7.81781e-08	0.0105232	-0.0166376	-0.034934
誤差	8.68716e-12	7.80915e-05	0.0257169	0.0522899
相對誤差	0.00011112	0.00742086	-1.54571	-1.49682
-----Sb121(47)-----				
結果	2.23307e-07	0.0032777	-0.0381875	-0.0642262
誤差	7.71612e-12	2.43879e-05	0.0251812	0.0497782
相對誤差	3.45539e-05	0.00744056	-0.659411	-0.775046
-----Te127m(48)-----				
結果	3.43098e-08	0.0464722	0.0318933	-0.112076
誤差	1.67134e-11	0.00033693	0.0227253	0.039786
相對誤差	0.000487133	0.00725014	0.712539	-0.354992

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Te129m(49)-----				
結果	1.04577e-07	0.386448	-0.039777	-0.104857
誤差	4.22094e-10	0.00277406	0.0222411	0.0351983
相對誤差	0.00403621	0.00717835	-0.559144	-0.33568
-----Te130(50)-----				
結果	2.14169e-05	0.020172	0.0100203	-0.00946412
誤差	4.54457e-09	0.000148518	0.0257041	0.0490217
相對誤差	0.000212195	0.00736256	2.5652	-5.17975
-----Te131(51)-----				
結果	6.28228e-10	0.0103971	0.0277633	0.091996
誤差	6.80203e-14	7.96596e-05	0.0288021	0.066546
相對誤差	0.000108273	0.00766172	1.03741	0.723358
-----Te131m(52)-----				
結果	1.23717e-08	0.0517483	-0.0284666	0.0248412
誤差	6.7737e-12	0.000390277	0.0266924	0.0539667
相對誤差	0.000547514	0.00754185	-0.937675	2.17247
-----Te133m(53)-----				
結果	1.61925e-09	0.0407582	-0.00942492	0.0213932
誤差	6.91963e-13	0.000304328	0.0254027	0.0494956
相對誤差	0.000427335	0.00746667	-2.69527	2.31362
-----Te135(54)-----				
結果	8.49773e-12	0.0648699	-0.0265625	-0.0437065
誤差	5.77152e-15	0.000474379	0.0250067	0.0471776
相對誤差	0.000679184	0.00731277	-0.941427	-1.07942
-----I127(55)-----				
結果	2.35211e-06	0.00620597	0.00651698	-0.0441091
誤差	1.52408e-10	4.58308e-05	0.0249786	0.0465949
相對誤差	6.47963e-05	0.00738495	3.83285	-1.05635
-----I129(56)-----				
結果	7.93546e-06	0.0207374	0.644374	4.21309
誤差	1.74165e-09	0.000272963	0.170522	1.69029
相對誤差	0.000219476	0.0131629	0.264633	0.401199

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----I131(57)-----				
結果	3.43795e-07	0.000856084	-0.032898	-0.0834
誤差	3.09655e-12	6.33421e-06	0.0246127	0.04516
相對誤差	9.00696e-06	0.00739905	-0.748152	-0.541487
-----I133(58)-----				
結果	7.44968e-08	0.00559579	0.00261855	0.0548487
誤差	4.46091e-12	4.24243e-05	0.0261793	0.049807
相對誤差	5.98806e-05	0.00758146	9.99764	0.908079
-----I135(59)-----				
結果	2.24971e-08	0.0270205	-0.00962842	0.0116491
誤差	6.42354e-12	0.000199519	0.0251681	0.0467045
相對誤差	0.000285528	0.00738397	-2.61394	4.0093
-----Xe130(60)-----				
結果	3.69962e-07	0.0231092	0.472603	2.59002
誤差	8.9885e-11	0.000260793	0.119944	0.987902
相對誤差	0.000242958	0.0112853	0.253794	0.381427
-----Xe131(61)-----				
結果	2.23129e-05	0.00356007	-0.0375629	-0.0718112
誤差	8.48532e-10	2.58978e-05	0.025539	0.0521117
相對誤差	3.80287e-05	0.00727452	-0.679898	-0.725676
-----Xe131m(62)-----				
結果	5.60962e-09	0.106214	0.00525634	-0.162007
誤差	6.3403e-12	0.00076115	0.023064	0.0424396
相對誤差	0.00113026	0.00716621	4.38784	-0.261961
-----Xe132(63)-----				
結果	6.08627e-05	0.000777488	-0.0124249	0.0622793
誤差	5.01454e-10	5.95208e-06	0.0271628	0.0521608
相對誤差	8.23909e-06	0.00765553	-2.18615	0.83753
-----Xe133(64)-----				
結果	4.5243e-07	0.000583249	0.523953	0.641081
誤差	2.75691e-12	4.98475e-06	0.0331221	0.104912
相對誤差	6.09356e-06	0.00854652	0.0632158	0.163649

