

制御変量法と感度係数を利用した
高効率ランダムサンプリング手法の高速化

原子炉工学研究室

木田拓実

目次

第1章	序論.....	1
1.1	研究背景.....	1
1.1.1	炉物理計算結果の不確かさ.....	1
1.1.2	炉物理パラメータの不確かさ評価方法.....	1
1.1.3	効率的なランダムサンプリング手法.....	1
1.2	研究目的.....	2
1.3	研究手順.....	2
第2章	CV法とCV-S法の理論.....	3
2.1	CV法.....	3
2.2	CV-S法.....	3
2.3	CV法、CV-S法による統計量の推定.....	4
2.3.1	対象とする統計量.....	4
2.3.2	CV法による統計量の推定.....	5
第3章	簡易問題での検討.....	8
3.1	CV法による簡易問題の計算.....	8
3.2	CV-S法による簡易問題の計算.....	10

第4章 燃焼問題による検討.....	18
4.1 CV-S法による燃焼問題の計算.....	18
4.1.1 燃焼問題の概要.....	18
4.1.2 汎用炉物理解析コードシステム CBZ.....	19
4.1.3 計算条件.....	20
4.1.4 ブートストラップ法.....	21
4.1.5 計算結果・考察.....	21
第5章 結論.....	32
参考文献.....	33
謝辞.....	34

第 1 章 序論

1.1 研究背景

1.1.1 炉物理計算結果の不確かさ

現在、幅広い分野において、数値計算からシステムの特性値・パラメータを予測することが行われている。計算モデルや計算手法の高度化によって数値計算の予測値の精度を向上させることは重要であるが、それと同時に、様々な要因による予測値の不確かさを定量化することも重要である。原子力工学の分野では、特に原子炉物理の分野において、不確かさの定量化に関する研究が、近年、活発に行われている。

原子炉物理分野において、数値計算の予測値の不確かさの要因はいくつかあるが、入力情報の 1 つである核データの不確かさが主なものの 1 つとして挙げられる。それを受けて、核データの不確かさに起因する炉物理計算結果の不確かさの定量化が、核データ工学・原子炉物理を跨いだ重要な研究課題となっている。

1.1.2 炉物理パラメータの不確かさ評価方法

核データの不確かさに起因する炉物理パラメータの不確かさを評価する方法は、感度係数を用いて誤差伝播を計算する方法[1]とランダムサンプリング法を用いる方法[2]とに大別される。前者は、感度係数を得るために摂動理論に基づく複雑な計算を行う必要があるが、感度係数さえ得ることができれば計算時間を要さないという利点がある。ただし、感度係数は、出力(炉物理パラメータ)の入力(核データ)に対する一次微係数であることから、出力と入力との間に線形性が仮定されるため、厳密な誤差伝播計算ができないという問題がある。一方、後者は、前者の方法における線形性を仮定しないことで、前者よりも正確な誤差伝播計算を行うことができるという利点がある。ただし、ランダムサンプリング法には膨大な計算時間を要するという短所があり、また、この方法から得られる結果(不確かさ)には必ず統計的な不確かさが含まれることになり、これを小さくするためにはサンプリング数(標本数)を大きくとらなければならない。

1.1.3 効率的なランダムサンプリング手法

これまでに、少ないサンプル数で不確かさの小さい結果を得るための効率的なランダムサンプリング手法として、ラテン超方格法[2]や、COST 法[3]といったものが考案されている。本研究室では、感度係数を計算するためのコード

を開発していることから、制御変量法(Control variate)と呼ばれる方法と感度係数(Sensitivity)を組み合わせる方法である CV-S 法が考案され、核燃料の燃焼問題においてその有効性がすでに示されている[4]。

CV-S 法とは、対象とする出力パラメータに対して、入力に対して線形に振舞う仮想的な出力パラメータを考え、これを類似パラメータと見なし、その 2 つのパラメータの差分に着目することで、少ないサンプル数で効率的に平均値を計算する方法である。

1.2 研究目的

現在の CV-S 法では、対象とするパラメータの一次近似を類似パラメータに設定している。例えば、燃料集合体の炉物理パラメータを対象とする出力パラメータとしたとき、類似パラメータは同一の燃料集合体の炉物理パラメータの一次近似としている。しかし、必ずしも類似パラメータは対象パラメータの一次近似ではなく、対象パラメータによく似た、より簡易に評価できるパラメータでも良いはずである。例えば、ある燃焼度のあるパラメータを対象としたとき、異なる燃焼度での同一のパラメータを類似パラメータとしても良いはずである。また、燃料集合体の炉物理パラメータを対象としたとき、類似パラメータは対象パラメータと相関が大きく、より簡易な燃料ピンセル体系の炉物理パラメータの一次近似であってもよいはずである。

以上のように、類似パラメータをより簡易な問題で求めることができれば、感度係数を容易に計算することが可能であり、CV-S 法の実用性が大きく向上することになる。本研究の目的は、上記の考え方に基づいて CV-S 法について実用性向上のための拡張を行い、炉物理パラメータの不確かさを効率的に求められることと、歪度、尖度の推定にも適用できることを実証することである。

1.3 本研究の流れ

本研究では目的達成の為に以下の手順で研究を行った。

1. 簡易問題を設定し計算を行うことで、1.2 節で述べた方法の妥当性を確認する。
2. 実際の燃焼問題に対して CV-S 法を適用し、燃焼に関わるパラメータの不確かさを効率的に求められることを実証する。

簡易問題、燃焼問題では、得られた結果から統計量を計算し、その統計量の不確かさについて計算を行うことで、歪度、尖度に適用でき効率的に計算できているかを確認した。上記の 1 と 2 の詳細な解説については後の章で述べる。

第2章 CV法とCV-S法の理論

本章では、1.1.3節で述べたCV法(制御変量法)とCV-S法の理論について述べ、それらを用いた統計量の推定方法についても述べる。

2.1 CV法

CV法は、対象とする出力パラメータに対して、振る舞いが類似であり、その統計量が既知もしくは統計量の高精度な推定が容易な別のパラメータを類似パラメータとし、その2つのパラメータの差分に着目することで、少ない標本数で平均値を効率的に計算する方法である[5]。この方法を標本分散の推定に初めて応用を試みたのが日本の原子力規制庁の研究グループであり[6][7]、詳細な理論的背景は論文[4]にまとめられている。また、CV法の分散低減効果については後の3.3節で統計量の推定方法を説明する際に述べる。

2.2 CV-S法

CV-S法は、対象とする出力パラメータに対して、入力に対して線形に振る舞う仮想的な出力パラメータを考え、これを類似パラメータと見なして制御変量法を適用する、というものである。CV-S法では感度係数を用いたパラメータを類似パラメータとしている。

2.1節で述べたCV法を用いる場合、CV法の効果は類似パラメータを適切に選ぶことで変化する。CV法の効果を高めるために類似パラメータを選ぶ際に重要なことはいくつかあり、1つは対象パラメータとの相関が大きいこと、もう1つは類似パラメータの計算負荷が軽いことである。後の2.3節で説明するように、相関の大きさはCV法の分散低減効果に大きく関わり、相関が大きいほど精度良く対象パラメータの推定が行える。また、CV法には少ないサンプル数で計算時間を短縮するという目的があるため、類似パラメータの計算負荷が軽く、容易に計算できることが望まれる。これらを満たす類似パラメータが、CV-S法で用いている感度係数を用いたパラメータである。入力に対する対象パラメータについての感度係数を用いることで対象パラメータと類似パラメータの相関が大きくなり、類似パラメータの計算負荷も軽くすることができる。これにより、CV-S法によって少ないサンプル数で計算時間を短縮し、精度の良い推定を行うことができる。

2.3 CV法、CV-S法による統計量の推定

2.3.1 対象とする統計量

本研究では、以下の4つの統計量を対象とした。

・期待値…確率の重みつき平均を表す。確率変数 X の確率密度関数を $p(x)$ と表すとき、期待値は式(2.1)で表される。以下では $E[X]=\mu$ とする。

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx \quad (2.1)$$

・分散…確率変数のばらつきを表す。式(2.2)で表され、本研究ではこの値の二乗根をとった、標準偏差の値を不確かさとしている。標準偏差は式(2.3)で表される。

$$\begin{aligned} V[X]&=E(X-\mu)^2 \\ &=E[X^2]-\mu^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\sigma[X]=\sqrt{V[X]} \quad (2.3)$$

・歪度…確率分布の非対称性の方向と、その程度を表す。式(2.4)で表される。この値が正であるほど確率分布の右の裾が長く、負であるほど左の裾が長くなり、0の場合は左右対称な分布となる。正規分布の場合は歪度が0となる。

$$\frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}=\frac{E[X^3]-3\mu E[X^2]+2\mu^3}{\sigma^3} \quad (2.4)$$

・尖度…確率分布の、中心の周囲の部分の尖り具合を表す。式(2.5)で表される。正規分布ではこの値が3となるので、この値から3を引いた値を正規分布からのずれの指標としている。本研究では、あらかじめ3を引いた値を用いる。この値が正であるほど正規分布より尖った分布となり、負であるほど丸く鈍い分布となる。

$$\frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4}-3=\frac{E[X^4]-4\mu E[X^3]+6\mu^2 E[X^2]-3\mu^4}{\sigma^4}-3 \quad (2.5)$$

2.3.2 CV法による統計量の推定

この節では、CV法、CV-S法による統計量の計算方法について述べる。これ以降では前提として、 X を求めたい対象パラメータ、 Y を対象パラメータとよく似た振る舞いをする類似パラメータとし、ある一定数の標本を用意する。このとき、 X と Y には強い相関があり、 $E[Y]$ 、 $V[Y]$ は既知であるとする。それぞれの統計量の求め方は以下の通りである。なお、このCV法、CV-S法を用いた期待値と分散の求め方については、論文[4]にまとめられている。

・期待値 $E[X]$

まず初めに、パラメータ H_1 を $H_1 = X - \alpha_1 Y$ と定義する。これを用いて $E[X]$ は式(2.6)で推定できる。

$$E[X] = E[H_1] + \alpha_1 E[Y] \quad (2.6)$$

このとき、 $E[H_1]$ の分散は $V[H_1]$ に比例しているので、 $V[H_1]$ が十分に小さければ、 $E[H_1]$ の分散も十分に小さくなり、精度良く $E[X]$ の推定が行える。ここで、 $V[H_1]$ は X と Y の共分散 $Cov[X, Y]$ を用いて

$$\begin{aligned} V[H_1] &= V[X - \alpha_1 Y] \\ &= V[X] + \alpha_1^2 V[Y] - 2\alpha_1 Cov[X, Y] \end{aligned} \quad (2.7)$$

と表される。このとき、 $V[H_1]$ が最小となる場合として、 $\frac{\partial V[H_1]}{\partial \alpha_1} = 0$ を考えると α_1 は

$$\alpha_1 = \frac{Cov[X, Y]}{V[Y]} \quad (2.8)$$

と定義される。よって、この α_1 の値を使うと式(2.6)より $E[X]$ を精度良く求めることができる。ここで注意すべきことは、既知の値である $E[Y]$ は、最後の $E[X]$ の推定のときにだけ用いているということである。式(2.8)では、 $V[Y]$ は標本からの推定値を用いている。こうすることで式(2.8)では、同様に標本から推定した $Cov[X, Y]$ との一貫性を保ち、 $Cov[X, Y]$ と $V[Y]$ の標本からの計算誤差を打ち消しあうことでより良い推定が行えるものと考えられる。

ここで、式(2.8)の α_1 の値を使うと、式(2.7)は

$$\begin{aligned} V[H_1] &= V[X] - \frac{Cov[X, Y]^2}{V[Y]} \\ &= V[X](1 - Corr[X, Y]^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。このとき、 $Corr[X, Y]$ は X と Y の相関係数を表す。 $Corr[X, Y]^2$ は0から1の値となるので、 $Corr[X, Y]^2 \neq 0$ ならば式(2.9)より、 $V[H_1] < V[X]$ となる。これは、統計的な不確かさの大きさについても同様である。よって直接 $E[X]$ を計算するよりも、 $E[H_1]$ から推定することで効率的に $E[X]$ を求めることができる。

・分散 $V[X]$

まず初めに、用意した標本から X^2 と Y^2 を計算し、パラメータ H_2 を $H_2 = X^2 - \alpha_2 Y^2$ と定義する。これを用いて $E[X^2]$ は式(2.10)で推定できる。

$$E[X^2] = E[H_2] + \alpha_2 E[Y^2] \quad (2.10)$$

このとき、 $E[H_2]$ の分散は $V[H_2]$ に比例しているので、 $V[H_2]$ が十分に小さければ $E[H_2]$ の分散も十分に小さくなり、精度良く $E[X^2]$ の推定が行える。ここで、 $V[H_2]$ は X^2 と Y^2 の共分散 $Cov[X^2, Y^2]$ を用いて

$$\begin{aligned} V[H_2] &= V[X^2 - \alpha_2 Y^2] \\ &= V[X^2] + \alpha_2^2 V[Y^2] - 2\alpha_2 Cov[X^2, Y^2] \end{aligned} \quad (2.11)$$

と表される。このとき、 $V[H_2]$ が最小となる場合として、 $\frac{\partial V[H_2]}{\partial \alpha_2} = 0$ を考えると

