

# 実効増倍率と中性子拡散方程式\*

千葉豪

平成 29 年 9 月 29 日

## 1 実効増倍率の概念と中性子拡散方程式

核分裂の連鎖反応が持続的に行われ、かつ中性子数がほぼ一定である場合、その体系は「臨界である」と言える。なお、臨界を維持できるような体系であっても、「火種」となる中性子がなければ核分裂反応は起こらない。すなわち、このような場合は中性子数はゼロのままであるので、原子炉では「中性子源」と呼ばれる、中性子を放出する物質を原子炉の中に配置しておく<sup>1</sup>。系が臨界である場合、中性子源が系に存在していれば中性子数は時間とともに増加していく。従って、臨界集合体などでは中性子数がある程度の大きさに達すると中性子源を引き抜く。ちなみに、臨界の場合には中性子数は「ほぼ」一定と記述したが、これは中性子と原子核との相互作用は確率事象であるため、厳密には中性子数は「ゆらぐ」ことから、そのような記述となっている。すなわち、実際には、系が臨界であっても中性子数は時間とともに増えたり減ったりする（増えるか減るか「どちらとも言えない」ということが臨界状態を意味するとも言えるであろう）。

ある系において、中性子は体系から漏れたり、原子核によって捕獲されたりする。これは「中性子の損失」と言える。一方、中性子は核分裂反応により新たに発生もする。これは「中性子の生成」と言える。中性子数がほぼ一定である状態を臨界と定義したが、別な言い方をすると、「中性子の損失と生成とが釣り合っている状態」を臨界と言うことも出来る。

中性子の損失と生成が釣り合っている状態を方程式で記述することが出来る。例えば一次元の中性子拡散方程式は次のように書ける。

$$-D(x)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a(x)\phi(x) = \nu\Sigma_f(x)\phi(x) \quad (1)$$

ここで、 $\phi(x)$  は位置  $x$  における中性子束（中性子密度  $n$  に中性子速度  $v$  が乗ぜられたものだが中性子の数としてイメージしてもよいであろう）、 $\Sigma_a$  は中性子吸収断面積（吸収確率）、 $\Sigma_f$  は核分裂断面積、 $\nu$  は核分裂反応あたりに発生する中性子数、 $D$  は中性子拡散係数を示す。式 (1) の左辺は中性子の損失に、右辺は生成に、それぞれ対応しており、式 (1) は全ての位置  $x$  についてそれらが釣り合っていることを意味する。また、損失を表す左辺のうち、第一項は中性子の体系からの漏れを、第二項は吸収を、それぞれ表している。

式 (1) は損失と生成が釣り合った状態でのみ成立する式であるが、これをそれ以外の場合に対しても適用できるように拡張することを考える。そこで、核分裂による中性子の生成量を調整する因

---

\*/Document/Education/Keff

<sup>1</sup>中性子源としては、中性子核反応が介在しない核分裂である自発核分裂により中性子が発生する Cf 中性子源や、Am-Be 中性子源（Am-241 の  $\alpha$  崩壊により発生した  $\alpha$  線が Be-9 と  $(\alpha, n)$  反応を引き起こすことにより中性子が発生する）などが挙げられる。

子  $k_{\text{eff}}$  を以下のように導入することとする。

$$-D(x)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a(x)\phi(x) = \frac{1}{k_{\text{eff}}}\nu\Sigma_f(x)\phi(x) \quad (2)$$

$k_{\text{eff}}$  は位置に依存せず、ひとつの系に対してユニークな値が与えられる。系が臨界であれば、 $k_{\text{eff}}$  が 1.0 となることは容易に分かるであろう。一方、中性子の生成が損失を上回る場合、すなわち超過臨界の場合はどうであろうか？この場合は、中性子の釣り合いを強制的にとるためには、生成を小さく調整する必要がある。従って、 $k_{\text{eff}}$  は 1.0 より大きい値となる。逆に、損失が生成を上回る場合、すなわち未臨界の場合は  $k_{\text{eff}}$  は 1.0 を下回る。以上のことは式 (2) を以下のように変形すれば直感的に分かるであろう。

$$k_{\text{eff}} = \frac{\nu\Sigma_f\phi}{-D\frac{d^2\phi}{dx^2} + \Sigma_a\phi} \quad (3)$$

実効増倍率の「実効」の意味であるが、これは「中性子の系からの漏れを考慮した実効的な増倍率」であることを意味する。実効増倍率に対して無限増倍率  $k_{\infty}$  という定義もある。これは「中性子の系からの漏れを考慮しない場合の増倍率」を意味し、以下のように定義される。

$$k_{\infty} = \frac{\nu\Sigma_f\phi}{\Sigma_a\phi} \quad (4)$$

また、 $k_{\text{eff}}$  と  $k_{\infty}$  は以下の関係式を満たす。

$$k_{\text{eff}} = k_{\infty} \frac{\Sigma_a\phi}{-D\frac{d^2\phi}{dx^2} + \Sigma_a\phi} = k_{\infty}P_{NL} \quad (5)$$