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Xe133m(65)-----				
結果	5.96911e-09	0.0587575	0.0193986	-0.0758347
誤差	3.69172e-12	0.00042545	0.0241013	0.0443279
相對誤差	0.00061847	0.00724078	1.24243	-0.584533
-----Xe134(66)-----				
結果	8.22135e-05	0.00217049	-0.0168793	0.043448
誤差	1.88241e-09	1.63352e-05	0.0265161	0.0508091
相對誤差	2.28966e-05	0.00752605	-1.57092	1.16942
-----Xe135(67)-----				
結果	7.95238e-09	0.0189386	-0.0118895	-0.0742813
誤差	1.57403e-12	0.000136787	0.0252346	0.0494285
相對誤差	0.000197932	0.00722265	-2.12243	-0.665423
-----Xe135m(68)-----				
結果	2.03624e-10	0.0964597	0.0148043	0.0210561
誤差	2.07316e-13	0.000731974	0.0255016	0.046754
相對誤差	0.00101813	0.00758839	1.72258	2.22045
-----Xe136(69)-----				
結果	0.000122761	0.0400115	-0.00512711	-0.0129867
誤差	5.19556e-08	0.000299346	0.025027	0.0444994
相對誤差	0.000423226	0.00748149	-4.88131	-3.42653
-----Cs133(70)-----				
結果	5.90823e-05	0.00141528	0.00992954	-0.0612924
誤差	8.89249e-10	1.04112e-05	0.0262986	0.0537606
相對誤差	1.5051e-05	0.00735623	2.64852	-0.877116
-----Cs134(71)-----				
結果	7.77389e-06	0.00562436	0.0267904	-0.032194
誤差	4.65113e-10	4.15699e-05	0.0267701	0.0594939
相對誤差	5.98301e-05	0.00739103	0.999245	-1.84798
-----Cs134m(72)-----				
結果	3.35472e-10	0.009377	0.0701662	-0.102378
誤差	3.26519e-14	6.82684e-05	0.0246621	0.0500072
相對誤差	9.73313e-05	0.00728041	0.351481	-0.488457

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Cs135(73)-----				
結果	2.03096e-05	0.00854897	0.0207093	-0.00843193
誤差	1.84751e-09	6.38751e-05	0.0255685	0.0517594
相對誤差	9.09675e-05	0.00747167	1.23464	-6.1385
-----Cs137(74)-----				
結果	6.39982e-05	0.00264123	-0.0970459	0.106072
誤差	1.77114e-09	2.03979e-05	0.0266318	0.0578471
相對誤差	2.76749e-05	0.00772289	-0.274425	0.545354
-----Ba137(75)-----				
結果	2.44496e-06	0.00576483	-0.0159111	0.0221836
誤差	1.46919e-10	4.28831e-05	0.0267469	0.0570021
相對誤差	6.00903e-05	0.00743874	-1.68102	2.56956
-----Ba138(76)-----				
結果	6.82719e-05	0.00205439	-0.015632	-0.0682374
誤差	1.49644e-09	1.50635e-05	0.0248748	0.0477593
相對誤差	2.19189e-05	0.00733234	-1.59128	-0.6999
-----Ba140(77)-----				
結果	9.1568e-07	0.00123545	-0.0173829	-0.0217356
誤差	1.18973e-11	9.24544e-06	0.0253342	0.0492051
相對誤差	1.29929e-05	0.00748346	-1.45742	-2.2638
-----La139(78)-----				
結果	6.33531e-05	0.00112874	0.0250084	-0.0102925
誤差	7.56055e-10	8.36845e-06	0.0250316	0.0475887
相對誤差	1.1934e-05	0.00741401	1.00093	-4.62361
-----La141(79)-----				
結果	1.10515e-08	0.00783085	-0.0162229	-0.00443812
誤差	9.10458e-13	5.75328e-05	0.0257277	0.0488845
相對誤差	8.2383e-05	0.00734694	-1.58589	-11.0147
-----La143(80)-----				
結果	6.04918e-10	0.0073261	-0.00765654	-0.0135813
誤差	4.72505e-14	5.46256e-05	0.0261862	0.0575833
相對誤差	7.81106e-05	0.00745631	-3.42011	-4.23991