α_2 は

$$\alpha_2 = \frac{Cov[X^2, Y^2]}{V[Y^2]} \quad (2.12)$$

と定義される。この α_2 の値を使うと式(2.10)より精度良く $E[X^2]$ を求めることができる。このとき、式(2.2)より Y の分散が $V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$ で求められるので、既知の値である $E[Y]$ 、 $V[Y]$ を用いて $E[Y^2] = V[Y] + E[Y]^2$ として、 $E[Y^2]$ を求めることができる。式(2.10)ではこの $E[Y^2]$ の値を用いる。また同様に、式(2.2)より分散が $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$ で求められるので、CV法、CV-S法で求めた $E[X]$ と $E[X^2]$ を用いて $V[X]$ が求められる。

・歪度 $Sk[X]$

まず初めに、用意した標本から X^3 と Y^3 を計算し、パラメータ H_3 を $H_3 = X^3 - \alpha_3 Y^3$ と定義する。これを用いて $E[X^3]$ は式(2.13)で推定できる。

$$E[X^3] = E[H_3] + \alpha_3 E[Y^3] \quad (2.13)$$

このとき、 $E[H_3]$ の分散は $V[H_3]$ に比例しているので、 $V[H_3]$ が十分に小さければ $E[H_3]$ の分散も十分に小さくなり、精度良く $E[X^3]$ の推定が行える。ここで、 $V[H_3]$ は X^3 と Y^3 の共分散 $Cov[X^3, Y^3]$ を用いて

$$\begin{aligned} V[H_3] &= V[X^3 - \alpha_3 Y^3] \\ &= V[X^3] + \alpha_3^2 V[Y^3] - 2\alpha_3 Cov[X^3, Y^3] \end{aligned} \quad (2.14)$$

と表される。このとき、 $V[H_3]$ が最小となる場合として、 $\frac{\partial V[H_3]}{\partial \alpha_3} = 0$ を考えると

α_3 は

$$\alpha_3 = \frac{Cov[X^3, Y^3]}{V[Y^3]} \quad (2.15)$$

と定義される。この α_3 の値を使うと式(2.13)より精度良く $E[X^3]$ を求めることができる。このとき、 Y が正規分布に従うとすると Y の歪度は 0 なので、式(2.4)より $E[Y^3] - 3E[Y]E[Y^2] + 2E[Y]^3 = 0$ となるので、既知の値である $E[Y]$ 、 $E[Y^2]$ を

用いて $E[Y^3] = 3E[Y]E[Y^2] - 2E[Y]^3$ として、 $E[Y^3]$ を求めることができる。式(2.13)ではこの $E[Y^3]$ の値を用いる。また同様に、式(2.4)より歪度が

$\frac{E[X^3]-3E[X]E[X^2]+2E[X]^3}{\sqrt{V[X]}^3}$ として求められるので、CV法、CV-S法で求めた $E[X]$ 、

$E[X^2]$ 、 $V[X]$ を用いて $Sk[X]$ が求められる。

・尖度 $Ku[X]$

まず初めに、用意した標本から X^4 と Y^4 を計算し、パラメータ H_4 を $H_4=X^4-\alpha_4Y^4$ と定義する。これを用いて $E[X^4]$ は式(2.16)で推定できる。

$$E[X^4] = E[H_4] + \alpha_4 E[Y^4] \quad (2.16)$$

このとき、 $E[H_4]$ の分散は $V[H_4]$ に比例しているので、 $V[H_4]$ が十分に小さければ $E[H_4]$ の分散も十分に小さくなり、精度良く $E[X^4]$ の推定が行える。ここで、 $V[H_4]$ は X^4 と Y^4 の共分散 $Cov[X^4, Y^4]$ を用いて

$$\begin{aligned} V[H_4] &= V[X^4 - \alpha_4 Y^4] \\ &= V[X^4] + \alpha_4^2 V[Y^4] - 2\alpha_4 Cov[X^4, Y^4] \end{aligned} \quad (2.17)$$

と表される。このとき、 $V[H_4]$ が最小となる場合として、 $\frac{\partial V[H_4]}{\partial \alpha_4} = 0$ を考えると

α_4 は

$$\alpha_4 = \frac{Cov[X^4, Y^4]}{V[Y^4]} \quad (2.18)$$

と定義される。この α_4 の値を使うと式(2.16)より精度良く $E[X^4]$ を求めることができる。このとき、 Y が正規分布に従うとすると Y の尖度は0なので、式(2.5)

より $\frac{E[Y^4]-4E[Y]E[Y^3]+6E[Y]^2E[Y^2]-3E[Y]^4}{\sqrt{V[Y]}^4} - 3 = 0$ となるので、既知の値である $E[Y]$ 、

$E[Y^2]$ 、 $E[Y^3]$ 、 $V[Y]$ を用いて $E[Y^4]=3\sqrt{V[Y]}^4 + 4E[Y]E[Y^3]-6E[Y]^2E[Y^2]+ 3E[Y]^4$ と

して、 $E[Y^4]$ を求めることができる。式(2.16)ではこの $E[Y^4]$ の値を用いる。また

同様に、式(2.5)より歪度が $\frac{E[X^4]-4E[X]E[X^3]+6E[X]^2E[X^2]-3E[X]^4}{\sqrt{V[X]}^4} - 3$ として求められるの

で、CV法、CV-S法で求めた $E[X]$ 、 $E[X^2]$ 、 $E[X^3]$ 、 $V[X]$ を用いて $Ku[X]$ が求められる。

このようにCV法、CV-S法を用いることで統計量を効果的に求めることができる。ただし、高次の統計量を求める場合には、 $E[X^n]$ 、 $V[X]$ 等の評価が必要であり、対象とする統計量よりも低次の $E[X^n]$ を先に求める必要がある。

第3章 簡易問題による検討

簡易問題による検討では、まず初めに CV 法で統計量を求めその効果を確認し、次に CV-S 法で統計量を求めその効果を確認した。本章では、この簡易問題による検討について述べる。初めに CV 法、次に CV-S 法での検討について述べ、それぞれ統計量の計算方法と計算結果について述べる。

3.1 CV 法による簡易問題の計算

本研究では、統計量が既知であり、ともに正規分布に従う X、Y というパラメータを考え、X を求めたい対象パラメータ、Y を対象パラメータとよく似た振る舞いをする類似パラメータとした。表 3.1 に簡易問題の計算条件を示す。

表 3.1 CV 法での簡易問題の計算条件

	対象パラメータ X	類似パラメータ Y
平均値	0.5	1
標準偏差	0.25	0.5
X と Y の相関係数	0.95	

実際の計算では、対象パラメータの統計量の値は分からず、類似パラメータの統計量は既知のものとして計算した。また CV 法の結果と比べるために、CV 法を用いない通常の計算方法でも統計量を求めた。簡易問題では各統計量の不確かさを、100 セットの標本から同様の計算を行い求めた。これ以降の図では、誤差棒が 1σ の範囲に相当する統計量の不確かさを表している。

図 3.1 から図 3.4 に期待値、標準偏差、歪度、尖度の推定結果を示す。これらの図より、4 つすべての統計量の推定において、通常の計算方法よりも CV 法を用いた推定の方が、同じ標本数でも不確かさが小さくなっている事が分かる。これより CV 法を用いた計算の方が通常の計算方法に比べ、少ないサンプル数で不確かさが小さく、効率的に推定を行えることが分かる。

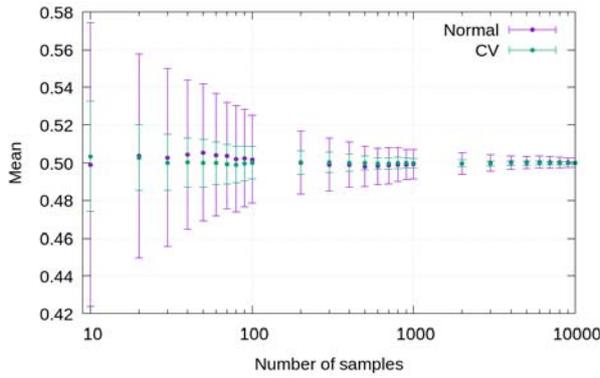


図 3.1 CV 法による期待値の推定

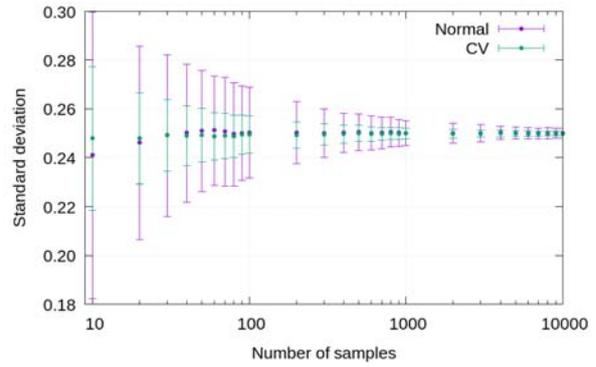


図 3.2 CV 法による標準偏差の推定

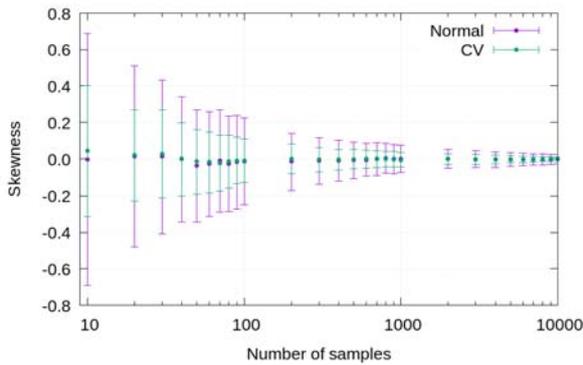


図 3.3 CV 法による歪度の推定

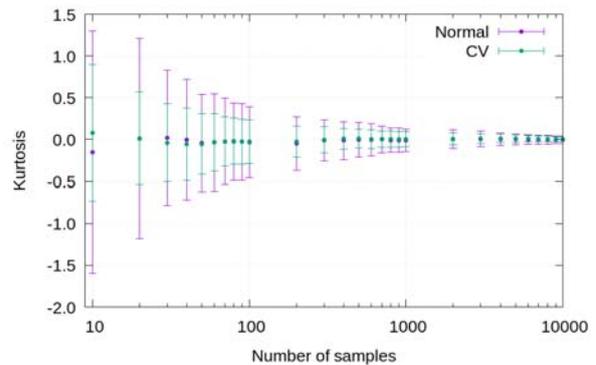


図 3.4 CV 法による尖度の推定

また、図 3.5 から図 3.8 に期待値、標準偏差、歪度、尖度の **Uncertainty reduction** と相関係数の関係についての計算結果を示す。この計算は同じ計算条件で、相関係数の値のみを変えて計算した結果である。ここで、**Uncertainty reduction** とは、CV 法の不確かさの低減効果を表す値であり、CV 法で求めた統計量の不確かさを、通常の方法で求めた統計量の不確かさで割った比で表される。値が 0 に近いほど、CV 法の効果が高いことを示す。これ以降では **Uncertainty reduction** を **UR** と表す。この図から、相関係数の値が大きいほど、**UR** の値が小さくなっていると分かる。また、相関係数の値が小さいと CV 法の効果があまり表われず、場合によっては通常の方法の方が不確かさが小さくなった。このように **UR** と相関係数には依存性があるので、CV 法を用いる場合には相関係数が大きくなるような、対象パラメータに対する類似パラメータの選び方が重要となる。さらに、高次の統計量になるにつれ相関係数の値が同じでも **UR** が低下していることが分かる。このことから、高次の統計量であるほど相関係数を大きくすることの重要性が分かる。

