

λモードとαモード¹

2021/9/21 千葉 豪

1 λモード

1.1 定義

核分裂システムの臨界特性を把握する際には、以下の中性子輸送（拡散）固有値方程式が用いられる。

$$A\phi = \frac{1}{k}F\phi \quad (1)$$

ここで、 A は中性子消滅の演算子、 F は核分裂による生成の演算子、 k は実効増倍率、 ϕ は中性子束分布を示す。この形式の固有値方程式は、有限個の固有値 λ_i と固有関数 f_i の解の組み合わせを持つ。当然のことながら、固有値、固有関数は以下の式を満たす。

$$Af_i = \frac{1}{\lambda_i}Ff_i \quad (2)$$

最も大きい固有値 λ_0 とそれに対応する固有関数 f_0 が式(1)における実効増倍率 k と中性子束分布 ϕ にそれぞれ対応する。通常、式(2)はλモードの固有値方程式と呼ばれ、 λ_i はλモード固有値、 f_i はλモード固有関数と呼ばれる。

1.2 モード間の直交性

λモードの随伴固有関数 f_i^\dagger は以下の式で定義される。

$$A^\dagger f_i^\dagger = \frac{1}{\lambda_i}F^\dagger f_i^\dagger \quad (3)$$

A^\dagger 、 F^\dagger はそれぞれ A 、 F の随伴演算子を示す。ここで、 f_i と f_i^\dagger の関係式を導出しよう。式(2)の両辺に f_j^\dagger を乗じ全ての位相空間で積分をとると以下の式を得る。

$$\langle f_j^\dagger Af_i \rangle = \left\langle f_j^\dagger \frac{1}{\lambda_i} F f_i \right\rangle = \frac{1}{\lambda_i} \langle f_j^\dagger F f_i \rangle \quad (4)$$

ここで、 $\langle \rangle$ は全位相空間に関する積分を示す。随伴演算子の性質を用いると式(4)は以下のように書き直せる。

$$\langle f_i A^\dagger f_j^\dagger \rangle = \frac{1}{\lambda_i} \langle f_i F^\dagger f_j^\dagger \rangle \quad (5)$$

式(5)の左辺は

$$\langle f_i A^\dagger f_j^\dagger \rangle = \left\langle f_i \frac{1}{\lambda_j} F^\dagger f_j^\dagger \right\rangle = \frac{1}{\lambda_j} \langle f_i F^\dagger f_j^\dagger \rangle \quad (6)$$

と書けるので、式(5)は以下のように書き直せる。

$$\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \langle f_i F^\dagger f_j^\dagger \rangle = 0 \quad (7)$$

$i \neq j$ のとき、 $\lambda_i \neq \lambda_j$ であることから、以下の直交関係が f_i 、 f_j^\dagger の間に成り立つ。

$$\langle f_i F f_j^\dagger \rangle = 0 \quad (8)$$

¹/Fundamental/LambdaAlphaMode

1.3 任意の分布のモード展開

任意の分布 ϕ を、 λ モード固有関数 f_i で以下のように展開することを考える。

$$\phi = \sum_i a_i f_i \quad (9)$$

展開係数 a_i は以下のように求めることができる。式 (9) の両辺に F を作用させさらに f_j^\dagger を乗じ、全位相空間で積分すると以下の式を得る。

$$\langle f_j^\dagger F \phi \rangle = \sum_i \langle f_j^\dagger a_i F f_i \rangle = \sum_i a_i \langle f_j^\dagger F f_i \rangle = a_j \langle f_j^\dagger F f_j \rangle \quad (10)$$

これより

$$a_j = \frac{\langle f_j^\dagger F \phi \rangle}{\langle f_j^\dagger F f_j \rangle} \quad (11)$$