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Ce140(81)-----				
結果	6.20504e-05	0.00103897	-0.0292588	0.0898054
誤差	6.82462e-10	7.85085e-06	0.0276733	0.0603294
相對誤差	1.09985e-05	0.00755641	-0.94581	0.671779
-----Ce141(82)-----				
結果	2.19476e-06	0.000907142	-0.0195088	0.0341033
誤差	2.06575e-11	6.77517e-06	0.0263537	0.0504825
相對誤差	9.4122e-06	0.0074687	-1.35086	1.48028
-----Ce142(83)-----				
結果	5.72084e-05	0.000796453	-0.0297587	-0.0572788
誤差	4.80227e-10	5.89566e-06	0.0247879	0.0463275
相對誤差	8.39434e-06	0.00740239	-0.832961	-0.808807
-----Ce143(84)-----				
結果	8.52138e-08	0.000907463	0.055488	0.082294
誤差	8.16278e-13	6.88935e-06	0.0262713	0.0496175
相對誤差	9.57918e-06	0.00759188	0.47346	0.60293
-----Ce144(85)-----				
結果	1.56984e-05	0.00148377	0.0491295	0.0442334
誤差	2.425e-10	1.12291e-05	0.0258187	0.0518539
相對誤差	1.54474e-05	0.00756795	0.525523	1.17228
-----Ce149(86)-----				
結果	6.38545e-13	0.130841	0.0856534	-0.0273251
誤差	8.82151e-16	0.000956781	0.0251153	0.0493326
相對誤差	0.0013815	0.00731257	0.29322	-1.8054
-----Pr141(87)-----				
結果	5.49417e-05	0.000778568	-0.0146662	0.091894
誤差	4.48907e-10	5.96865e-06	0.0275868	0.0536907
相對誤差	8.17061e-06	0.00766619	-1.88098	0.584267
-----Pr143(88)-----				
結果	8.36722e-07	0.00174398	0.0424164	0.0166218
誤差	1.53709e-11	1.27881e-05	0.0261926	0.0523398
相對誤差	1.83704e-05	0.00733271	0.617512	3.14887

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Pr145(89)-----				
結果	1.06339e-08	0.00252589	-0.0487643	-0.000198062
誤差	2.85038e-13	1.86753e-05	0.0259713	0.0526763
相對誤差	2.68048e-05	0.00739355	-0.532588	-265.959
-----Pr147(90)-----				
結果	2.53205e-10	0.0222177	0.0326067	-0.0588759
誤差	5.91422e-14	0.000164428	0.0244525	0.0453521
相對誤差	0.000233575	0.00740075	0.749923	-0.7703
-----Pr149(91)-----				
結果	2.41127e-11	0.0335422	0.0122589	0.00121761
誤差	8.52199e-15	0.000250927	0.026322	0.0579948
相對誤差	0.000353423	0.00748095	2.14718	47.6302
-----Nd142(92)-----				
結果	1.14917e-06	0.0100051	0.074264	-0.0575174
誤差	1.20977e-10	7.30104e-05	0.0252821	0.0514092
相對誤差	0.000105274	0.00729736	0.340436	-0.893804
-----Nd143(93)-----				
結果	3.81789e-05	0.00425125	-0.0634255	-0.0385429
誤差	1.70873e-09	3.14346e-05	0.0257429	0.0510062
相對誤差	4.47559e-05	0.0073942	-0.405876	-1.32336
-----Nd144(94)-----				
結果	5.13056e-05	0.0045295	0.0704658	-0.0619374
誤差	2.45107e-09	3.37455e-05	0.0246302	0.0483822
相對誤差	4.7774e-05	0.00745016	0.349534	-0.781146
-----Nd145(95)-----				
結果	3.28474e-05	0.00142149	0.00459923	0.0637273
誤差	4.96139e-10	1.07369e-05	0.0268577	0.0537145
相對誤差	1.51044e-05	0.00755331	5.83961	0.84288
-----Nd146(96)-----				
結果	3.52543e-05	0.00154658	0.0337825	-0.0848974
誤差	5.76806e-10	1.11927e-05	0.0237021	0.0421095
相對誤差	1.63613e-05	0.00723709	0.701608	-0.496004