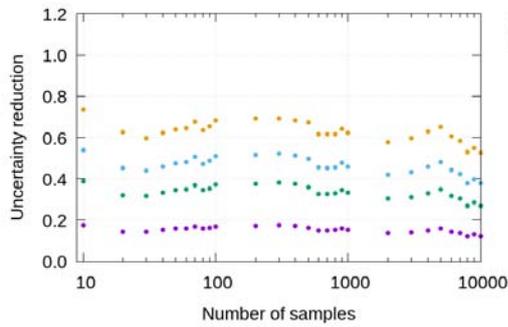


図 3.5 CV法で求めた期待値の UR

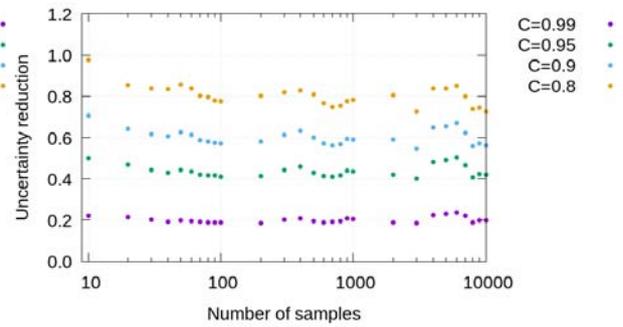


図 3.6 CV法で求めた標準偏差の UR

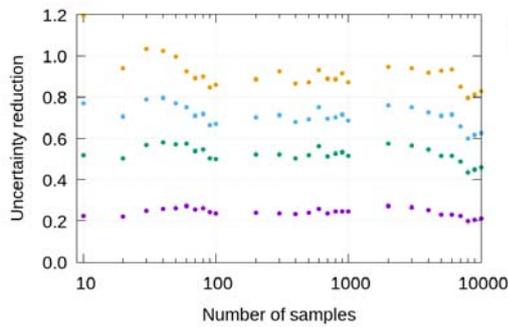


図 3.7 CV法で求めた歪度の UR

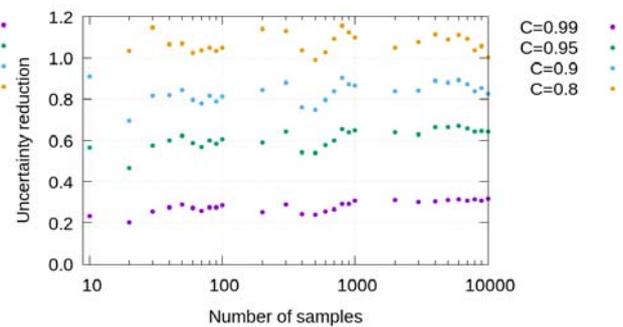


図 3.8 CV法で求めた尖度の UR

3.2 CV-S 法による簡易問題の計算

本研究の CV-S 法の計算では、CV 法のとくと計算条件が異なる。表 3.2 にその計算条件を示す。

表 3.2 CV-S 法での簡易問題での計算条件

対象パラメータ X	$X=S_1Z+S_2Z^2$
類似パラメータ Y	$Y=S_1Z$
入力パラメータ Z	$Z\sim N(1.0, 0.5^2)$

本研究では、対象パラメータを表 3.2 のように決めたとき、類似パラメータは対象パラメータを一次の項で打ち切ったものとする。また、入力パラメータは、平均値が 1.0、標準偏差が 0.5 の正規分布に従うパラメータとする。この Z をある一定数標本としてとることで、同じ数だけ対象パラメータと類似パラメータの標本を得ている。表中の S の値はそれぞれ各項の係数であり、この値を変えながら計算を行っていく。このとき、 X の値に入力の 2 次の項が含まれているので、 X の値が正規分布から少しずれる。これによりこの計算では、歪度、尖度の値が 0 ではなくなる。

まず初めに、対象パラメータ X について $S_1=1.0$ とし、 S_2 の値を変化させたときの正規分布からのずれを確かめた。図 3.9 にその結果を示す。この結果から、 S_2 の値を変えることで 2 次の項の影響により頻度分布が歪むことが分かる。

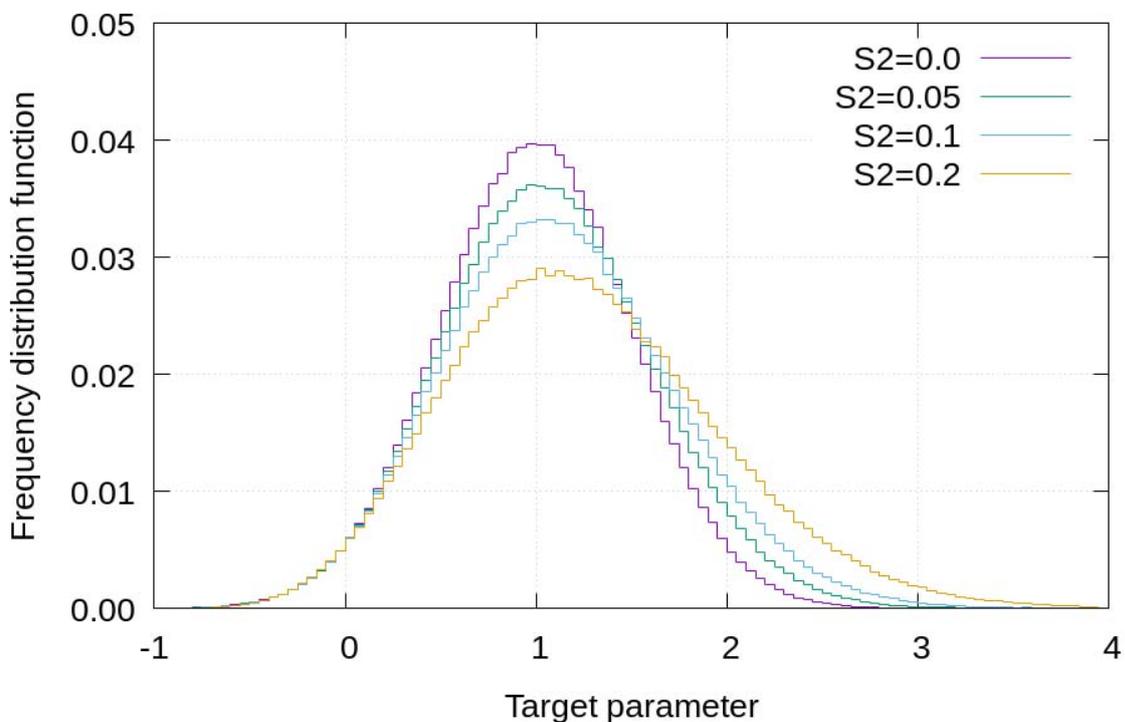


図 3.9 異なる S_2 の値での対象パラメータの頻度分布

次に、表 3.2 中の計算条件で $S_1=1.0$ 、 $S_2=0.2$ として統計量の計算を行った。図 3.10 から図 3.13 に期待値、標準偏差、歪度、尖度の推定結果を示す。これらの図より、4 つすべての推定において通常の方法よりも CV-S 法を用いた推定の方が、同じ標本数でも不確かさが小さくなっている事が分かる。これより CV-S 法を用いた計算の方が、通常の方法に比べ、少ないサンプル数で不確かさが小さく、効率的に推定を行えることが分かる。

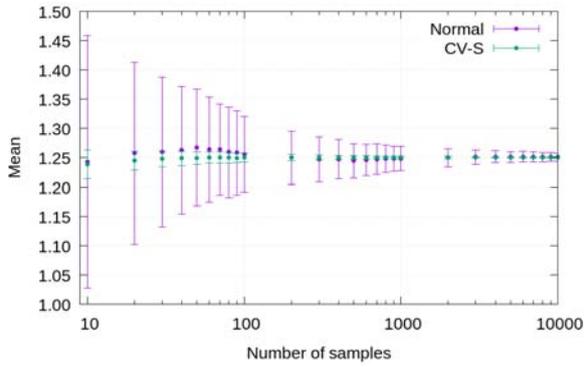


図 3.10 CV-S 法で求めた期待値の UR

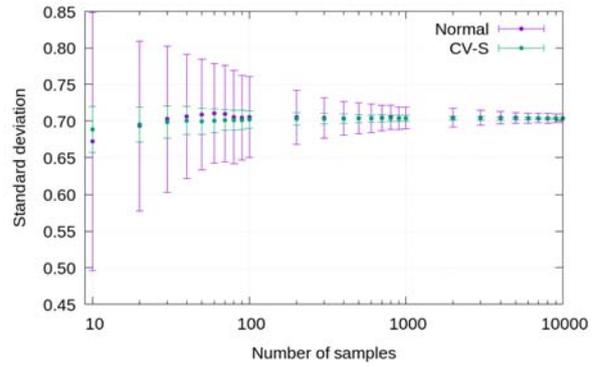


図 3.11 CV-S 法で求めた標準偏差の UR

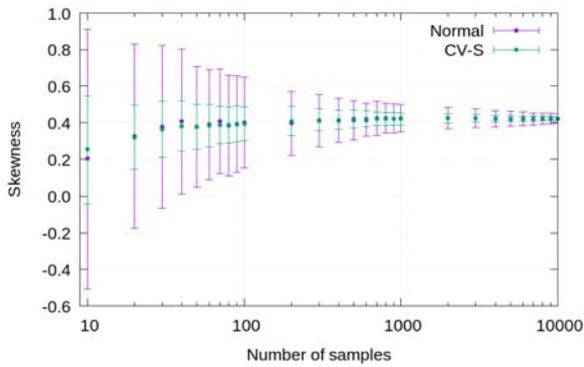


図 3.12 CV-S 法で求めた歪度の UR

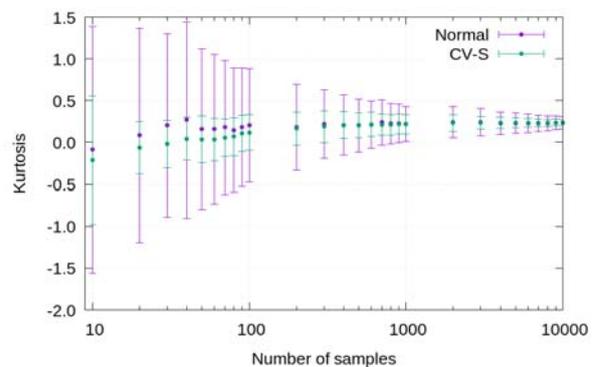


図 3.13 CV-S 法で求めた尖度の UR

また、図 3.14 から図 3.17 に期待値、標準偏差、歪度、尖度の、UR と S_2 の値の関係についての計算結果を示す。この計算は同じ計算条件で、 S_2 の値のみを変えて計算した結果である。このように、 S_2 の値を変えると UR の値も変化している。これは、 S_2 の値が変わることで対象パラメータの 2 次の項の影響が変わり、類似パラメータとの相関係数が変化するためである。このように、2 次の項の影響が大きくなるにつれ CV-S 法の効果は低下していく。

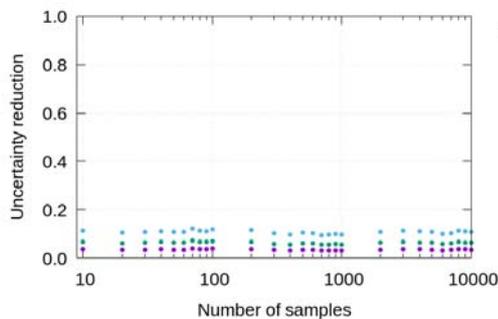


図 3.14 CV-S 法で求めた期待値の UR

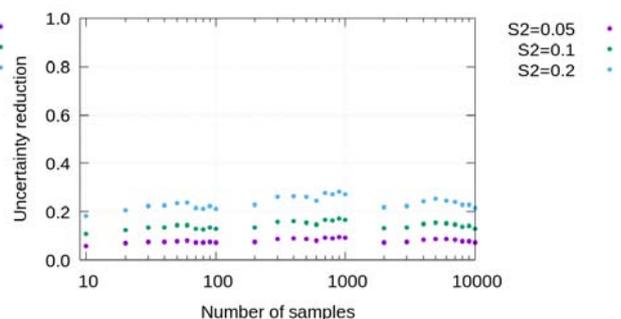


図 3.15 CV-S 法で求めた標準偏差の UR

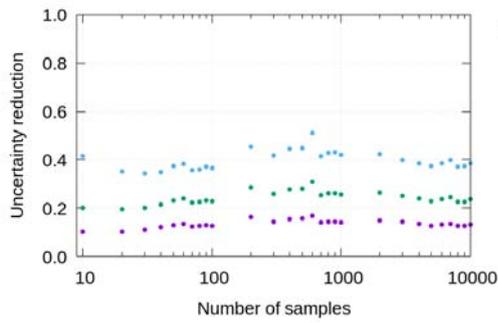


図 3.16 CV-S 法で求めた歪度の UR

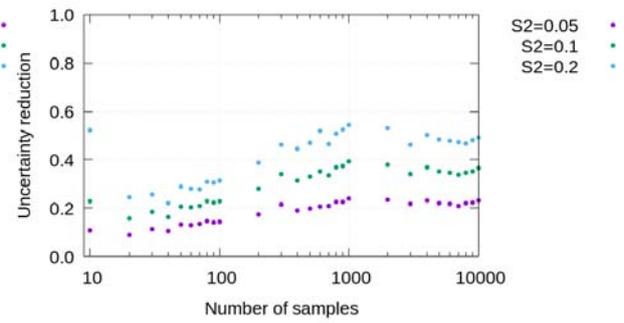


図 3.17 CV-S 法で求めた尖度の UR

これまでの結果より、対象パラメータと類似パラメータを適切に設定することで、CV 法、CV-S 法により統計量を効果的に求められることが分かった。

次に、CV-S 法において類似パラメータを対象パラメータの 1 次近似とは異なるものにした場合どうなるかを確認した。そこで、類似パラメータを $Y' = S'_1 Z$ とし、 S'_1 の値を変えて計算を行うことにした。ここで、これまでの結果から CV-S 法の効果と相関係数には依存性があることが分かっているので、 S'_1 の値を変えると相関係数がどうなるかを考えた。

相関係数は X の標準偏差と Y の標準偏差と X 、 Y の共分散を用いて以下の式 (3.1) で表される。

$$\text{Corr}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}} \quad (3.1)$$

ここで、 $\text{Corr}[X, Y]$ は X と Y の相関係数を表す。このとき、 x_i 、 y_i をそれぞれの標本、 \bar{x} 、 \bar{y} をそれぞれの平均とすると、式 (3.1) は以下の式 (3.2) のように表せる。

$$\text{Corr}[X, Y] = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.2)$$

ここで、 $S'_1 = \alpha S_1$ 、すなわち $y'_i = \alpha y_i$ として $\text{Corr}[X, Y']$ を求めると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Corr}[X, Y'] &= \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y'_i - \bar{y}')}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(y'_i - \bar{y}')^2}} \\ &= \frac{\sum(x_i - \bar{x})(\alpha y_i - \alpha \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(\alpha y_i - \alpha \bar{y})^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\alpha \sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}} \\
&= \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}} \\
&= \text{Corr}[X, Y]
\end{aligned}$$

