

P_n 法と S_n 法の等価性を実際に確認する

千葉豪

平成 26 年 8 月 11 日

1 P_n 法と S_n 法の等価性を数値計算で実際に確認する

S_n 法と P_n 法の等価性を数値計算により確認する。計算体系は全て一次元平板とし、S_n 法では Gauss-Legendre の求積セットを用いる。

1.1 一群二領域固定源問題

文献 [1] に記述されている一群二領域固定源問題を対象とした。この体系では、厚さ 1cm の二種類の平板が隣接して置かれており、両側の境界条件として反射条件が与えられている。また、ふたつの平板のうちの片方に等方中性子源が置かれている。

吸収反応率空間分布に着目し、S_n 法と P_n 法の計算結果を比較した。結果を Fig. 1 に示すが、P_N 計算と S_{N+1} 計算の結果が完全に一致していることを確認できる。

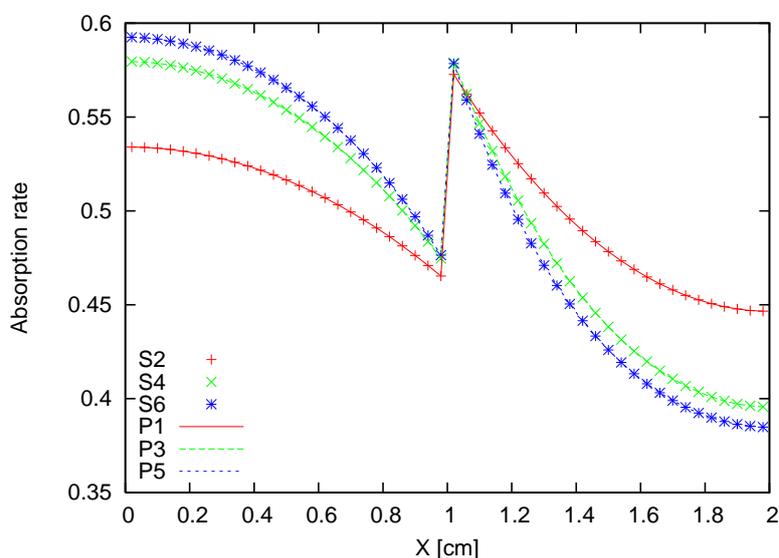


Fig. 1: Absorption rate of one-group two-region fixed source problem

1.2 70 群高速炉周期配列固有値問題

厚さ 5cm の高速炉燃料に同じく厚さ 5cm の反射体が隣接して配置され、左右を反射境界条件とした体系を対象とした。散乱は全て等方であり、エネルギー群数は 70 である。実効増倍率と Pu-239 核分裂反応率分布に着目し、後者については参照解 (32 点の二重 Gauss-Legendre セットによる計算値) に対する比として結果を整理した。

はじめに Table 1 に実効増倍率の計算結果を示す。P_N と S_{N-1} の計算結果が 0.00005 以内で一致していることが確認できる。

Table 1: Results of multiplication factors for 70-group periodic problem

Reference : 1.30502			
P1	1.29636	S2	1.29632
P3	1.30234	S4	1.30230
P5	1.30416	S6	1.30412