が得られる。

1.4 摂動による中性子束分布変化のモード展開と炉心安定性

ここでは系に外乱（摂動）が加わった場合の中性子束の変動と λ モード固有関数との関係を示す。
ある系の中性子輸送方程式を

$$A\phi = \frac{1}{k} F\phi \quad (12)$$

と書き、これを基準系と呼ぶこととする。次に、この系に対して何らかの外乱（摂動）が加わったとする。その場合、摂動後の系の中性子輸送方程式は以下のように書ける。

$$A'\phi' = \frac{1}{k'} F'\phi' \quad (13)$$

さて、ここで基準系の高次 λ モードとその随伴モードを以下のように考える。

$$A f_i = \frac{1}{\lambda_i} F f_i, \quad (14)$$

$$A^\dagger f_i^\dagger = \frac{1}{\lambda_i} F^\dagger f_i^\dagger \quad (15)$$

高次摂動理論に基づくと、摂動による中性子束の変動 $\delta\phi = \phi' - \phi$ は、完全系をなす基準系の λ モード固有関数で展開して以下のように記述出来る。

$$\delta\phi = a_0 f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f_n^\dagger, \left(\frac{1}{\lambda_0} \delta F - \delta A \right) f_0 \rangle}{\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \langle f_n^\dagger, F f_n \rangle} f_n \quad (16)$$

ここで、 $\delta A = A' - A$ 、 $\delta F = F' - F$ である。この式より、以下のことが言える。

- 摂動により励起される中性子束分布の高次モードの大きさは、摂動が与えられた位置での高次随伴モードの大きさに比例する。
- 摂動により励起される中性子束分布の高次モードの大きさは、固有値間隔（対応する高次モード固有値の逆数の、基本モード固有値の逆数に対する差）に反比例する。

摂動に対して中性子束の変動が大きいことは、「炉心が外乱に対して不安定である」ということに対応する。従って、固有値間隔が大きい炉心というのは、外乱に対してより安定な炉心ということになる。

2 α モード

本節の記述は Henry の文献 [1] に依る。

2.1 定義と逆時間方程式の導出

ここでは、時間依存の問題を考える。中性子密度 N と i 番目の家系の遅発中性子先行核密度 C_i が以下の式に従うものとする。なお、 N は時間と空間、エネルギーに、 C_i は時間と空間に、それぞれ依存するが、ここではその依存性を無視した表記としている。

$$\frac{\partial N}{\partial t} = HN + \sum_i f_i \lambda_i C_i + Q, \quad (17)$$

$$\frac{\partial(f_i C_i)}{\partial t} = M_i N - \lambda_i f_i C_i \quad (18)$$

ここで、 f_i は遅発中性子先行核から放出される中性子（遅発中性子）のエネルギースペクトルであり、それを C_i に乗じたものを C_i の代わりに便宜的に扱っている。これにより、 $f_i C_i$ もエネルギーに依存する量となる。 H は輸送方程式の演算子をまとめたものであるが、遅発中性子の寄与を除いている。従って、消滅演算子を A 、生成演算子を F 、遅発中性子割合を β と書くと、 $H = -A + (1 - \beta)F$ となる。また、 M_i は、 i 番目の家系に属する遅発中性子先行核を発生する核分裂反応を示す演算子に f_i が乗ぜられたものである。なお、上式では中性子密度を変数として扱っているため、中性子速度 v が反応断面積に乘ぜられることになる。

これらの式に任意の重み関数を乗じ、空間、エネルギーについて積分すると、時間依存の動特性パラメータで定義される一点炉動特性方程式が得られる。

ここで、 N と C_i の時間依存性を $\exp(\alpha t)$ の形で分離して記述し、外部源 Q を無視すると、式 (17)(18) は次のように書き直せる。