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Nd147(97)-----				
結果	2.9882e-07	0.00125872	0.0283821	-0.0460655
誤差	3.97615e-12	9.30689e-06	0.0244413	0.0454902
相對誤差	1.33062e-05	0.00739396	0.861152	-0.987511
-----Nd148(98)-----				
結果	1.80223e-05	0.00173089	0.0220725	0.0130894
誤差	3.32451e-10	1.28033e-05	0.0258437	0.0467004
相對誤差	1.84466e-05	0.00739693	1.17085	3.56779
-----Nd149(99)-----				
結果	1.16761e-09	0.00131113	-0.0043976	0.0311864
誤差	1.64601e-14	9.86338e-06	0.0257242	0.048119
相對誤差	1.40972e-05	0.00752279	-5.8496	1.54295
-----Nd150(100)-----				
結果	8.59716e-06	0.0422157	0.0191337	0.0471229
誤差	3.81382e-09	0.000319776	0.0273073	0.0588519
相對誤差	0.000443614	0.0075748	1.42719	1.2489
-----Nd151(101)-----				
結果	7.23487e-11	0.00847621	-0.00602965	0.0366116
誤差	6.39928e-15	6.39417e-05	0.025834	0.0478678
相對誤差	8.84505e-05	0.00754368	-4.28449	1.30745
-----Nd152(102)-----				
結果	4.80691e-11	0.0227371	0.0421527	0.0748872
誤差	1.15108e-14	0.000173247	0.0283884	0.0651588
相對誤差	0.000239465	0.00761956	0.673465	0.870092
-----Pm147(103)-----				
結果	7.8028e-06	0.00462981	-0.0232919	-0.0270809
誤差	3.8112e-10	3.40896e-05	0.0268433	0.0600029
相對誤差	4.8844e-05	0.00736307	-1.15248	-2.21569
-----Pm148(104)-----				
結果	5.23343e-08	0.00603322	0.0448161	-0.102399
誤差	3.31659e-12	4.35001e-05	0.0243631	0.047577
相對誤差	6.33731e-05	0.0072101	0.543624	-0.464623

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Pm148m(105)-----				
結果	6.89362e-08	0.0117173	-0.0227525	-0.0662492
誤差	8.4577e-12	8.62826e-05	0.0249177	0.0462953
相對誤差	0.000122689	0.0073637	-1.09516	-0.698805
-----Pm149(106)-----				
結果	5.19032e-08	0.0037384	0.0668526	-0.109115
誤差	2.03251e-12	2.68324e-05	0.0240824	0.0457166
相對誤差	3.91596e-05	0.00717749	0.360231	-0.418975
-----Pm151(107)-----				
結果	9.96139e-09	0.00215063	0.0441815	-0.0721397
誤差	2.25425e-13	1.58025e-05	0.0250511	0.0557573
相對誤差	2.26298e-05	0.00734784	0.567003	-0.772908
-----Sm147(108)-----				
結果	3.52736e-06	0.00475921	-0.00563487	-0.00205315
誤差	1.7776e-10	3.54992e-05	0.0272529	0.0581402
相對誤差	5.03947e-05	0.00745906	-4.83648	-28.3176
-----Sm148(109)-----				
結果	7.29852e-06	0.00314774	0.0228769	-0.0610749
誤差	2.42764e-10	2.34262e-05	0.02626	0.0586614
相對誤差	3.3262e-05	0.00744222	1.14789	-0.960483
-----Sm149(110)-----				
結果	9.39426e-08	0.0201416	0.00708131	-0.0862457
誤差	2.03257e-11	0.000145208	0.0246365	0.0475295
相對誤差	0.000216363	0.00720937	3.4791	-0.551094
-----Sm150(111)-----				
結果	1.41723e-05	0.000871982	0.0188644	-0.0505742
誤差	1.27525e-10	6.46237e-06	0.0259611	0.0574672
相對誤差	8.99821e-06	0.00741113	1.37619	-1.1363
-----Sm151(112)-----				
結果	5.01631e-07	0.015007	-0.00217962	-0.0867538
誤差	8.00997e-11	0.000109179	0.0246953	0.0476556
相對誤差	0.000159678	0.00727519	-11.3301	-0.54932

