Pn 法では角度中性子束の (n+2) 次以降の Legendre 展開係数はゼロではないのか？

千葉豪
go_chiba(a)eng.hokucai.ac.jp

平成 26 年 8 月 11 日

本稿では一次元体系に限定して議論を進める。

元 LLNL の Red Cullen 氏は文献 [1] において Pn 法について興味深い考察を行っている。筆者の理解は以下のようなものである。一般に、Pn 法では角度中性子束の (n+1) 次以降の Legendre 成分をゼロと近似していると考えられがちであるが、実際には (n+1) 次のみをゼロと置いているだけであり、(n+2) 次以降の成分はゼロではない。S_{n+1} 法は (n+1) 個の離散方向のみに角度中性子束が存在していると仮定している方法であるため、それと P_n 法が等価であるとするならば、P_n 法で得られる角度中性子束は、n 次までの Legendre 多項式で記述される（角度に対して滑らかに変動する）関数ではなく、(n+1) 次のみがゼロでそれ以上の成分はゼロではないと考えるべきである（そのように考えると、角度中性子束は特定の方向のみに値をもつデルタ関数状となる）、というものである。

本稿は、この Cullen 氏の考察について検討を行うものである。

まず、Gauss-Legendre セットを用いた S2 計算により得られる角度中性子束の高次 Legendre 成分について考える。S2 セットを用いた場合、$\mu = \pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.57735$ に対して角度中性子束が計算される。以降の議論では、$\hat{\mu} = 0.57735$ と置くこととする。

角度中性子束として $\phi(-\hat{\mu}) = \phi^n$、$\phi(\hat{\mu}) = \phi^p$ が与えられているときの角度中性子束の l 次 Legendre 成分 ϕ_l は、正確であるなしに関わらず、次の式で計算される。

$$\phi_l = P_l(-\hat{\mu})\phi^n + P_l(\hat{\mu})\phi^p \tag{1}$$

Legendre 関数の性質より、以下の関係が成り立つ。

$$P_l(-\hat{\mu}) = \begin{cases} P_l(\hat{\mu}), & l = even, \\ -P_l(\hat{\mu}), & l = odd \end{cases} \tag{2}$$

従って、ϕ_l は次のように書ける。

$$\phi_l = \begin{cases} P_l(\hat{\mu})\left(\phi^p + \phi^n\right), & l = even, \\ P_l(\hat{\mu})\left(\phi^p - \phi^n\right), & l = odd \end{cases} \tag{3}$$

以上より、$l \geq 2$ の ϕ_l は

$$\phi_l = \begin{cases} \left(P_l(\hat{\mu})/P_0(\hat{\mu})\right)\phi_0 = \alpha_l\phi_0, & l = even, \\ \left(P_l(\hat{\mu})/P_1(\hat{\mu})\right)\phi_1 = \alpha_l\phi_1, & l = odd \end{cases} \tag{4}$$

と書け、ϕ_0 もしくは ϕ_1 の定数倍となることが分かる。このようにして得た ϕ_l を用いて $\phi(\mu)$ を計算し直すと、l が無限大のときには $\phi(\mu)$ は $\mu = \pm\hat{\mu}$ にデルタ関数状に値をもつ分布となる。

ここで、Legendre 多項式の漸化式

$$P_{n+1}(\hat{\mu}) = \frac{2n+1}{n+1}\mu P_n(\hat{\mu}) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(\hat{\mu}) \tag{5}$$

を用いて、α_l の値を具体的に求める。$P_3(\hat{\mu})$ 以降は、P_0、P_1 を用いて以下のように記述される。なお、$P_1(\hat{\mu}) = \hat{\mu} = 1/\sqrt{3}$ の関係を一部で用いている。

$$P_3 = \frac{5}{3}\mu P_2 - \frac{2}{3}P_1 = -\frac{2}{3}P_1 \tag{6}$$

$$P_4 = \frac{7}{4}\mu P_3 - \frac{3}{4}P_2 = \frac{7}{4}\mu P_3 = -\frac{7\cdot 2}{4\cdot 3}\mu P_1 = -\frac{7}{18}P_0 \tag{7}$$

$$P_5 = \frac{9}{5}\mu P_4 - \frac{4}{5}P_3 = -\frac{9\cdot 7\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3}\mu^2 P_1 + \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}P_1 = -\frac{1}{6}P_1 \tag{8}$$