次に Fig. 2 に Pu-239 核分裂反応率分布の結果を示す。これについても P_N と S_{N+1} の計算結果がほぼ一致していることが確認できる。

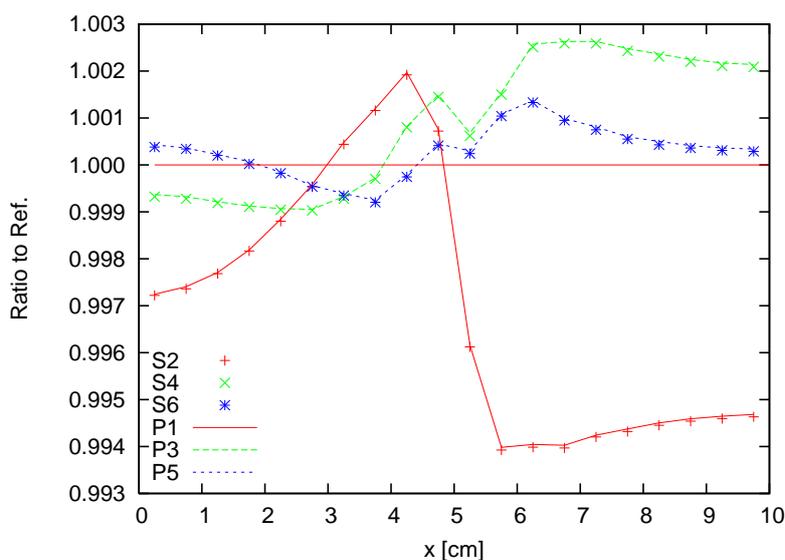


Fig. 2: Pu-239 fission rate of 70-group periodic problem

1.3 70群高速炉全炉心固有値問題

最後に、前節で用いた高速炉燃料のみからなる体系を対象とした。体系の厚さは27.5cmとし、左側境界を反射条件、右側境界を真空条件とした。P_n法での真空条件はMarshakの条件とした。また、空間メッシュ数は、左側境界(中心)から17.5cmは17、17.5cmから27.5cmは30とした。

参照解は前節と同様に32点のDouble Gauss-Legendreセットにより求めた。

実効増倍率に対する計算結果をTable 2に示す。P_NとS_{N+1}の計算結果には差異が生じ、前者のほうが参照解との一致が良いことが分かる。

Table 2: Results of multiplication factors for 70-group isolated problem

Reference : 1.05205			
P1	1.03956	S2	1.02805
P3	1.05131	S4	1.04984
P5	1.05176	S6	1.05122

次に、Pu-239核分裂反応率分布の結果をFig. 3に示す。実効増倍率の結果と同様に、P_N法とS_{N+1}法の精度に差異が現れた。

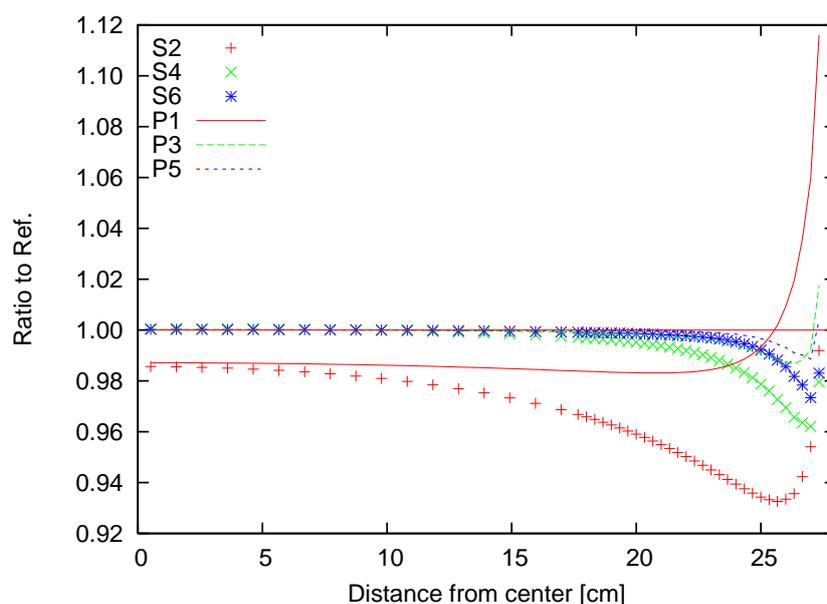


Fig. 3: Pu-239 fission rate of 70-group isolated problem

P1 と S2 との結果の差異の原因として、P_n 法における真空境界条件の取り扱いが考えられる。左側に真空境界があるときの Marshak の境界条件は、以下のように与えられる。

$$\int_0^1 d\mu P_l(\mu)\phi(\mu)d\mu = 0, \quad l = 1, 3, \dots, L \quad (1)$$

P1 近似の場合には

$$\int_0^1 d\mu P_1(\mu) \sum_{l'=0}^1 (2l'+1)P_{l'}(\mu)\phi_{l'} = \sum_{l'=0}^1 (2l'+1)\phi_{l'} \int_0^1 d\mu P_1(\mu)P_{l'}(\mu) = 0 \quad (2)$$

