炉物理プログラム演習：エネルギー縮約

千葉　豪

本演習は、「炉物理プログラム演習：上方散乱のある無限均質媒質における中性子の増倍」を実施しているという前提でのものとなる。

中性子無限増倍率 k_∞ を導入した無限均質媒質における中性子バランスの式は以下のように書ける。

$$\Sigma_{a,g}\phi_g + \sum_{g'} \Sigma_{s,g\to g'}\phi_g = \sum_{g'} \Sigma_{s,g'\to g}\phi_{g'} + \frac{\chi_g}{k_\infty}\sum_{g'=1} \nu\Sigma_{f,g'}\phi_{g'}, \qquad (g=1,...,G) \tag{1}$$

なお、この式では、自群散乱反応率 $\Sigma_{s,g\to g}\phi_g$ が両辺に含まれていることに留意されたい。

原子炉の炉心計算では、燃料ピンセルや燃料集合体といった「局所的な」モデルに対しては詳細なエネルギー群分割（詳細エネルギー群）での中性子輸送計算を行い、全炉心モデルに対しては粗いエネルギー分割（少数エネルギー群）での中性子輸送（もしくは拡散）計算を行う。典型的な例として SRAC コードの場合を挙げると、詳細エネルギー群の計算では 107 群を、少数エネルギー群での計算では 2 群を用いることが一般的となっている。

少数エネルギー群の中性子輸送計算を行うためには、詳細群の断面積データから少数群の断面積データを作成する必要がある。このように、詳細エネルギー群の情報から少数エネルギー群の情報を作成することを**エネルギー縮約**と呼び、英語では condensation、collapsing などといった用語を用いる。

断面積データのエネルギー縮約では、縮約前後で中性子輸送方程式を解いて得られる原子炉の「積分的な特性」が変わらないことが重要である。この「積分的な特性」として第一に挙げられるのが中性子増倍率であろう。そこで、式 (1) で与えられる「詳細エネルギー群」のバランス式に対してエネルギー縮約を行うことを考え、k_∞ が保存されるようにするには断面積をどのように縮約すればよいか考えよう。

G 群の詳細エネルギー群に対して、エネルギー群の境界が一致し、かつ群数が G よりも小さい少数エネルギー群を考え、その群数を Q とする。そして、詳細エネルギー群構造でのエネルギー群のうち、少数エネルギー群構造における q 群に含まれるものを $g\in q$ のように表記する。このとき、$g\in q$ を満足する全ての g について式 (1) の総和をとると以下が得られる。

$$\left(\sum_{g\in q}\Sigma_{a,g}\phi_g\right) + \left(\sum_{g\in q}\sum_{g'}\Sigma_{s,g\to g'}\phi_g\right) = \left(\sum_{g\in q}\sum_{g'}\Sigma_{s,g'\to g}\phi_{g'}\right) + \frac{1}{k_\infty}\left(\sum_{g\in q}\chi_g\right)\left(\sum_{g'=1}\nu\Sigma_{f,g'}\phi_{g'}\right) \tag{2}$$

$\sum_{g'} = \sum_{q'}\sum_{g'\in q'}$ と書けるので、この式の散乱に関わる項と核分裂生成項の表記を以下のように変更する。

$$\left(\sum_{g\in q}\Sigma_{a,g}\phi_g\right) + \left(\sum_{g\in q}\sum_{q'}\sum_{g'\in q'}\Sigma_{s,g\to g'}\phi_g\right) = \left(\sum_{g\in q}\sum_{q'}\sum_{g'\in q'}\Sigma_{s,g'\to g}\phi_{g'}\right) + \frac{1}{k_\infty}\left(\sum_{g\in q}\chi_g\right)\left(\sum_{q'}\sum_{g'\in q'}\nu\Sigma_{f,g'}\phi_{g'}\right) \tag{3}$$

一方、少数エネルギー群における中性子バランスの式は以下のように書ける。

$$\Sigma_{a,q}\phi_q + \sum_{q'} \Sigma_{s,q\to q'}\phi_q = \sum_{q'} \Sigma_{s,q'\to q}\phi_{q'} + \frac{\chi_q}{k'_\infty}\sum_{q'=1} \nu\Sigma_{f,q'}\phi_{q'}, \qquad (q=1,...,Q) \tag{4}$$

ここで、少数エネルギー群構造における全てのエネルギー群 q について、式 (4) と式 (3) が同一であるとするならば、式 (4) 中の k'_∞ と式 (3) 中の k_∞ が一致することが保証される。従って、少数エネルギー群構造における断面積は、式 (3) と式 (4) の各項が一致するように決めればよいということが言える。

まずは簡単な例として核分裂スペクトル χ_q を考えよう。これについては以下のように決めればよいことが分かる。

$$\chi_q = \sum_{g\in q}\chi_g \tag{5}$$

次に吸収断面積 $\Sigma_{a,q}$ について考えよう。これについては以下の式が満足されるように決めればよいであろう。

$$\left(\sum_{g\in q}\Sigma_{a,g}\phi_g\right) = \Sigma_{a,q}\phi_q \tag{6}$$

ここで、以下の式が成り立つと仮定する。

$$\phi_q = \sum_{g\in q}\phi_g \tag{7}$$

すると、$\Sigma_{a,q}$ として以下の式が得られる。

$$\Sigma_{a,q} = \frac{\left(\displaystyle\sum_{g\in q}\Sigma_{a,g}\phi_g\right)}{\displaystyle\sum_{g\in q}\phi_g} \tag{8}$$