$$\alpha N = HN + \sum_i f_i \lambda_i C_i, \quad (19)$$

$$\alpha f_i C_i = M_i N - \lambda_i f_i C_i \quad (20)$$

この式をまとめて以下のように記述する。

$$\alpha \Psi = B \Psi \quad (21)$$

式 (21) は固有値方程式であり、 α モード (ω モード) 固有値方程式と呼ばれる。一般的には以下のように記述したほうが正確であろう。

$$\alpha_j \Psi_j = B \Psi_j \quad (22)$$

また、式 (22) の随伴式を以下のように定義する。

$$\alpha_j \Psi_j^\dagger = B^\dagger \Psi_j^\dagger \quad (23)$$

式 (20) より、 N_j と $(f_i C_i)_j$ について以下の関係式が得られる。

$$(f_i C_i)_j = \frac{M_i N_j}{(\alpha_j + \lambda_i)} \quad (24)$$

また、式 (19) より以下の関係式が得られる。

$$\alpha_j N_j = H N_j + \sum_i \lambda_i (f_i C_i)_j \quad (25)$$

これに対して、 j 番目の随伴固有関数 N_j^\dagger を乗じ、全空間、全エネルギーで積分すると以下の式を得る。

$$\alpha_j \langle N_j^\dagger N_j \rangle = \langle N_j^\dagger H N_j \rangle + \sum_i \lambda_i \langle N_j^\dagger (f_i C_i)_j \rangle \quad (26)$$

この式を式 (24) を用いて以下のように書き直す。

$$\begin{aligned} \alpha_j \langle N_j^\dagger N_j \rangle &= \langle N_j^\dagger H N_j \rangle + \sum_i \frac{\lambda_i}{\alpha_j + \lambda_i} \langle N_j^\dagger M_i N_j \rangle \\ &= \left\langle N_j^\dagger \left(H + \sum_i M_i \right) N_j \right\rangle - \sum_i \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \lambda_i} \langle N_j^\dagger M_i N_j \rangle \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、

$$\left(\frac{\beta_i}{\Lambda} \right)_j = \frac{\langle N_j^\dagger M_i N_j \rangle}{\langle N_j^\dagger N_j \rangle}, \quad (28)$$

$$\left(\frac{\rho}{\Lambda} \right)_j = \frac{\left\langle N_j^\dagger \left(H + \sum_i M_i \right) N_j \right\rangle}{\langle N_j^\dagger N_j \rangle} \quad (29)$$

を定義すると、式 (27) は次のように書ける。

$$\left(\frac{\rho}{\Lambda} \right)_j = \alpha_j + \sum_i \left(\frac{\beta_i}{\Lambda} \right)_j \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_j + \lambda_i} \right) \quad (30)$$

これはモード j について定義される逆時間方程式である。

固有値 α_j に対応する固有関数 N_j 、 N_j^\dagger を用いて、パラメータ ρ/Λ 、 β_i/Λ の値は一意に決定される。遅発中性子先行核の家系数を 6 とした場合、式 (30) は α についての 7 次方程式となるため、 α として 7 つの解が得られる。そのうちのひとつが固有値 α_j に対応することになる。

それでは、残りの 6 個の解は、何に対応するのであろうか。

Henry によると、一般的には、固有値方程式 (22) を満たす固有関数 N_j (及び N_j^\dagger) には、類似な形状となるものが (家系数 + 1) 個存在するとされている。それら、 N_j (および N_j^\dagger) が類似となる固有関数から計算される ρ/λ 、 β_i/λ はやはり類似の値となるため、それらから導出される逆時間方程式はほぼ同一となる。すなわち、ある特定の固有関数から得られる逆時間方程式の解のひとつはその固有関数に対応する固有値と一致するが、それ以外の解は固有関数が類似となる他の固有値に一致するということになる。

遠藤は一次元平板均質体系に対するエネルギー二群、遅発中性子先行核六家系 (群) の中性子拡散方程式に対する固有値を数値的に計算した [4]。その結果に基づいて、固有値の分布に関する概念図が示されているので、Fig. 1 にそれを引用する。