このように、類似パラメータの係数 S_1' の値を変えても相関係数は変わらないので CV-S 法の効果は変わらないと考えられる。これを確かめるために、 S_1' と S_2 の値を変えながら相関係数を求めた。図 3.18 にその結果を示す。この図からも、類似パラメータの係数 S_1' の値を変えて計算しても相関係数が変わらないことを確認した。

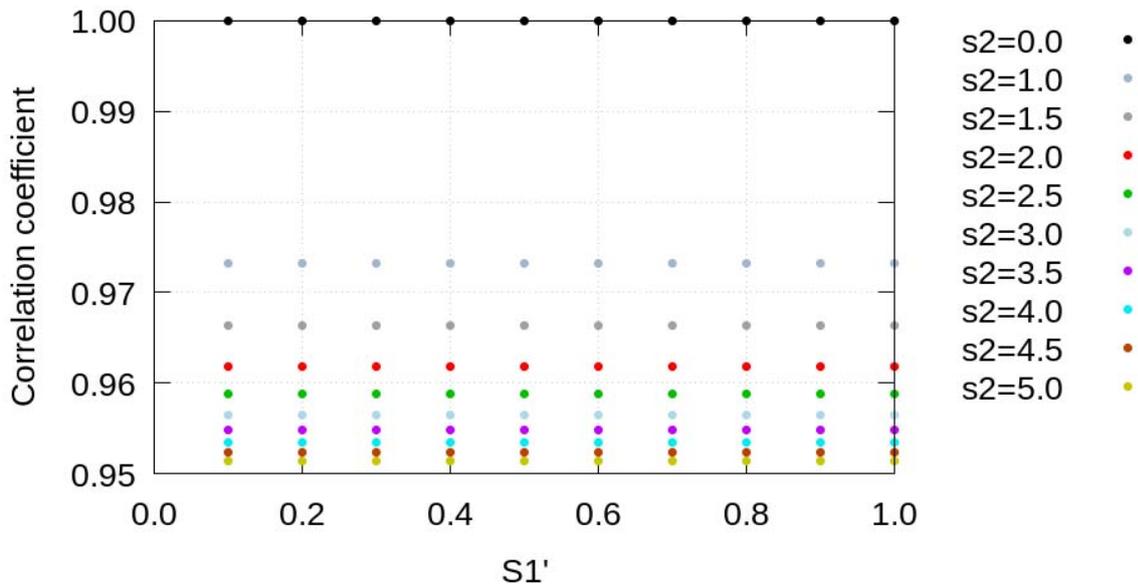


図 3.18 類似パラメータの係数 S_1' と相関係数の関係

また、図 3.19 に $S_2 = 1.0$ とし、 S_1' の値を変えながら標準偏差を求めた結果を示す。この図からも S_1' の値を変えても CV-S 法の効果が変わらないことを確認した。

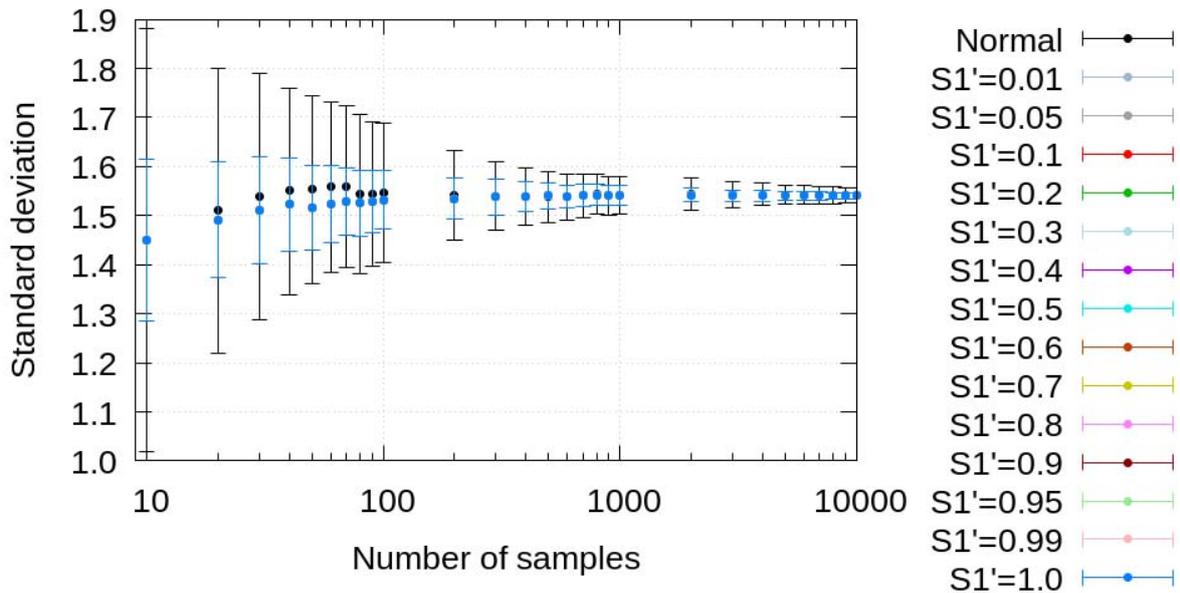


図 3.19 類似パラメータの係数 S_1' を変えて求めた標準偏差

次に、計算条件を変え、対象パラメータが二つの 1 次の項からなり、変数が二つある場合を考えた。表 3.3 にその計算条件を示す。

表 3.3 対象パラメータの 1 次の項が二つの場合の計算条件

対象パラメータ X	$X=S_1Z_1+S_2Z_2$
類似パラメータ Y	$Y=S_1Z_1+S_2Z_2$
入力パラメータ Z_1	$Z\sim N(1.0, 0.5^2)$
入力パラメータ Z_2	$Z\sim N(0.5, 0.25^2)$

今回も、対象パラメータに対し、類似パラメータは対象パラメータの 1 次の項で打ち切ったものとした。先ほどまでの計算と異なり入力パラメータが 2 つあり、1 次の項の係数も 2 つある。今回は、類似パラメータを $Y'=S_1'Z_1+S_2'Z_2$ として S_1' 、 S_2' の値を変えて計算を行った。対象パラメータは $S_1=S_2=1$ とし、類似パラメータでは $S_1'=S_2'=1$ を基準として、どちらかの値を増加させ、もう一方の値を減少させて計算を行った。

図 3.20 に S_1' を増加させた場合、図 3.21 に S_2' を増加させた場合の標準偏差を求めたときの UR の関係について示した。この結果から、二つの変数の差が小さく、対象パラメータに近いほど UR の値が小さくなった。これは、すでに述べた対象パラメータと類似パラメータの相関によるものである。また、 S_1' を増加させた場合の方が S_2' を増加させた場合よりも UR の値が全体的に小さくなっていることが分かる。

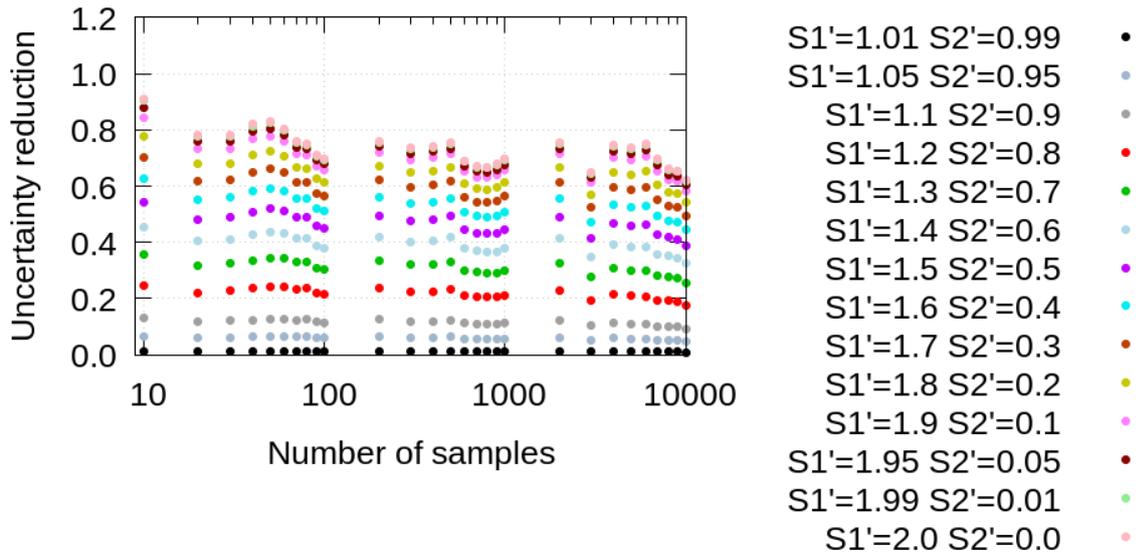


図 3.20 S_1' を増加させたときの UR

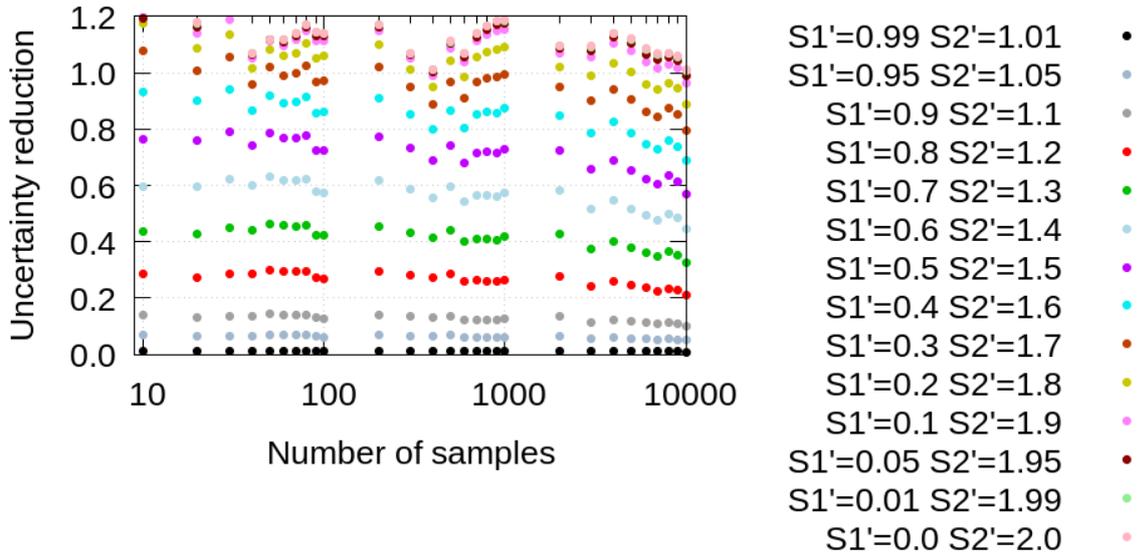


図 3.21 S_2' を増加させたときの UR

S_1' と S_2' の増減の違いにより UR に影響があると分かったので、標本数が 10,000 のときの相関係数と UR の関係について求めた。図 3.22 にその結果を示す。この結果からも相関係数と UR の依存性が確認でき、それとは別の S_1' と S_2' のどちらが増加するかによる UR への影響があることも分かる。

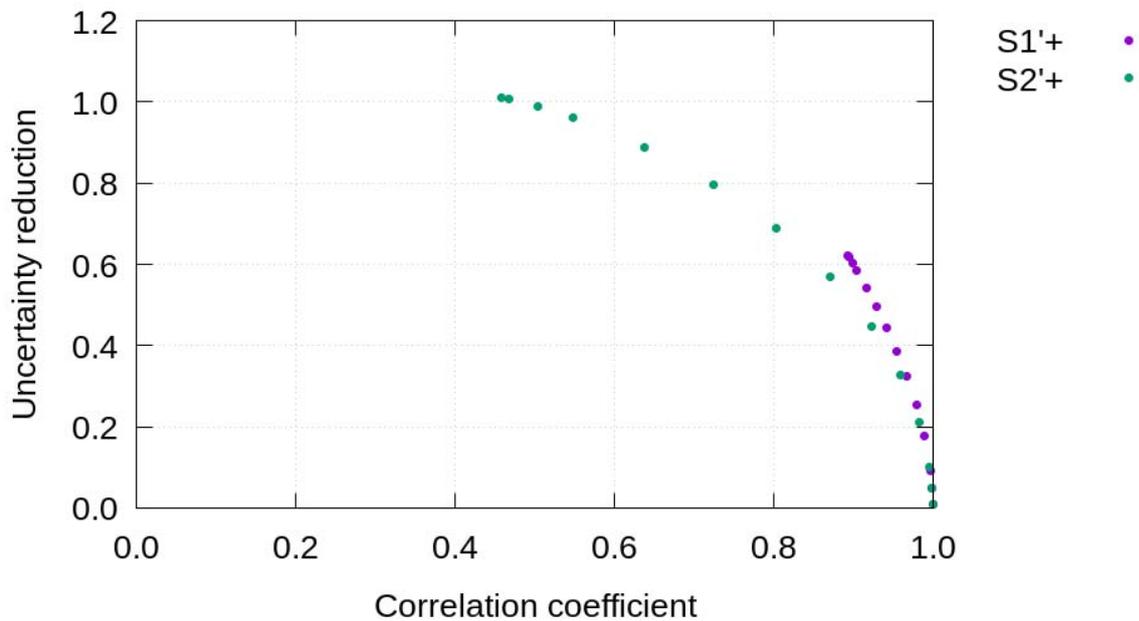


図 3.22 S_1' 、 S_2' を増加させたときの相関係数と UR の関係

ここで、 S_1' と S_2' を 0.0 から 2.0 まで変化させたときについて調べた。図 3.23 に相関係数について、図 3.24 に UR について調べた結果を示す。この結果から、相関係数が同じような値であっても UR の値が変化するということが分かり、明らかに相関係数と UR の依存性とは別に S_1' と S_2' の増減の違いによる UR への影響が分かった。このように、2つの変数がある場合にはどちらの項が大きいかによっても UR の値が変化すると分かった。