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Sm152(113)-----				
結果	4.66285e-06	0.00418296	0.00942147	-0.0457725
誤差	2.04222e-10	3.08697e-05	0.0243604	0.0448123
相對誤差	4.37976e-05	0.00737986	2.58563	-0.979022
-----Sm153(114)-----				
結果	4.18492e-08	0.00780659	0.0585744	-0.0130306
誤差	3.4437e-12	5.78288e-05	0.026491	0.0544149
相對誤差	8.22883e-05	0.00740768	0.452262	-4.17592
-----Sm154(115)-----				
結果	1.67601e-06	0.0116935	-0.0155841	-0.0393644
誤差	2.07056e-10	8.59923e-05	0.025817	0.0539947
相對誤差	0.000123541	0.00735384	-1.65663	-1.37166
-----Sm155(116)-----				
結果	2.83417e-11	0.00941753	0.00433144	-0.0783195
誤差	2.79539e-15	6.82279e-05	0.0239449	0.0446971
相對誤差	9.86315e-05	0.00724478	5.52816	-0.570702
-----Sm156(117)-----				
結果	4.61741e-10	0.0241972	0.0474206	0.0220812
誤差	1.16333e-13	0.000181392	0.0256185	0.0500153
相對誤差	0.000251944	0.00749638	0.540241	2.26506
-----Sm157(118)-----				
結果	4.07889e-12	0.0205297	0.017038	-0.0496043
誤差	8.84981e-16	0.000152677	0.024829	0.0499878
相對誤差	0.000216966	0.00743688	1.45728	-1.00773
-----Eu151(119)-----				
結果	5.67746e-10	0.117488	0.699586	1.09357
誤差	6.99637e-13	0.00108988	0.0414393	0.179521
相對誤差	0.00123231	0.00927653	0.059234	0.164161
-----Eu152(120)-----				
結果	4.16064e-10	0.117103	0.69575	1.08698
誤差	5.15089e-13	0.00107591	0.0416529	0.181922
相對誤差	0.00123801	0.00918777	0.0598677	0.167365

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Eu153(121)-----				
結果	5.45368e-06	0.00164281	-0.0429866	-0.0013431
誤差	9.50335e-11	1.23206e-05	0.0247613	0.0451334
相對誤差	1.74256e-05	0.0074997	-0.576022	-33.6041
-----Eu154(122)-----				
結果	1.21135e-06	0.0059094	-0.0501161	-0.0373497
誤差	7.55218e-11	4.32174e-05	0.0247215	0.0437242
相對誤差	6.23454e-05	0.00731333	-0.493284	-1.17067
-----Eu155(123)-----				
結果	3.77037e-07	0.0019496	-0.00932026	-0.0105072
誤差	7.59381e-12	1.4467e-05	0.025265	0.0487678
相對誤差	2.01408e-05	0.00742048	-2.71077	-4.64138
-----Eu156(124)-----				
結果	1.99897e-07	0.0136952	0.090724	-0.0317559
誤差	2.86191e-11	0.000101511	0.0251884	0.049928
相對誤差	0.000143169	0.00741215	0.277638	-1.57224
-----Eu157(125)-----				
結果	6.15679e-10	0.00674169	0.0620123	-0.0222333
誤差	4.36999e-14	5.01617e-05	0.0267404	0.0622253
相對誤差	7.09785e-05	0.00744052	0.431212	-2.79874
-----Gd152(126)-----				
結果	1.09169e-09	0.117716	0.686608	1.04051
誤差	1.36946e-12	0.0010914	0.0416297	0.18049
相對誤差	0.00125444	0.00927143	0.0606311	0.173463
-----Gd153(127)-----				
結果	1.04036e-10	0.118166	0.686214	1.04275
誤差	1.29058e-13	0.00108706	0.0410987	0.177749
相對誤差	0.00124051	0.00919947	0.059892	0.170462
-----Gd154(128)-----				
結果	1.05624e-07	0.00521166	-0.0461846	-0.00263041
誤差	5.81841e-12	3.87675e-05	0.0261133	0.0494612
相對誤差	5.5086e-05	0.0074386	-0.565411	-18.8036