2.2 摂動が加わった際の過渡変化

ここでは、外部源が無い、臨界定常状態にある系に対して時刻 $t = 0$ でステップ状に摂動が加わった際の過渡変化を考える。このときの N 、 C_i の時間変化を、摂動が加えられた系における α モードの固有関数と $\exp(\alpha_j t)$ の積で展開することを考える。家系数を 6 とした場合、固有関数 N_j には類似のものが 7 つあることが分かっているので、 N を N_{jn} と記述する。ここで、一つ目の下添字 j が類似となるグループに対応し、二つ目の下添字 n がグループ内の番号に対応する。 $N_{nj} \approx N_n$ とすると、 $t > 0$ での N は以下のように記述される。

$$N(r, t) = \sum_{n=0}^7 \sum_{j=1}^7 A_{nj} \exp(\alpha_{nj} t) N_{nj}(r) \approx \sum_{n=0}^7 \sum_{j=1}^7 A_{nj} \exp(\alpha_{nj} t) N_n(r) \quad (31)$$

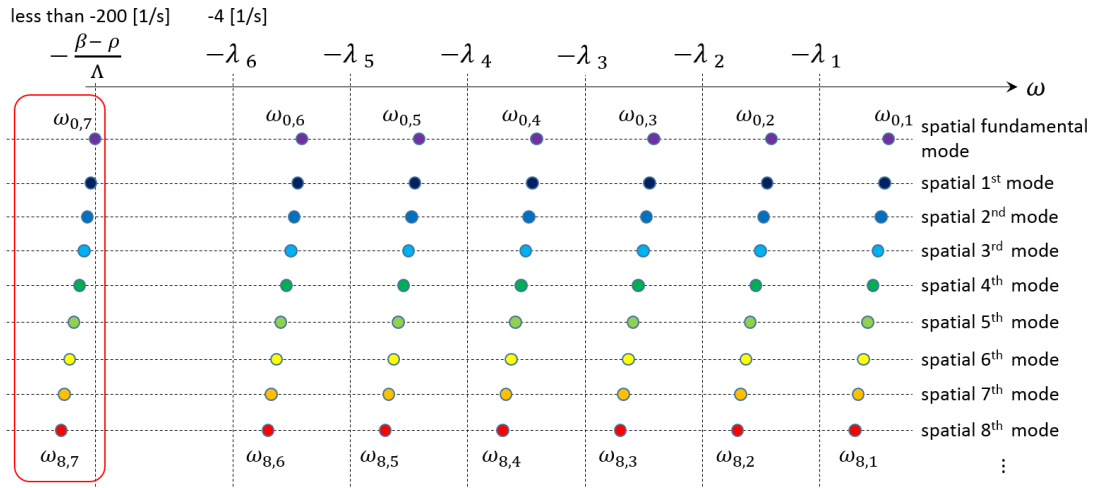


Fig. 1: α モード固有値の分布の概念図 (文献 [5] から引用)。なお、 α モードの固有値はここでは $\omega_{i,j}$ と記載されている。

固有値は α_{01} が最も大きいので、摂動が与えられたあと十分な時間が経過すると $\exp(\alpha_{01}t)$ の項が卓越し、最終的な中性子密度の空間分布は基本 α モードとなる。また、高次モードの固有値が基本モードの固有値に近いほど、つまり固有値の間隔が狭いほど、過渡状態における高次モードの減衰が遅くなる。これは、炉心の安定性が小さい (安定状態に至るまでの時間が長い) ことを意味する。

2.3 α モードの様々な定義

ファインマン α 法等、パラメータ α を測定する炉物理実験では遅発中性子の寄与を考慮しなくてもよい場合がある。この場合の α モードの固有値方程式は以下のように簡略化される。

$$\alpha N = HN = -AN + (1 - \beta)FN \quad (32)$$

α モード固有値方程式としては、この式の方がむしろ一般的である。

なお、Stacy の文献 [2] では、式 (22) に従う Ψ を「Natural mode」と呼んでおり (p.20)、遅発中性子の寄与を無視した式 (32) が従う N を ω モードと呼んでいる (p.21)。また、橋本の文献 [3] では、式 (32) の N を ω_p (動的即発) モードと呼んでいる。さらに、式 (32) に対して遅発中性子成分を考慮したもの、すなわち、

$$\alpha N = HN = -AN + FN \quad (33)$$

という式も定義することが出来る。遠藤は暫定的に、式 (32) で定義されるモードを「即発 ω モード」、式 (33) で定義されるモードを「全 ω モード」と呼称し、両者を区別している [5]。この全 ω モードが、「 α モード」として、より一般的な定義と言えるかもしれない。