となり、最終的に以下の関係式が得られる。

$$\phi_0 + 2\phi_1 = 0 \quad (3)$$

一方、左側に真空境界があるときの S2 方程式での真空境界条件は、 $\phi(\mu_0) = 0$ となる（ただし、 $\mu_0 = 0.57735$ ）。この場合、 $\phi(-\mu_0) = a$ とおくと、境界上の角度中性子束の Legendre 展開係数は、 $\phi_0 = a/2$ 、 $\phi_1 = -\mu_0 a/2$ と与えられる。従って、 ϕ_0 と ϕ_1 との以下の関係が得られる。

$$\phi_0 + 1/\mu_0\phi_1 = \phi_0 + 1.731\phi_1 = 0 \quad (4)$$

小林先生の「原子炉物理」(p.182)によると、この条件は「Mark の境界条件」と呼ばれているものである。

そこで、Mark の条件を用いた P1 計算を行った。実効増倍率の結果を Table 3 に、Pu-239 核分裂反応率分布に対する結果を Fig. 4 に示すが、Mark の条件を用いることで P1 計算結果は S2 計算結果と一致することが分かる。

Table 3: Results of multiplication factors for 70-group isolated problem with Mark's boundary condition

S2	1.02805
P1 (Marshak BC)	1.03956
P1 (Mark BC)	1.02800

小林先生の教科書によると、Mark の境界条件と比較して Marshak の境界条件のほうが高い精度が期待されるという。Marshak 条件を用いた P_N 計算が、(Mark の境界条件を用いたことに相当する) S_{N+1} 計算と比較して、実効増倍率、反応率分布ともに精度が良好なのは、これにより説明できるであろう。

以上の検討により、P_N 法と S_{N+1} 法が等価となることを数値計算で確認した。

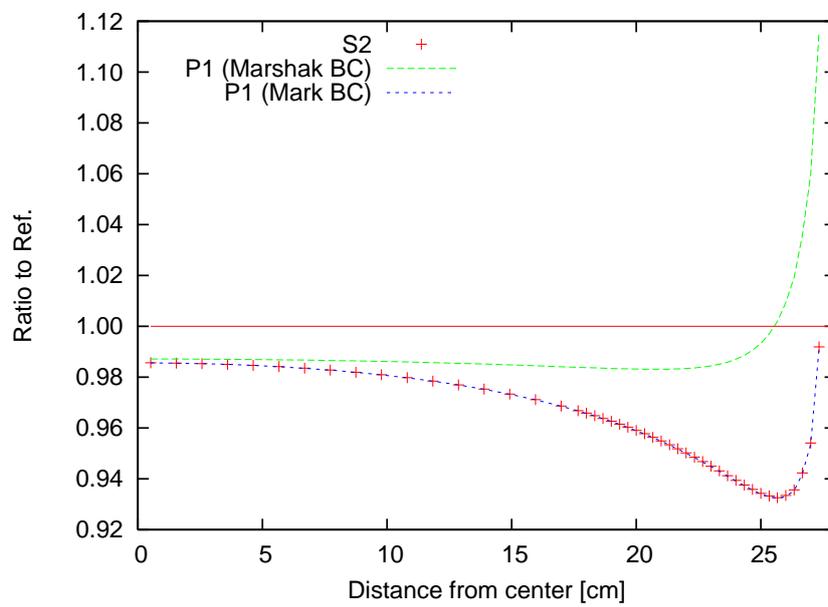


Fig. 4: Pu-239 fission rate of 70-group isolated problem with Mark's boundary condition