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Gd155(129)-----				
結果	3.06834e-09	0.0222887	0.00319681	-0.073547
誤差	7.2714e-13	0.000165662	0.0246907	0.0470145
相對誤差	0.000236982	0.00743259	7.72352	-0.639245
-----Gd156(130)-----				
結果	4.09008e-06	0.00761456	0.0491708	-0.0377718
誤差	3.26257e-10	5.66363e-05	0.0259445	0.053677
相對誤差	7.97677e-05	0.0074379	0.52764	-1.42109
-----Gd157(131)-----				
結果	4.20021e-09	0.0179359	0.00872323	-0.0803543
誤差	7.86256e-13	0.000130594	0.0244397	0.0464335
相對誤差	0.000187194	0.00728116	2.80168	-0.57786
-----Gd158(132)-----				
結果	7.98056e-07	0.00440218	-0.0748257	0.0478
誤差	3.67253e-11	3.3054e-05	0.0257271	0.0493812
相對誤差	4.60185e-05	0.00750854	-0.343827	1.03308
-----Gd160(133)-----				
結果	4.79808e-08	0.0417708	-0.0174804	-0.0748215
誤差	2.12544e-11	0.000304864	0.0243845	0.0476217
相對誤差	0.000442977	0.00729849	-1.39496	-0.63647
-----Tb159(134)-----				
結果	1.08774e-07	0.0064261	-0.0624551	-0.0144817
誤差	7.36707e-12	4.74326e-05	0.0249535	0.0454506
相對誤差	6.77281e-05	0.00738124	-0.399543	-3.13848
-----Tb160(135)-----				
結果	3.16771e-09	0.00756926	-0.0281396	-0.0537399
誤差	2.52781e-13	5.59065e-05	0.0243375	0.0448462
相對誤差	7.97993e-05	0.00738599	-0.864886	-0.834505
-----Dy160(136)-----				
結果	8.91267e-09	0.00736242	-0.0821029	-0.0202945
誤差	6.87264e-13	5.52437e-05	0.0249448	0.0473052
相對誤差	7.71109e-05	0.00750347	-0.303824	-2.33094

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Dy161(137)-----				
結果	1.60253e-08	0.00932218	-0.0604897	-0.0558816
誤差	1.58329e-12	6.81005e-05	0.0243509	0.0445001
相對誤差	9.87994e-05	0.00730521	-0.402563	-0.796328
-----Dy162(138)-----				
結果	1.19798e-08	0.00532386	-0.0394557	-0.0297728
誤差	6.74436e-13	3.91185e-05	0.0250701	0.0466221
相對誤差	5.62979e-05	0.00734777	-0.6354	-1.56593
-----U234(139)-----				
結果	8.75542e-08	0.0798333	0.182486	0.104201
誤差	7.35136e-11	0.000609058	0.0297741	0.0924849
相對誤差	0.000839635	0.00762912	0.163158	0.887565
-----U235(140)-----				
結果	0.000202142	0.0161997	-0.0285607	-0.0448746
誤差	3.45725e-08	0.000119492	0.0255577	0.0521378
相對誤差	0.000171031	0.0073762	-0.894855	-1.16186
-----U236(141)-----				
結果	0.000119803	0.0122686	-0.0416488	0.0226369
誤差	1.55181e-08	9.2096e-05	0.0263034	0.0508887
相對誤差	0.00012953	0.00750662	-0.631552	2.24804
-----U237(142)-----				
結果	2.85529e-07	0.0351777	-0.00129826	-0.00991633
誤差	1.063e-10	0.000263163	0.0254605	0.0478658
相對誤差	0.000372291	0.00748095	-19.6113	-4.82696
-----U238(143)-----				
結果	0.0208718	0.000364558	0.00356525	-0.0528531
誤差	8.10062e-08	2.68583e-06	0.0245778	0.0450986
相對誤差	3.88113e-06	0.00736737	6.89371	-0.853282
-----Np237(144)-----				
結果	1.39663e-05	0.0396519	0.0208781	-0.032133
誤差	5.8265e-09	0.000293419	0.0239329	0.0430546
相對誤差	0.000417184	0.00739987	1.14632	-1.33989