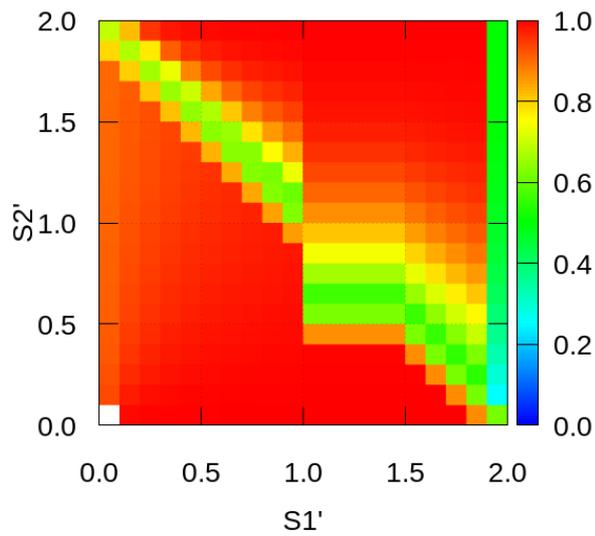


図 3.23 S_1' 、 S_2' の増減と相関係数の関係

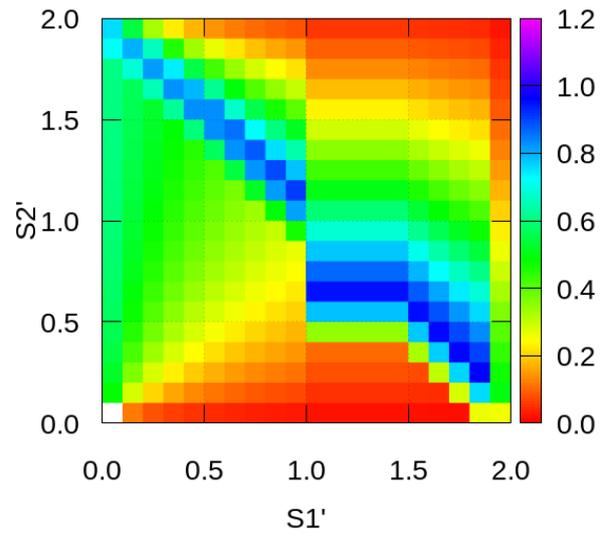


図 3.24 S_1' 、 S_2' の増減と UR の関係

これらの結果より、本研究の目的である類似パラメータを対象パラメータの1次近似の値と違う値で計算した場合の結果を簡易問題で確認した。

第4章 燃焼問題による検討

燃焼問題による検討では、核燃料の燃焼問題において CV-S 法を用いて炉物理パラメータを求めた。本章では、この燃焼問題による検討について述べる。初めに計算方法や条件について述べ、次に計算結果について述べる。

4.1 CV-S 法による燃焼問題の計算

4.1.1 燃焼問題の概要

この項では、今回行った燃焼問題について説明する。計算は汎用炉物理解析コードシステム CBZ を用いて行った。今回の計算で対象とした炉物理パラメータは、いくつかの燃焼度での中性子無限増倍率と核種数密度である。核種数密度は、Tc-99、I-129、Cs-134、Cs-137、Eu-151 の 5 核種を対象とした。これらの核種の選定理由は、Tc-99、I-129、Eu-151 の 3 核種は正規分布からずれる傾向を示すことが分かっているためである[8]。また、Cs-134 は過酷事故の際に重要となる核分裂生成物で、燃焼度に対して二次関数状に増加していく核種だからである。Cs-137 は過酷事故の際の環境への放出で大きな問題となる核種なので対象とした。今回の燃焼計算では、炉物理パラメータの不確かさの要因として、反応断面積(アクチノイド核種のみ)、半減期、崩壊分岐比、核分裂収率の 4 つを考慮した。

今回の計算手順は以下の様に行った。

1. 中性子増倍率、核種の感度を求める。
2. 燃焼計算により求めたいパラメータの値を求め、同時に、感度を用いた計算により得られる相対変動量を求める。
3. 得られた結果から不確かさを計算する。

1.では、求めたい炉物理パラメータの核データに対する感度をそれぞれ求めた。次に 2.の燃焼計算では、核データを用いてサンプリングを行い複数の断面積ライブラリと燃焼チェーンを作り、それらを用いて着目した燃焼度での炉物理パラメータを得ている。この燃焼計算では、1,400 の FP 核種についての核データをサンプリングした後、計算時間の低減のため、137 の FP で構成される簡易燃焼チェーンを作成し、それを用いて計算を行っている。このとき、同時に、1.で求めた感度を利用することで、燃焼計算を行わずに、式(4.1)のような個々の核データの平均値からの変動に起因する炉物理パラメータの変動量も求めた。ここで σ は考慮している核データの値、 $\bar{\sigma}$ はその核データの平均値、 k は対象としている炉物理パラメータの値である。

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \sigma - \bar{\sigma} \\ \Delta k &= \frac{\partial k}{\partial \sigma} \Delta\sigma\end{aligned}\tag{4.1}$$

ここで得られる変動量は式(4.2)のような相対変動量なので式(4.3)のように元の値に戻して使っている。ここで、 \bar{k} は対象としている炉物理パラメータの平均の値である。

$$\frac{\Delta k}{\bar{k}}, \frac{\Delta\sigma}{\bar{\sigma}}\tag{4.2}$$

$$k = \bar{k}\left(1 + \frac{\Delta k}{\bar{k}}\right)\tag{4.3}$$

そして 3.で、燃焼計算から得られた結果を対象パラメータ、感度から得られた相対変動量から求めた結果を類似パラメータとして CV-S 法を適用した。

今回行った燃焼計算では、サンプリング数を 10,000 とした。そこから CV-S 法を使い統計量を求め、求めた統計量の不確かさをブートストラップ法[8][9]を用いて求めた。

4.1.2 汎用炉物理解析コードシステム CBZ

CBZ とは、日本原子力研究開発機構で開発されたコードシステム CBG をベースとして、2012 年 4 月より本研究室で開発が行われている、汎用炉物理解析コードのことである。この CBZ は核分裂性物質を含む系の臨界、燃焼、遮蔽といった、原子炉内とその周囲における中性子、ガンマ線の輸送に関わる物理現象を数値的に模擬する機能と、そのために用いられる核データの処理などの幅広い機能を有したコードシステムである。この CBZ は、多種多様な炉物理計算が容易に実現可能であることが特徴である。本研究ではその中でも、燃焼計算、感度計算に用いた。

燃焼計算では、CBZ の Burner というモジュールを用いた。この Burner ではピンセル体系での燃焼計算を行うことができ、衝突確率法によって中性子輸送方程式を解くことで中性子束計算を行っている。また、燃焼後の核特性の核データに対する感度を計算するメソッドも実装されており、これを用いて中性子無限増倍率と特定の核種の数密度の感度を求めた。さらに、CBZ の UNC というモジュールを用いて、核データに起因する炉物理パラメータの不確かさについても求め、CV-S 法を用いる際に利用した。

4.1.3 計算条件

本研究では燃料ピンセル体系の炉物理パラメータに関する計算を行った。表 4.1 に本研究の計算条件を示す。また、表 4.2 から表 4.4 にUO₂燃料、被覆管、減速材の組成を示す。

表 4.1 燃焼計算条件

燃料	UO ₂ 燃料 濃縮度 4.1% 968.8K
被覆管材料	ジルカロイ 604K
減速材	軽水 574.2K
ピンピッチ	1.265cm
燃料ペレット半径	0.412cm
被覆管外側半径	0.476cm
線出力	179W/cm
燃焼期間	45GWd/t まで燃焼

表 4.2 UO₂燃料の組成(核種数密度)

U-235	9.349×10^{-4} /barn/cm
U-238	2.159×10^{-2} /barn/cm
O-16	4.505×10^{-2} /barn/cm

表 4.3 被覆管の組成(核種数密度)

Zr	3.786×10^{-2} /barn/cm
Fe	2.382×10^{-4} /barn/cm
Cr	6.770×10^{-5} /barn/cm

表 4.4 減速材の組成(核種数密度)

H-1	5.572×10^{-2} /barn/cm
O-16	2.786×10^{-2} /barn/cm
B-10	4.592×10^{-6} /barn/cm
Ni	3.688×10^{-4} /barn/cm
Cr	1.609×10^{-4} /barn/cm
Fe	1.306×10^{-4} /barn/cm

4.1.4 ブートストラップ法

本研究で得られる統計量は、乱数を用いて抽出された有限の標本による推定なので、必ず統計的な不確かさが含まれる。よって、その不確かさを評価する必要がある。

着目する標本が正規分布である場合は評価式を用いることができるが、本研究で対象としている標本は、必ずしも正規分布に従うとは限らない。よって、本研究ではこの不確かさの評価にブートストラップ法を用いた。

ブートストラップ法とはリサンプリング法の一つで、1 セットの標本から複数のセットの標本を作り、そのそれぞれのセットで統計量を評価し、さらにそれらの統計量を統計的に評価するという方法である。これを用いることで、元の母集団からの標本の抽出が 1 回で済むので、計算時間を短縮して母集団の推定量である標本の統計量が評価できる。

4.1.5 計算結果・考察

まず初めに、中性子無限増倍率について求めた結果を述べる。図 4.1 から図 4.3 に燃焼初期 (0GWd/t) の、図 4.4 から図 4.6 に燃焼末期 (45GWd/t) の中性子無限増倍率の値を、求めたいものと同じ感度を使って求めた標準偏差、歪度、尖度の値を示す。これらの図より、求めたいものと同じ感度を使った場合には CV-S 法により効率よく求めることができると分かる。