この式より、**少数群の吸収断面積は、詳細群の中性子束を重みとした荷重平均で計算されるべきである**ことが分かる。同様の考え方に基づいて、核分裂生成断面積と散乱断面積の縮約は以下のように行われる。

$$\nu\Sigma_{f,q} = \frac{\left(\displaystyle\sum_{g\in q}\nu\Sigma_{f,g}\phi_g\right)}{\displaystyle\sum_{g\in q}\phi_g}, \qquad \Sigma_{q\to q'} = \frac{\left(\displaystyle\sum_{g\in q}\sum_{g'\in q'}\Sigma_{s,g\to g'}\phi_g\right)}{\displaystyle\sum_{g\in q}\phi_g} \tag{9}$$

問題 1：「炉物理プログラム演習：上方散乱のある無限均質媒質における中性子の増倍」の問題 1 に与えられている UO_2 燃料の 107 群断面積データを詳細エネルギー群と見做し、これを 11 群に縮約したときの少数群断面積を計算し、この少数群の問題に対して中性子無限増倍率 k_∞ と中性子束 ϕ_q を計算せよ。なお、11 群構造の最初の 10 群は、107 群構造のエネルギーの高い群から 10 群ずつ分割したものとし、最後の 11 群は 107 群構造の 101 から 107 群までとする。また、中性子束のエネルギー分布について、詳細群と少数群の結果を同一の図（横軸は対数軸とする）に示せ。ここで、中性子束のエネルギー分布については、「単位レサジーあたりの中性子束」として図示することに留意せよ（千葉のホームページの項目「CBZ（マニュアル）」中の「CBZ/SensitivitiData の使用マニュアル」の最後のページの記述が参考になるであろう）。

以上では空間依存性を考慮しない問題でのエネルギー縮約を考えたが、以降では一次元平板体系での多群中性子拡散方程式に対するエネルギー群縮約を考える。以下に一次元多群拡散方程式を示す。

$$-\frac{d}{dx}\left(D_g(x)\frac{d\phi_g(x)}{dx}\right) + \Sigma_{r,g}(x)\phi_g(x) = \frac{1}{k}\chi_g\sum_{g'}\nu\Sigma_{f,g'}(x)\phi_{g'}(x) + \sum_{g'}\Sigma_{s,g'\to g}\phi_{g'}(x) \tag{10}$$

空間依存性を考慮した場合には、中性子束 ϕ は位置依存性を有するため、計算体系が一種類の媒質で構成されていたとしても、縮約後の少数群断面積は位置依存となるため、縮約後は複数種類の媒質で構成されることとなる。式 (10) に現れる断面積データのうち、Σ_r、χ、$\nu\Sigma_f$、Σ_s については以上で述べた方法で縮約することが出来る。一方、拡散係数 D の縮約については、厳密には $-\dfrac{d}{dx}\left(D_g\dfrac{d\phi_g}{dx}\right)$ のエネルギー積分量が縮約前後で保存されるように行うべきであるが、この場合には中性子束 ϕ の x に対する微分の情報が必要となり、数値的な手続きが相当煩雑になる。そこで以下の方法が主に用いられている：他の断面積と同様に中性子束 ϕ を重みとして縮約する方法（方法１、重み付き単純平均）、拡散係数の逆数 $1/D$ を中性子束 ϕ を重みとして縮約する方法（方法２、重み付き調和平均）。

問題 2：30 cm の厚さをもつ UO2 燃料が、同様に 30 cm の厚さをもつ MOX 燃料に挟まれた 1 次元平板原子炉（従って全体の厚さは 90 cm）を考える。なお、これら UO2、MOX 燃料に対しては「炉物理プログラム演習：上方散乱のある無限均質媒質における中性子の増倍」に与えられている 107 群断面積データを用いるものとし、上方散乱断面積はゼロとする。また、拡散係数は、全断面積 Σ_t（吸収断面積と散乱断面積の和）を用いて $1/(3\Sigma_t)$ として計算するものとする。この体系の中性子実効増倍率を計算せよ（千葉の手元の計算では 1.22 程度となった）。

問題 3：問題 2 について、全体系の平均中性子束を用いて各領域の 107 群の断面積データを問題 1 と同様に 11 群に縮約し、11 群の拡散方程式を解いて中性子実効増倍率を計算せよ。このとき、断面積の縮約方法として上述の 2 通りの方法を用いよ。

問題 4：問題 2 について、各領域（UO2、MOX）毎の平均中性子束を用いてそれぞれの領域の 107 群の断面積データを問題 1 と同様に 11 群に縮約し、11 群の拡散方程式を解いて中性子実効増倍率を計算せよ。このとき、断面積の縮約方法として上述の 2 通りの方法を用いよ。