2.4 全 α モードのモード間の直交性

ここでは全 α モードにおけるモード間の直交関係について述べる。

全 α モード固有関数が従う固有値方程式は以下のように書ける。

$$Af_i + \frac{\alpha_i}{v} f_i = Ff_i \quad (34)$$

ここで f_i は中性子速度と密度の積（すなわち中性子束）に対応する物理量であるものとする。同様に、随伴固有関数は以下のように書ける。

$$A^\dagger f_i^\dagger + \frac{\alpha_i}{v} f_i^\dagger = F^\dagger f_i^\dagger \quad (35)$$

式 (40) の両辺に f_j^\dagger を乗じ、全位相空間で積分すると、以下の式を得る。

$$\left\langle f_j^\dagger \frac{\alpha_i}{v} f_i \right\rangle + \left\langle f_j^\dagger A f_i \right\rangle = \left\langle f_j^\dagger F f_i \right\rangle \quad (36)$$

式 (36) の左辺第二項及び右辺は式 (35) を用いて以下のように変形できる。

$$\left\langle f_j^\dagger A f_i \right\rangle - \left\langle f_j^\dagger F f_i \right\rangle = \left\langle f_i A^\dagger f_j^\dagger \right\rangle - \left\langle f_i F^\dagger f_j^\dagger \right\rangle = - \left\langle f_i \frac{\alpha_j}{v} f_j^\dagger \right\rangle \quad (37)$$

式 (36) と (37) より、以下の式を得ることができる。

$$(\alpha_i - \alpha_j) \left\langle f_i \frac{1}{v} f_j^\dagger \right\rangle = 0 \quad (38)$$

$i \neq j$ のとき $\alpha_i \neq \alpha_j$ であることから、以下の直交関係が f_i 、 f_j' の間に成り立つ。

$$\left\langle f_i \frac{1}{v} f_j' \right\rangle = 0 \quad (39)$$

2.5 全 α 基本モード固有値の計算アルゴリズム

全 α の基本モードが従う方程式は以下のように書ける。

$$A\phi + \frac{\alpha}{v}\phi = F\phi \quad (40)$$

ここでは、全 α 基本モードの固有値 α を計算するためのアルゴリズムについて述べる。

n 回目の反復計算により α^n 、 ϕ^n が得られているとすると、次の反復における ϕ の推定値 ϕ^{n+1} は以下の式より得られる。

$$A\phi^{n+1} + \frac{\alpha^n}{v}\phi^{n+1} = F\phi^n \quad (41)$$

ϕ^{n+1} が得られたときに α の推定値 α^{n+1} が以下の中性子バランス式を満たすものとする。

$$A\phi^{n+1} + \frac{\alpha^{n+1}}{v}\phi^{n+1} = F\phi^{n+1} \quad (42)$$

式 (42) と (41) を辺々引くことにより、以下の関係式が得られる。

$$\frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n}{v}\phi^{n+1} = F\phi^{n+1} - F\phi^n \quad (43)$$

この両辺を全エネルギー、全空間について積分することにより、一意に α^{n+1} を求めることができる。

式 (41) を通常の計算コードで解く際には、 α/v だけ全断面積（除去断面積）を増加させることになる。未臨界の場合には、 α/v が負となるため、この補正後に全断面積がゼロになってしまう場合が考えられる。また、輸送計算の場合、自群散乱断面積と補正後の全断面積との比（散乱比）が 1.0 を越えてしまうと、漏洩の寄与にもよるが、反復計算が発散してしまうおそれがあるので注意しなければならない。