2 分からないこと

これまでに、Pn 法と Sn 法の等価性について数値計算により確認を行なったが、3 点ほど不明点がある。どなたか、教えていただきたい (メールアドレスは、go_chiba(a)eng.hokudai.ac.jp)。

2.1 不明点 1

外部源のみが存在し、散乱源、核分裂源が存在しない一次元体系について、ある位置での角度中性子束の真値を $\phi(\mu)$ とし、それがルジャンドル展開で $\sum_{l=0}^L (2l+1)P_l(\mu)\phi_l$ と書けるとする。この体系の角度中性子束を Sn 法で計算した場合、考慮した離散角度 μ_i に対する角度中性子束 $\phi(\mu_i)$ は正確に計算される。それでは、これらの角度中性子束を用いた求積の結果得られるスカラー中性子束 $\bar{\phi}_0$ の精度はどうなるであろうか？

Sn 法で計算されるスカラー中性子束 $\bar{\phi}_0$ は以下のように書けるであろう。

$$\bar{\phi}_0 = \sum_i \omega_i \phi(\mu_i) = \sum_i \omega_i \left(\sum_{l=0}^L (2l+1)P_l(\mu_i)\phi_l \right) = \sum_{l=0}^L (2l+1)\phi_l \sum_i \omega_i P_l(\mu_i) \quad (5)$$

上式の $\sum_i \omega_i P_l(\mu_i)$ は l 次の Legendre 多項式に対する求積に該当する。積分計算を Gauss-Legendre セットによる求積で行った場合、離散点数を n としたときには $(2n-1)$ 次までの多項式の積分が厳密に計算される。従って、 $L=2n-1$ である場合には、 $\bar{\phi}_0 = \phi_0$ が成り立つと言える。例えば、S2 計算の場合、角度中性子束が 3 次までの Legendre 展開で表現できるのであればスカラー中性子束が厳密に計算できることが分かる。

一方で、一般に、S2 計算は P1 計算と等価であると言われている。P1 計算では角度中性子束が 1 次までの Legendre 展開で表現できる場合には厳密解が保証されるため、S2 計算でも同様のことが言えるはずである。すると、「S2 計算では 3 次まで」という前述の議論と矛盾が生じる。これまでの議論のどこに齟齬があるのだろうか？

2.2 不明点 2

Gauss-Legendre 求積セットを用いた S2 計算を想定し、 $\mu = \pm 0.57735$ について角度中性子束の値が与えられている ($\phi(\mu_L = -0.57735) = \phi_L$ 、 $\phi(\mu_R = +0.57735) = \phi_R$) とする。ここで、角度中性子束がこの二点を通り、3 次までの Legendre 展開で記述できるとした場合、その 0 次成分、すなわちスカラー中性子束が一意的に決まるかどうかを確認する (換言すると、二点のみの関数値から、それらを通る三次多項式を一意的に決めることは出来ないが、三次多項式の区間積分値は一定となることを確認する)。

μ_L 、 μ_R について以下の式が成り立つ。

$$\phi_L = \sum_{l=0}^3 (2l+1) P_l(\mu_L) f_l \quad (6)$$

$$\phi_R = \sum_{l=0}^3 (2l+1) P_l(\mu_R) f_l \quad (7)$$

ただし、Gauss-Legendre の S2 セットでは、2 次の Legendre 多項式をゼロとした根が離散点に対応するため、 $P_2(\mu_L) = P_2(\mu_R) = 0$ なので、

$$\phi_L = P_0(\mu_L) f_0 + 3P_1(\mu_L) f_1 + 7P_3(\mu_L) f_3 \quad (8)$$

$$\phi_R = P_0(\mu_R) f_0 + 3P_1(\mu_R) f_1 + 7P_3(\mu_R) f_3 \quad (9)$$

と書ける。さらに、 $P_0(\mu_L) = P_0(\mu_R)$ 、 $P_1(\mu_L) = -P_1(\mu_R)$ 、 $P_3(\mu_L) = -P_3(\mu_R)$ であるため、上式は以下のように書き直せる。