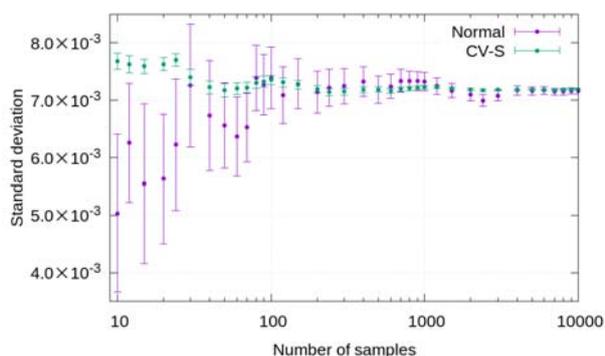


図 4.1 燃焼初期の
中性子無限増倍率の標準偏差

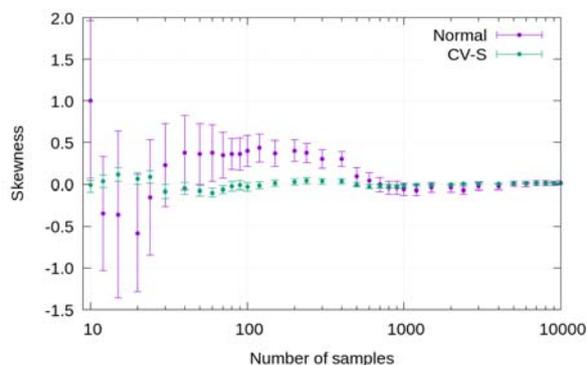


図 4.2 燃焼初期の
中性子無限増倍率の歪度

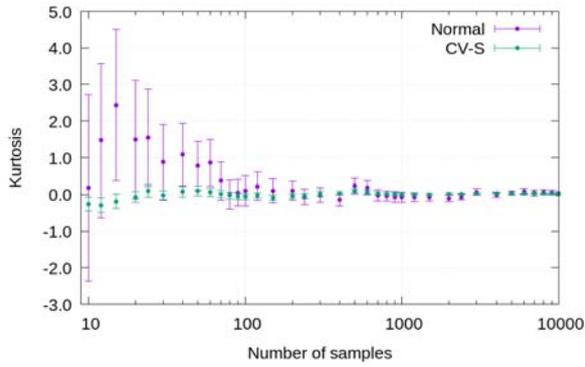


図 4.3 燃焼初期の
中性子無限増倍率の尖度

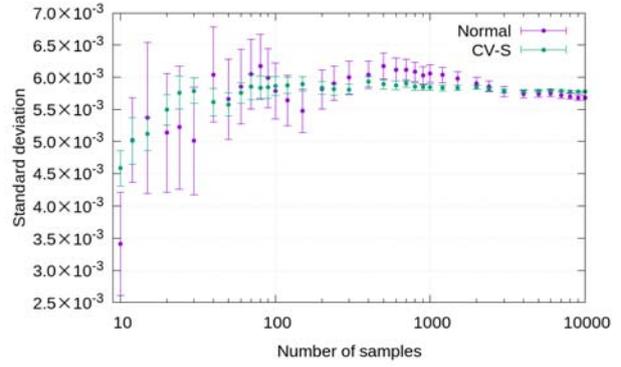


図 4.4 燃焼末期の
中性子無限増倍率の標準偏差

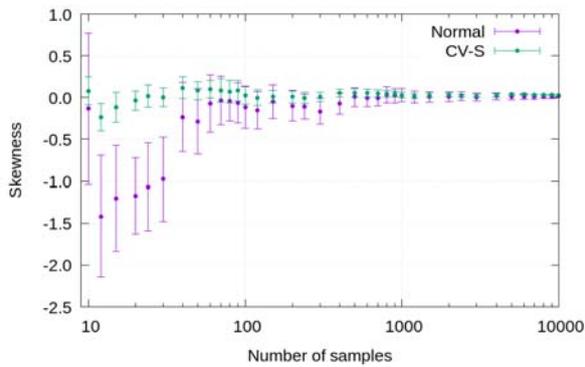


図 4.5 燃焼末期の
中性子無限増倍率の歪度

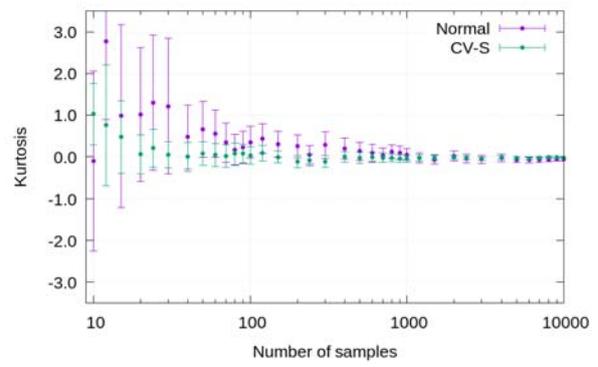


図 4.6 燃焼末期の
中性子無限増倍率の尖度

ここで、類似パラメータを対象パラメータとは異なる燃焼度のパラメータに変えて計算を行った。図 4.7 から図 4.9 に、燃焼末期の中性子無限増倍率の感度を用いて燃焼初期の中性子無限増倍率を求めた標準偏差、歪度、尖度について示す。この図から、燃焼初期の中性子無限増倍率の統計量は、燃焼末期の中性子無限増倍率の感度では CV-S 法を用いても効率的に求めることができないと分かった。

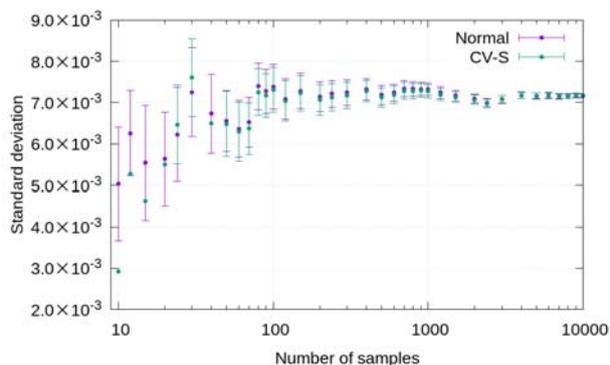


図 4.7 燃焼末期の感度を用いた燃焼初期の中性子無限増倍率の標準偏差

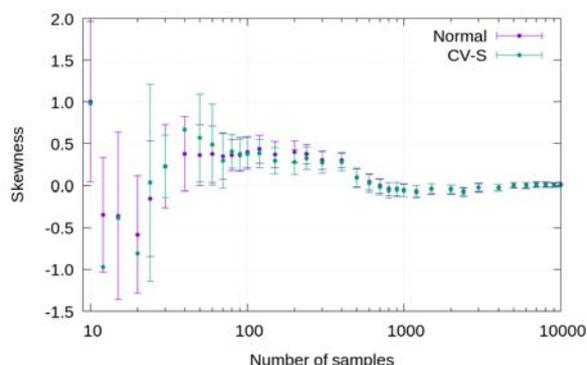


図 4.8 燃焼末期の感度を用いた燃焼初期の中性子無限増倍率の歪度

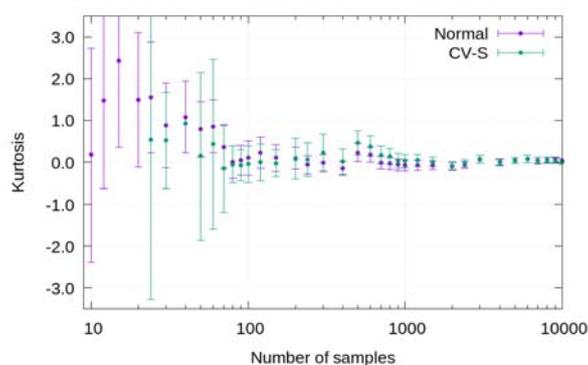


図 4.9 燃焼末期の感度を用いた燃焼初期の中性子無限増倍率の尖度

この結果から、中性子無限増倍率について、求めたい燃焼度と異なる燃焼度の感度を用いたとき、燃焼度の違いによりどれだけ結果に影響が出るのかを確かめた。図 4.10 から図 4.12 に、燃焼末期の中性子無限増倍率の感度を用いて、いくつかの燃焼度の中性子無限増倍率を求めた標準偏差、歪度、尖度の UR について示す。この図から、求める中性子無限増倍率の燃焼度が用いる感度の燃焼度から離れるにつれ、CV-S 法の効果が弱くなっていくことが分かる。また、この影響は、高次の統計量になるほど表れている。これより、中性子無限増倍率を求めるときに CV-S 法を用いる場合、ある程度までであれば、求めたいものと異なる燃焼度の感度を用いても効果的に求められると分かった。

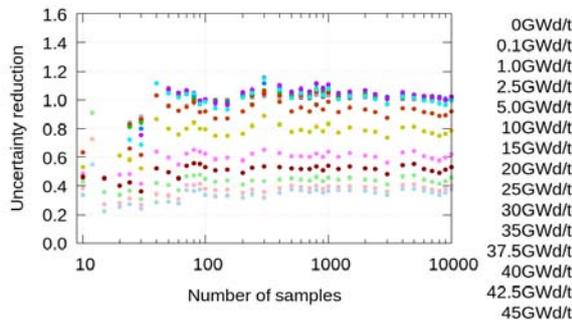


図 4.10 燃焼末期の感度を用いて求めた
中性子無限増倍率の標準偏差の UR

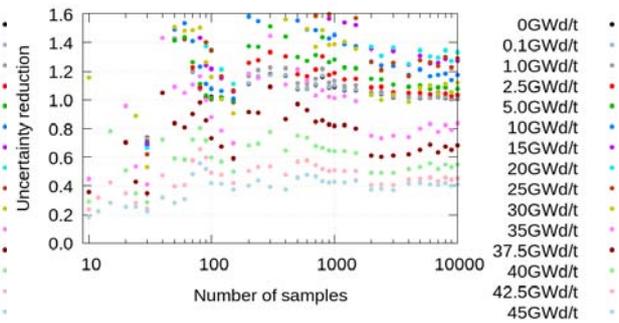


図 4.11 燃焼末期の感度を用いて求めた
中性子無限増倍率の歪度の UR

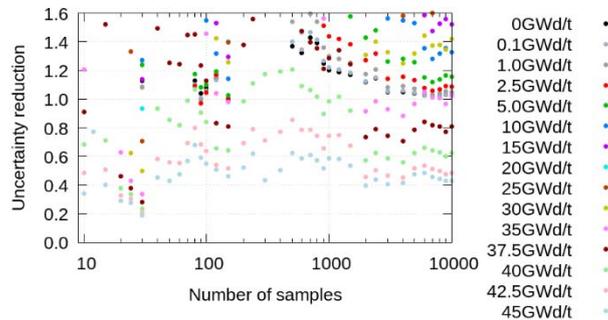


図 4.12 燃焼末期の感度を用いて求めた
中性子無限増倍率の尖度の UR

次に、核種数密度について求めた結果を述べる。図 4.13 から図 4.27 までに、それぞれの核種の燃焼末期の数密度を、同じ核種の同じ燃焼度の感度を用いて求めた標準偏差、歪度、尖度の結果を示す。これらの図より、核種数密度も求めたいものと同じ燃焼度の感度を使うことで効率よく求められることが分かる。また、対象とする核種により傾向に違いがある。I-129 と Cs-137 では特に CV-S 法の効果が表われており、サンプル数が少ないときから求めた統計量の不確かさの値が小さく、値が収束している。Tc-99、Cs-134、Eu-151 においても CV-S 法の効果は表われているが、特に Cs-134 では他の核種に比べ求めた統計量の不確かさが大きくなった。