	数密度平均值	標準偏差	歪度	尖度
-----Np239(145)-----				
結果	2.18578e-06	0.0091234	0.00770924	-0.0782306
誤差	2.10317e-10	6.63269e-05	0.0240361	0.0443916
相對誤差	9.62208e-05	0.00726997	3.11783	-0.567446
-----pu238(146)-----				
結果	6.3857e-06	0.0635851	0.206227	0.15365
誤差	4.3329e-09	0.000494534	0.0282709	0.065645
相對誤差	0.000678532	0.00777751	0.137087	0.427237
-----Pu239(147)-----				
結果	0.000137343	0.0243542	0.0319379	-0.109091
誤差	3.53713e-08	0.000174199	0.0241665	0.0489447
相對誤差	0.000257539	0.00715273	0.756671	-0.44866
-----Pu240(148)-----				
結果	5.8236e-05	0.0422725	0.194842	0.103638
誤差	2.60605e-08	0.000321335	0.0277804	0.0678971
相對誤差	0.000447497	0.00760151	0.142579	0.655139
-----Pu241(149)-----				
結果	3.78074e-05	0.0328944	0.0195935	-0.029152
誤差	1.3056e-08	0.000244418	0.0254262	0.0527802
相對誤差	0.000345328	0.00743038	1.29769	-1.81052
-----Pu242(150)-----				
結果	1.64138e-05	0.0878516	-0.0594923	0.00280172
誤差	1.52604e-08	0.000661898	0.0247428	0.0449742
相對誤差	0.000929728	0.00753428	-0.415899	16.0524
-----Am241(151)-----				
結果	1.10111e-06	0.0642193	0.237106	0.0497641
誤差	7.53285e-10	0.000482462	0.0250267	0.0530191
相對誤差	0.000684114	0.00751273	0.105551	1.06541
-----Am242(152)-----				
結果	3.36592e-09	0.0364374	-0.0594862	0.0424193
誤差	1.29178e-12	0.000272892	0.0262265	0.0566647
相對誤差	0.00038378	0.00748934	-0.440883	1.33582

	数密度平均値	標準偏差	歪度	尖度
-----Am242m(153)-----				
結果	2.16615e-08	0.0967978	0.476705	0.547353
誤差	2.1758e-11	0.000811737	0.0346413	0.126857
相対誤差	0.00100446	0.00838591	0.0726683	0.231764
-----Am243(154)-----				
結果	3.49224e-06	0.090318	0.0104	-0.0137333
誤差	3.29269e-09	0.000679917	0.024584	0.0432172
相対誤差	0.000942859	0.00752804	2.36385	-3.14689
-----Cm242(155)-----				
結果	4.72189e-07	0.0405276	-0.0807838	0.0410761
誤差	2.00313e-10	0.000307137	0.0257605	0.0515195
相対誤差	0.000424222	0.00757848	-0.318882	1.25424
-----Cm243(156)-----				
結果	1.46321e-08	0.13175	0.0857131	0.0735632
誤差	2.00124e-11	0.000990113	0.0272915	0.0544004
相対誤差	0.0013677	0.0075151	0.318405	0.739505
-----Cm244(157)-----				
結果	1.49283e-06	0.101132	0.0879222	-0.0825566
誤差	1.58898e-09	0.000733945	0.0238104	0.0441047
相対誤差	0.00106441	0.00725726	0.270811	-0.534236
-----Cm245(158)-----				
結果	9.40872e-08	0.142986	0.22515	0.0426486
誤差	1.41245e-10	0.0010718	0.0251581	0.0483568
相対誤差	0.00150121	0.00749584	0.111739	1.13384
-----Cm246(159)-----				
結果	8.94144e-09	0.230474	0.387907	0.323268
誤差	2.15931e-11	0.00181195	0.0304377	0.0931762
相対誤差	0.00241495	0.00786183	0.0784664	0.288232