$$\phi_L = a f_0 + (b f_1 + c f_3) \equiv a f_0 + f_{13} \quad (10)$$

$$\phi_R = a f_0 - (b f_1 + c f_3) \equiv a f_0 - f_{13} \quad (11)$$

つまり、 ϕ_L 、 ϕ_R が与えられた場合、 f_0 、 f_{13} が一意的に与えられることが分かる。

すなわち、角度中性子束が 3 次の Legendre 多項式で記述される時、S2 計算において二点の角度中性子束が正確に求まっているならば、スカラー中性子束は正確に求まることになる。一方、S2 計算と等価とされる P1 計算では、同様の場合 (角度中性子束が 3 次の Legendre 多項式で記述されたとした場合) 2 次、3 次の Legendre 成分を無視することになるため、スカラー中性子束は正確に求まらないということにならないだろうか? そう考えると矛盾が生じることになるが、これまでの議論のどこに齟齬があるのだろうか?

2.3 不明点3

一次元体系中のある空間位置における角度中性子束 $\phi(\mu)$ を考える。ここで、 $\mu = 0$ においてのみ ϕ が既知であり、その値が 1.0 であるとする。この場合、 $\phi(\mu)$ について一点での値のみが与えられているため、 $\phi(\mu)$ を Legendre 多項式で展開するとすると、そのゼロ次成分のみしか正確には決められないのは自明であろう。

一方、求積公式を用いると、 $\phi(\mu)$ を Legendre 展開した場合の展開係数を、以下のように計算することができる。

$$\phi_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) \phi(\mu) = P_l(0) \phi(0) \quad (12)$$

当然ながら、この求積計算は 1 点の Gauss-Legendre 求積セットを用いて行っていることに相当するため、1 次以上については正確に計算されている保証はない。

以上の方法によって $\phi(\mu)$ を Legendre 展開したときの結果を Fig. 5 に示す。Legendre 展開次数の増加に従って、角度中性子束は $\delta(\mu)$ に近づいていることが分かる。一方で、高次の場合にははじめに仮定した $\phi(0) = 1.0$ が満足されていない。このような計算には果たして意味があるであろうか？

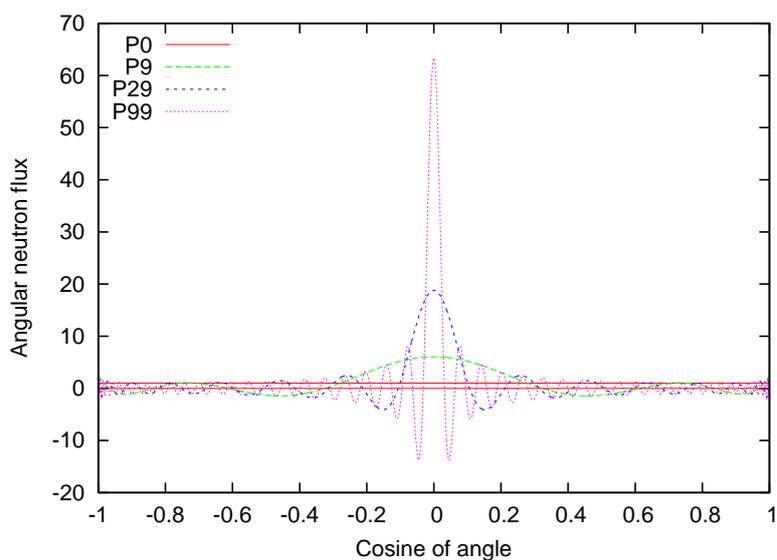


Fig. 5: Angular flux representation by Legendre expansion

参考文献

- [1] A.Yamamoto, "Utilization of discontinuity factor in integro-differential type of Boltzmann transport equation," *Proc. of Int. Conf. on Physics of Reactor, Physor2010*, Pittsburgh, Pennsylvania (2010).