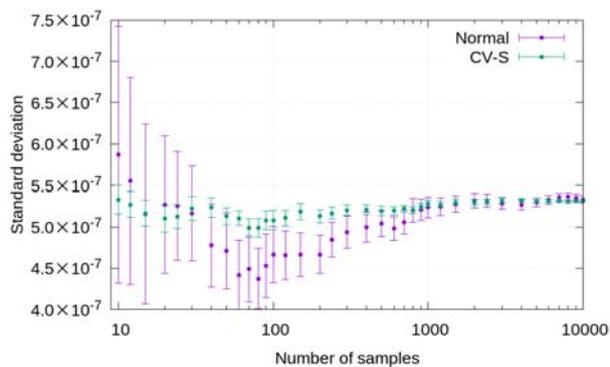


図 4.13 燃焼末期の Tc-99 の標準偏差

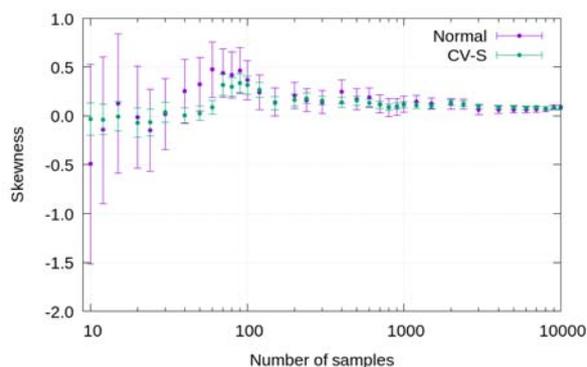


図 4.14 燃焼末期の Tc-99 の歪度

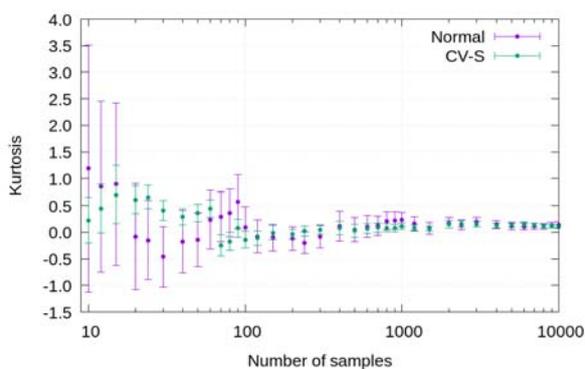


図 4.15 燃焼末期の Tc-99 の尖度

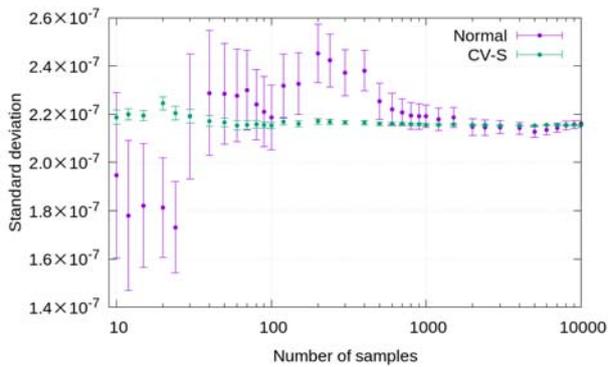


図 4.16 燃焼末期の I-129 の標準偏差

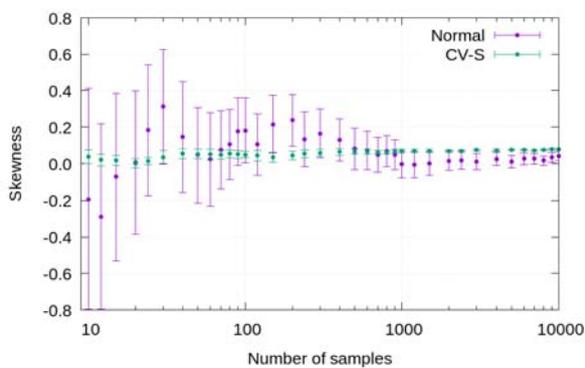


図 4.17 燃焼末期の I-129 の歪度

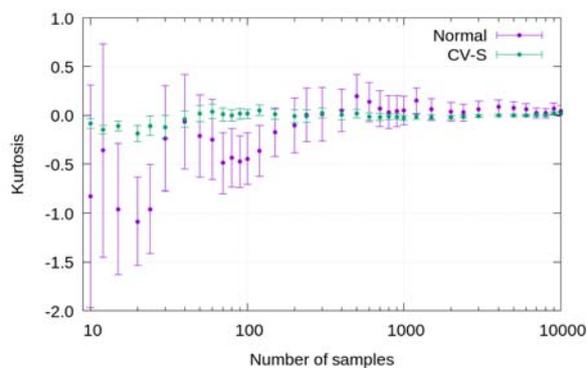


図 4.18 燃焼末期の I-129 の尖度

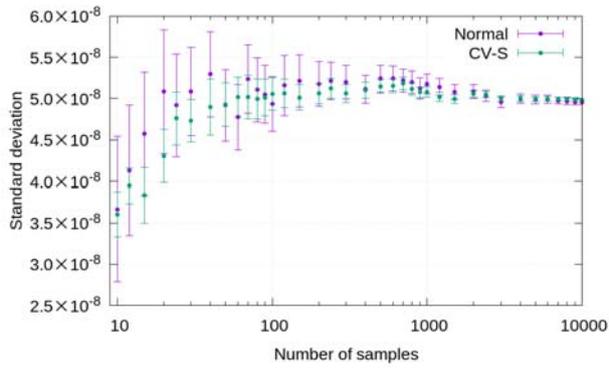


図 4.19 燃焼末期の Cs-134 の標準偏差

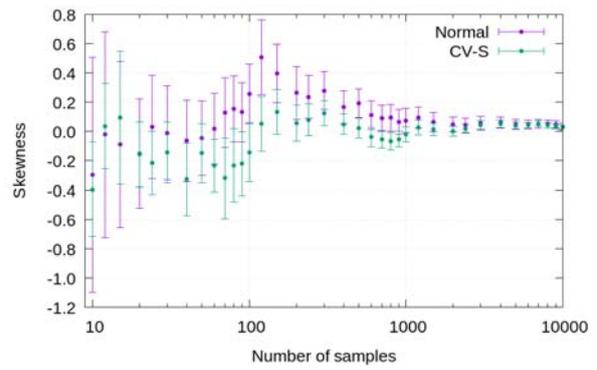


図 4.20 燃焼末期の Cs-134 の歪度

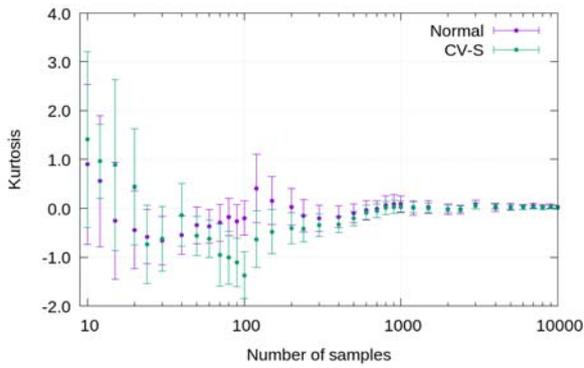


図 4.21 燃焼末期の Cs-134 の尖度

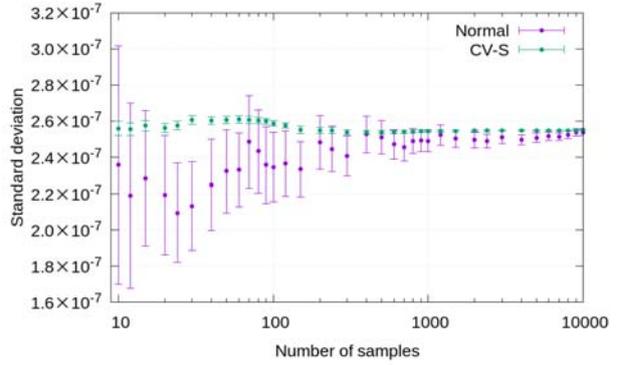


図 4.22 燃焼末期の Cs-137 の標準偏差

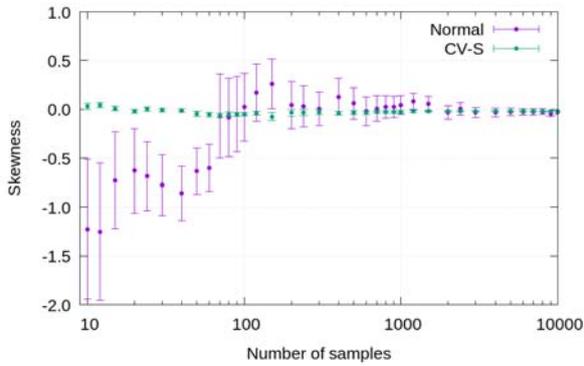


図 4.23 燃焼末期の Cs-137 の歪度

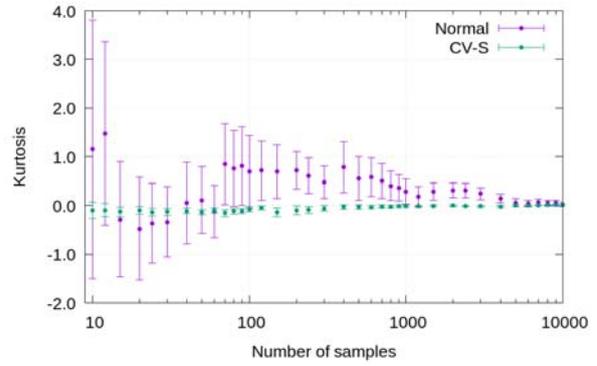


図 4.24 燃焼末期の Cs-137 の尖度

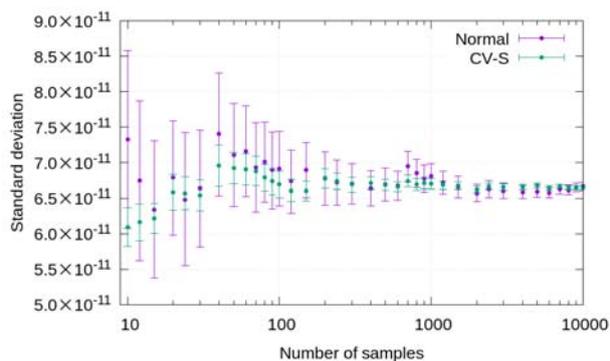


図 4.25 燃焼末期の Eu-151 の標準偏差

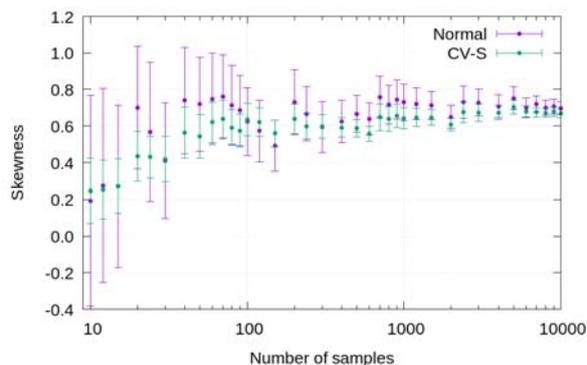


図 4.26 燃焼末期の Eu-151 の歪度

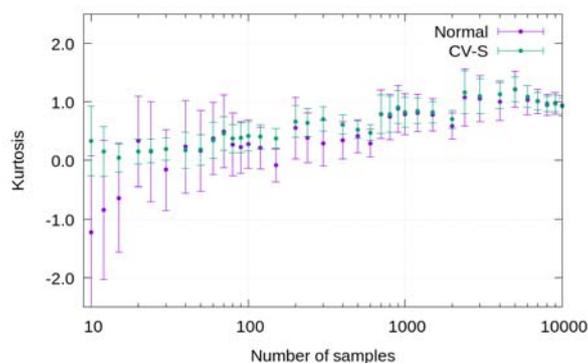


図 4.27 燃焼末期の Eu-151 の尖度

ここで、核種数密度でも類似パラメータを対象パラメータとは異なる燃焼度のパラメータに変えて計算を行った。今回は中性子無限増倍率の結果を踏まえ、初めから燃焼末期の核種数密度の感度を用いて、いくつかの燃焼度の核種数密度を求めた標準偏差、歪度、尖度の UR について計算した。図 4.28 から図 4.42 にその結果を示す。これらの結果より、核種によって燃焼度の違いによる影響が異なるということが分かった。