従って、

$$\phi_3 = -\frac{2}{3}\phi_1 \tag{9}$$

$$\phi_4 = -\frac{7}{18}\phi_0 \tag{10}$$

$$\phi_5 = -\frac{1}{6}\phi_1 \tag{11}$$

と書ける。

次に、S2 方程式と等価である P1 方程式を考える。P1 方程式では $\phi_2 = 0$ と置かれるが、Cullen 氏が指摘するように $l \geq 3$ 以上の ϕ_l を非ゼロとすると、以下の方程式が満たされるはずである。

$$\frac{d\phi_1}{dx} + \sigma\phi_0 = s_0, \tag{12}$$

$$\frac{1}{3}\frac{d\phi_0}{dx} + \sigma\phi_1 = 0, \tag{13}$$

$$\frac{2}{5}\frac{d\phi_1}{dx} + \frac{3}{5}\frac{d\phi_3}{dx} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{4}{7}\frac{d\phi_4}{dx} + \sigma\phi_3 = 0, \tag{15}$$

$$\frac{4}{9}\frac{d\phi_3}{dx} + \frac{5}{9}\frac{d\phi_5}{dx} + \sigma\phi_4 = 0, \tag{16}$$

$$\cdots$$

S2 法と P1 法が等価であるならば、式 (9) から式 (11) は、式 (14) から式 (16) を満足するはずであるので、実際に式を代入してこの点を確認する。

式 (14)、(15) については、成り立つことが確認できる。一方、式 (16) に対して式 (9) から式 (11) を代入すると、以下の式を得る。

$$\frac{d\phi_1}{dx} + \sigma\phi_0 = 0 \tag{17}$$

この式は明らかに式 (12) と矛盾するため、S2 計算で得られる ϕ_l は P1 方程式を満足しない、すなわち Cullen 氏の指摘に基づいた場合、S2 方程式と P1 方程式とは等価とならないことが分かる。

S2 計算で得られる角度中性子束を無限次の Legendre 多項式で展開するとした場合、前述したように角度中性子束は離散角度点にのみ値をもつデルタ関数状の分布となる。従って、中性子源

について等方を仮定していたとしても、デルタ関数状の分布としなければならないと考えられる。この場合、源は以下のように記述されるであろう。

$$s(\mu) = s_0 \left(\delta(\mu + \hat{\mu}) + \delta(\mu - \hat{\mu})\right) \tag{18}$$

従って源のルジャンドル展開係数 s_l は以下となるべきである。

$$s_l = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_l(\mu)s(\mu)d\mu = \frac{1}{2}s_0 \left(P_l(-\hat{\mu}) + P_l(\hat{\mu})\right) \tag{19}$$

ルジャンドル多項式の性質より奇数の l に対しては $s_l = 0$ となるのが明らかである。また、$P_2(\pm\hat{\mu}) = 0$ より、$s_2 = 0$ である。一方、s_4 についてであるが、式 (7) の関係式を用いることにより、$s_4 = -7/18 \cdot s_0$ が得られる。従って、式 (16) は以下のように書き直せる。

$$\frac{4}{9}\frac{d\phi_3}{dx} + \frac{5}{9}\frac{d\phi_5}{dx} + \sigma\phi_4 = -\frac{7}{18}s_0 \tag{20}$$

この式に、式 (9) から式 (11) を代入すると、この式が満足されている（式 (12) と一致する）ことを確認できる。つまり、Cullen 氏の考察に基づく場合には、Pn 方程式においても源をデルタ関数状のものと考えることにより、Pn 法と Sn 法の等価性が成り立つものと考えられる。

以上の議論をまとめると以下となる。

- Sn 法で計算した離散角度毎の角度中性子束から角度中性子束に対する Legendre 展開係数を無限次まで計算し、角度中性子束を Legendre 展開で再構成した場合、角度中性子束はデルタ関数状で表現される。ただしこの場合は源分布も同様にデルタ関数状と想定されるべきであるため、Pn 法で Sn 法と等価となる解を得るためには、Pn 法の源についても高次の成分を考慮する必要があるものと考えられる。

- しかし、等方源というものはあくまで等方であるべきであり、デルタ関数状とするのは誤りである。つまり、Sn 法では考慮している離散角度にのみ中性子が流れると理解するのは誤りであると考える。従って、Cullen 氏の主張する「Pn 法では (n+2) 次以降の Legendre 成分を考慮している」というのは適切ではないと考える。

参考文献

[1] D.E.Cullen, ‘Why are the Pn and Sn methods equivalent,’ UCRL-ID-145518, (2001).