3 λモードとαモードで混乱してしまった件

λモードとαモードについてしばらくぶりに考えたときに、いろいろ混乱してしまったことがあったので、将来、再び混乱してしまうかもしれない自分に対して助言をまとめようと考えた。

混乱の発端は、「定常問題を考えるときはλモード、過渡問題を考えるときはαモード」という誤った思い込みにあった。

例として、外部源を有する未臨界炉心が定常状態にあることを考える。このとき、中性子束分布 ϕ は以下の方程式の解として得られる。

$$H\phi = S \quad (44)$$

ここで、 S は外部源を示す。

未臨界炉心の中性子増倍率 k を定量化する方法として中性子源増倍法がある。この方法では検出器を置く位置の設定が重要であり、「高次モードが励起されない場所に検出器を置く」といったことが議論される。ここでの「高次モード」とはλモードの高次モードである。また、「基本モード引き抜き中性子源増倍法」[6] が提案されており、ここでの「基本モード」も同様にλモードである。

ここでは中性子源増倍法を例に挙げたが、ここでλモードを考えているのは、定常状態を対象にしているから、ではなく、あくまで観測対象が中性子増倍率、すなわちλモードの固有値だからであることに（未来の自分は）注意が必要である。

次に過渡の問題について考える。

外部源が体系に存在しない場合は、中性子束 ϕ を含んだ ψ は以下の微分方程式に従う。

$$\frac{d\psi}{dt} = B\psi \quad (45)$$

従って、既に述べているように、（体系が臨界であろうとなかろうと）時間の経過とともに ϕ は Natural mode の基本モードに漸近していく。

一方、外部源が体系に存在する場合は、 ψ が従う微分方程式には外部源項が付加される。

$$\frac{d\psi}{dt} = B\psi + S \quad (46)$$

体系が未臨界であれば全ての Natural mode は減衰するため、最終的に中性子束は以下の式を満足する分布に漸近する。

$$H\phi = S \quad (47)$$

この ϕ をモード展開するときには、どのモードを用いるかは基本的には任意である。ただし、「外部源から発生した中性子により生成される Natural mode 分布は時間とともに減衰していくが、外部源からは定常的に中性子が供給されるため、十分に時間が経過した場合は、各々の Natural mode は全ての過去の中性子源で生成された成分の総和となり、ある状態に漸近していくことになる。その重ね合わせが $H\phi = S$ の解である」と考えると、物理的なイメージと一致する。従って、定常解 ϕ を Natural mode (αモードでも良い) で展開するのが自然と言えるであろう。

αを実験的に測定する手法では、各々の Natural mode の成分の寄与の総和を観測し、そこからαを測定（推定）していると考えればよい。このとき、αは中性子増倍率を推定するために測定していることから、中性子増倍率と関連付けられる Natural mode の第一モードに対応するαを測定しやすい位置（高次の Natural mode の影響が現れにくい位置）に検出器を配置することが重要となる。

極めて当たり前のことを書いているが、「記憶力の減退」は年を追うごとに「深み」を増す。これに対応するための備忘録である。

参考文献

- [1] A.F.Henry, 'The application of inhour modes to the description of nonseparable reactor transients,' *Nucl. Sci. Eng.*, **20**, p.338-351 (1964).

- [2] W.M.Stacy. Jr., 'Space-time nuclear reactor kinetics (Vol. 5 of Nuclear science and Technology),' Academic press, (1969).
- [3] 橋本憲吾、「空間高次モードによる大型炉心ディカップリング現象の解析」、名古屋大学 博士論文、(1995).
- [4] T.Endo, 'Numerical solution for ω -eigenvalue for 1 dimensional bare slab geometry in 2 group diffusion theory,' (2015).
- [5] 遠藤知弘、私信.
- [6] M.Tsuji, N.Suzuki, Y.Shimazu, 'Subcriticality measurement by neutron source multiplication method with a fundamental mode extractin,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**, p.158-169 (2003).