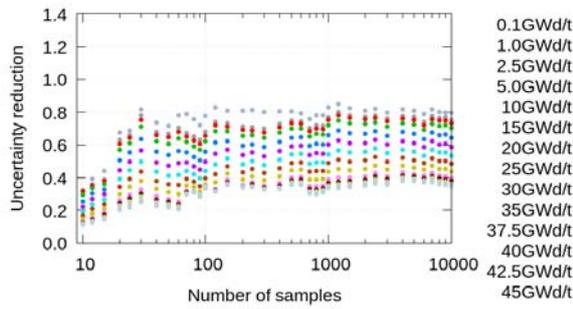


図 4.28 燃焼末期の感度を用いて求めた Tc-99 の標準偏差の UR

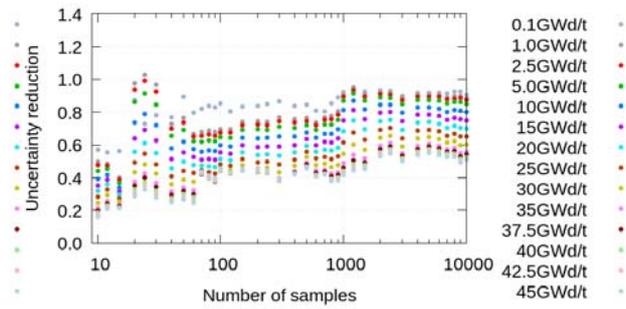


図 4.29 燃焼末期の感度を用いて求めた Tc-99 の歪度の UR

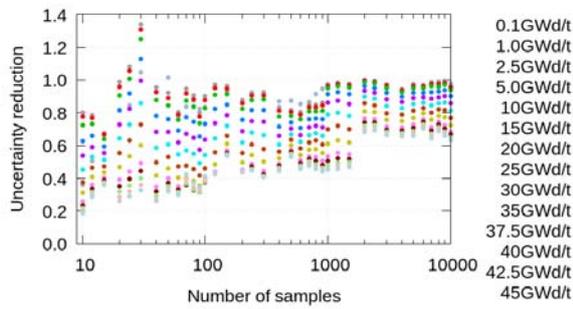


図 4.30 燃焼末期の感度を用いて求めた Tc-99 の尖度の UR

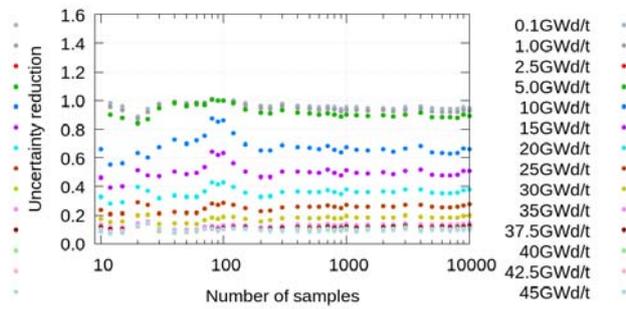


図 4.31 燃焼末期の感度を用いて求めた I-129 の標準偏差の UR

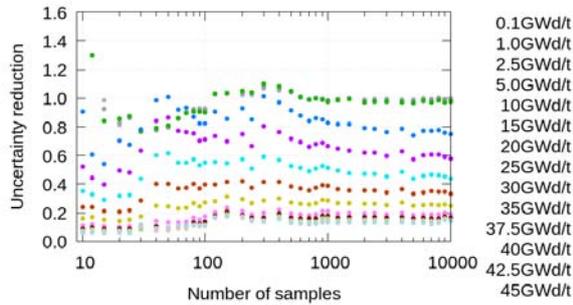


図 4.32 燃焼末期の感度を用いて求めた I-129 の歪度の UR

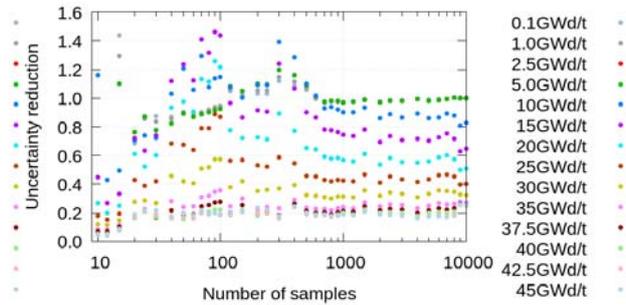


図 4.33 燃焼末期の感度を用いて求めた I-129 の尖度の UR

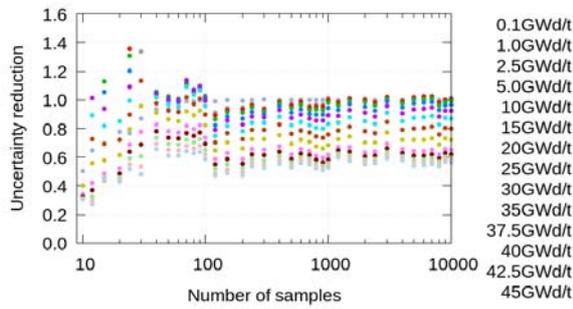


図 4.34 燃焼末期の感度を用いて求めた Cs-134 の標準偏差の UR

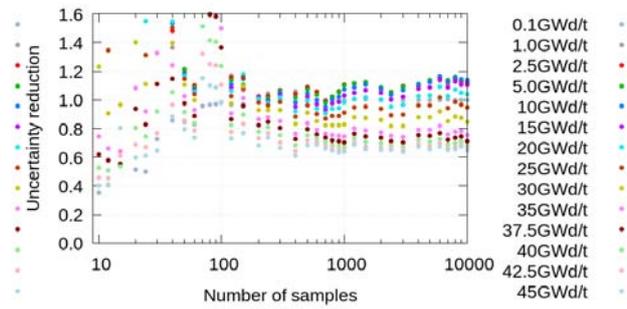


図 4.35 燃焼末期の感度を用いて求めた Cs-134 の歪度の UR

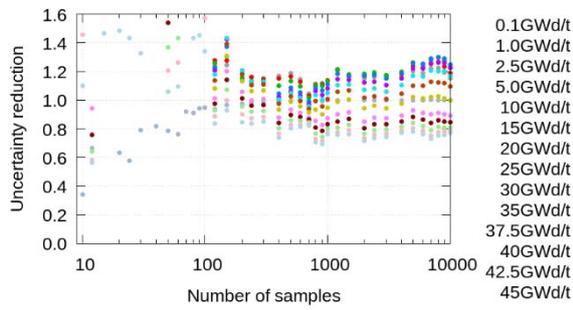


図 4.36 燃焼末期の感度を用いて求めた Cs-134 の尖度の UR

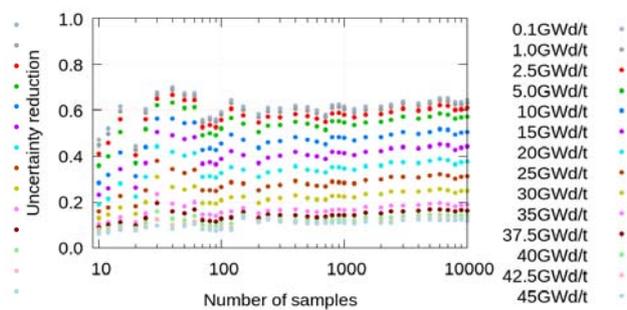


図 4.37 燃焼末期の感度を用いて求めた Cs-137 の標準偏差の UR

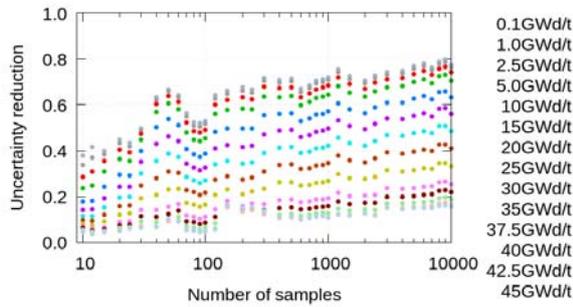


図 4.38 燃焼末期の感度を用いて求めた Cs-137 の歪度の UR

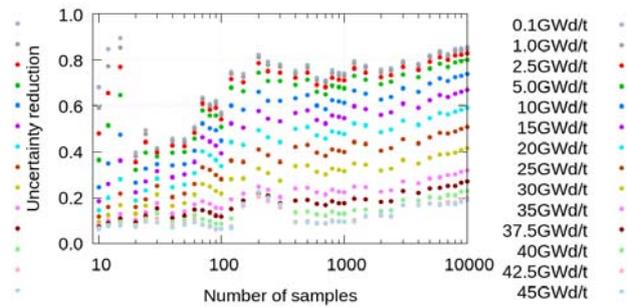


図 4.39 燃焼末期の感度を用いて求めた Cs-137 の尖度の UR

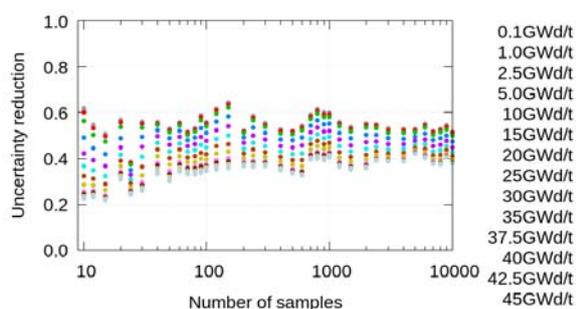


図 4.40 燃焼末期の感度を用いて求めた
Eu-151 の標準偏差の UR

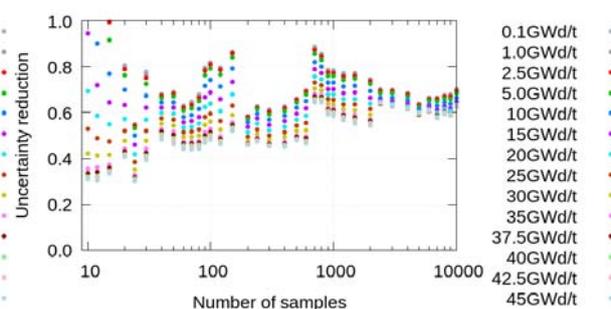


図 4.41 燃焼末期の感度を用いて求めた
Eu-151 の歪度の UR

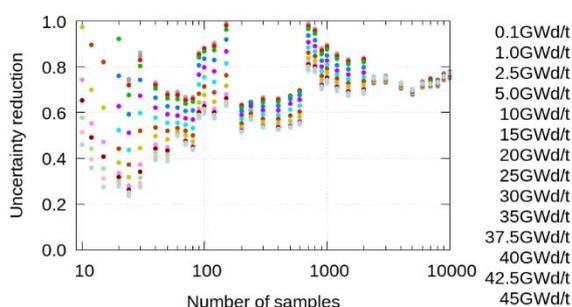


図 4.42 燃焼末期の感度を用いて求めた
Eu-151 の尖度の UR

これらの結果より、対象とする核種ごとにも異なる関係があるのではないかと考えられる。この考えを明らかにするため今回求めた炉物理パラメータについて、標準偏差、歪度、尖度の UR と相関係数の値について求めた。図 4.43 から図 4.48 にその結果を示す。この図では、標本数が 10,000 の場合の値を用いて計算した。この図より、特に Eu-151 において相関係数との依存とは別の関係があると分かる。これより、CV-S 法の効果は相関係数に依存し、相関係数が高いほど効果的になるだけでなく、求めたい炉物理パラメータごとにも関係があるということが分かった。

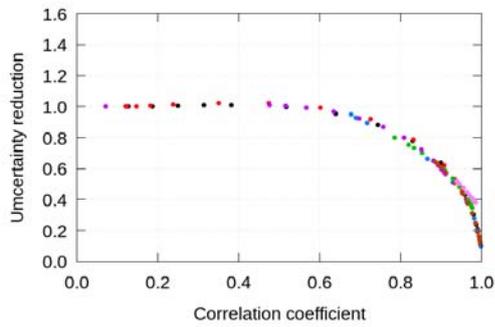


図 4.43 標準偏差の UR と相関係数の関係

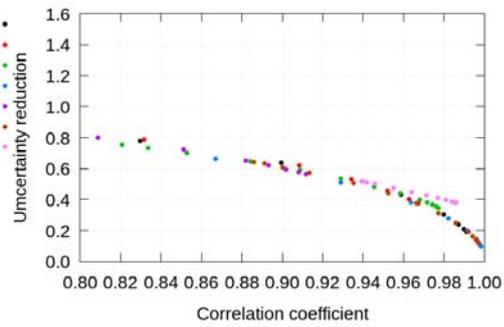


図 4.44 標準偏差の UR と相関係数の関係
(図 4.43 の拡大図)

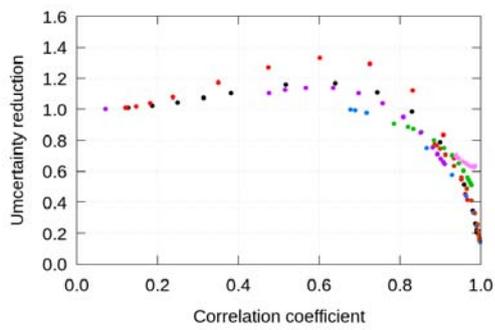


図 4.45 歪度の UR と相関係数の関係

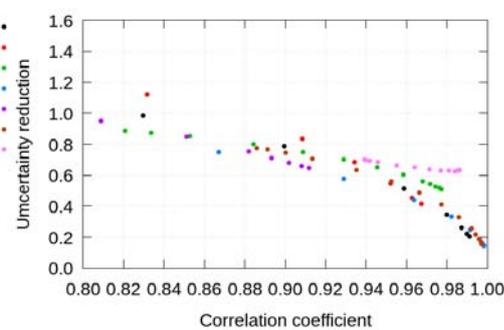


図 4.46 歪度の UR と相関係数の関係
(図 4.45 の拡大図)

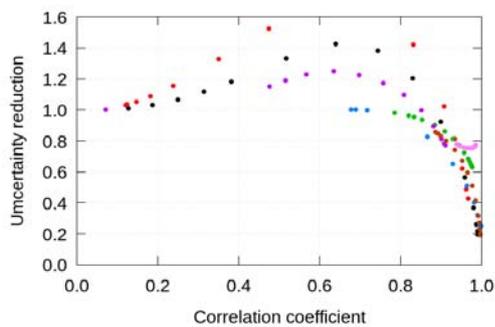


図 4.47 尖度の UR と相関係数の関係

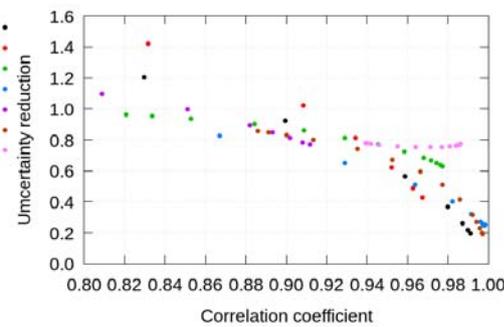


図 4.48 尖度の UR と相関係数の関係
(図 4.47 の拡大図)

第5章 結論

本研究では、炉物理パラメータを対象パラメータとして CV-S 法で統計量の推定を行い、類似パラメータを対象パラメータの燃焼度とは異なるものを用いて計算し、CV-S 法の効果がどう変わるのかについて確認した。

CV-S 法による統計量の推定では、期待値、標準偏差に加え歪度、尖度についても行い、その有効性を確認した。ただし、高次の統計量になるほど CV-S 法の効果が弱まることが分かった。対象パラメータとは異なる燃焼度のものを類似パラメータとした場合には、ある程度の差であれば異なる燃焼度でも CV-S 法により効果的に計算できることを確認した。ただし、CV-S 法の効果には、対象とする炉物理パラメータごとに相関係数とは異なる依存性があることが分かった。

本研究では、CV-S 法の実用性向上のための検討を行うことができた。今後、燃料集合体の炉物理パラメータに対しても計算を行い、対象パラメータを燃料集合体の炉物理パラメータ、類似パラメータを燃料ピンセルの炉物理パラメータにして計算を行う。また、中性子無限増倍率の不確かさの推定に、いくつかの核種生成量の感度を組み合わせて使うというように、複数の類似パラメータの情報を組み合わせて使う方法などさらなる検討を行う必要がある。

参考文献

- [1] D. G. Cacuci, “The forward and adjoint methods of sensitivity analysis,” *Uncertainty analysis*, p.71-144, CRC Press, (1988).
- [2] M. D. McKay, “Sensitivity and uncertainty analysis using a statistical sample of input values,” *Uncertainty analysis*, p.145-186, CRC Press, (1988).
- [3] Z. Sui, L. Cao, C. Wan, X. Zou, “Covariance-oriented sample transformation: a new sampling method for reactor-physics uncertainty analysis,” *Ann. Nucl. Energy*, 134, p.452-463 (2019).
- [4] S. Nihira, G. Chiba, “Combination of sensitivity-based and random sampling-based methodologies for efficient uncertainty quantification calculations with control variates method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, 56, p.971-980 (2019).
- [5] D. P. Krose, T. Taimre, Z. I. Botev, *Handbook of Monte Carlo methods*, John Wiley & Sons, New York (2011).
- [6] 柴、酒井、山本、「ランダムサンプリング手法を用いた不確かさ評価における分散低減の検討(1)燃料集合体無限増倍率計算への分散低減化法の適用」、日本原子力学会 2018 年春の大会、2016 年 3 月 26 日～28 日、大阪大学、(2018).
- [7] 岩橋、酒井、山本、「ランダムサンプリング手法を用いた不確かさ評価における分散低減の検討(1)燃焼計算における分散低減」、日本原子力学会 2018 年春の大会、2016 年 3 月 26 日～28 日、大阪大学、(2018)
- [8] B. Efron, R. Tibshirani, “Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy,” *Stat. Sci.*, 1, p.54-75 (1986).
- [9] T. Endo, T. Watanabe, A. Yamamoto, “A confidence interval estimation by bootstrap method for uncertainty quantification using random sampling method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, 52, p.993-999 (2015).
- [10] R. Kimura, G. Chiba, “Study on Probability Distribution of Input Nuclear Data in Random Sampling Method for Uncertainty Quantification Calculation of Reactor Physics Parameters,” *Proceedings of International Conference Nuclear Energy for New Europe, Portorož, Slovenia, September 9-12 (2019).*

謝辞

本研究を進めるにあたり、終始丁寧にご指導してくださいました千葉豪准教授、全体ゼミなどを通じ、助言をいただいた山本泰功助教に深く感謝いたします。特に、指導教官である千葉豪准教授には多大な助言をいただきました。厚くお礼申し上げます。また、普段からお世話になり、多くの面で助けていただいた先輩方、同期の皆様に感謝いたします。