ここで、 $P_{NL}$  は「系から中性子が漏れない確率」を意味する。分母が漏れと吸収の和、分子が吸収となっていることから理解できるであろう。

## 2 反応度の定義

反応度  $\rho$  は「系がどの程度臨界状態から離れているか」を定量的に示す指標であり、実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  を用いて以下のように定義される。

$$\rho = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} = 1 - \frac{1}{k_{\text{eff}}} \quad (6)$$

この式から明らかなように、臨界にある系の反応度はゼロであり、臨界以上の場合は正、臨界未満の場合は負となる。また、反応度の単位は  $[\Delta k/k]$  と与えられる。

また、ある反応度  $\rho_1$  の系から、異なる反応度  $\rho_2$  の系に変化したときには、これらふたつの系の反応度差  $\Delta\rho$  は次のように定義される。

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = \left(1 - \frac{1}{k_{\text{eff},2}}\right) - \left(1 - \frac{1}{k_{\text{eff},1}}\right) = \frac{1}{k_{\text{eff},1}} - \frac{1}{k_{\text{eff},2}} = \frac{k_{\text{eff},2} - k_{\text{eff},1}}{k_{\text{eff},1}k_{\text{eff},2}} \quad (7)$$

この反応度差も「反応度」と呼ばれることが多々あり、この場合の単位は  $[\Delta k/k']$  となる。

反応度の例としては、制御棒反応度値が挙げられる。中性子を吸収する物質で構成される制御棒は、原子炉に挿入されることで原子炉の反応度を低下させるが、その低下量を制御棒反応度（値）と呼んでいる。また、原子炉の温度が増加することにより U-238 による中性子の共鳴吸収が増加し原子炉の反応度が低下するが、このような原子炉の温度上昇による反応度の変動量を「ドブラー反応度」と呼ぶ。

### 3 中性子拡散方程式に現れるさまざまな核データ

式(2)に示した中性子拡散方程式においては中性子のエネルギーを単一であると暗に仮定している。実際には中性子束はエネルギーに依存し、また中性子と原子核との反応断面積も中性子エネルギーに依存する。エネルギー依存性を考慮した次元の中性子拡散方程式は次のように書き直せる。

$$-D(x, E) \frac{d^2 \phi(x, E)}{dx^2} + \Sigma_t(x, E) \phi(x, E) = \int \Sigma_s(x, E' \rightarrow E) \phi(x, E') dE' + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi(x, E) \int \nu \Sigma_f(x, E') \phi(x, E') dE' \quad (8)$$

ここで、新たな断面積として  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$ 、 $\chi(E)$  が現れたが、これらはそれぞれ、エネルギー  $E'$  の中性子が原子核との衝突の結果  $E$  になる確率を示す散乱断面積、核分裂した中性子がエネルギー  $E$  となる確率を示す核分裂スペクトルである。また、 $\Sigma_t(E)$  は全反応の断面積であり、以下の式で定義することが出来る。

$$\Sigma_t(E) = \Sigma_a(E) + \int \Sigma_s(E \rightarrow E') dE' = \Sigma_c(E) + \Sigma_f(E) + \int \Sigma_s(E \rightarrow E') dE' \quad (9)$$

この式で現れる  $\Sigma_a(E)$ 、 $\Sigma_c(E)$  はそれぞれ中性子吸収断面積、中性子捕獲断面積と呼ばれるものである。吸収断面積には、中性子捕獲による吸収に加えて、核分裂による吸収も含まれることになる。

数値計算では変数に依存する物理量を求める（例えば炉物理計算の場合には空間、エネルギーに依存する中性子束を求める）が、物理量が変数に対して連続的に変化するとは見做さず、変数がある一定の幅（メッシュ）に区切り、その区間内では物理量を代表値で表す、ということを行う。こういった処理を「離散化」と呼ぶ。原子炉物理の計算ではエネルギーをいくつかの「群」と呼ばれる区間に区切り、その区間内では断面積や中性子束は一定であると仮定する。そのような処理を行うことにより、以下の多群の中性子拡散方程式が得られる（位置依存性は省略して記述した）。

$$-D_g \frac{d^2 \phi_g}{dx^2} + \Sigma_{t,g} \phi_g = \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'} + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \phi_{g'} \quad (10)$$

両辺から  $\Sigma_{s,g \rightarrow g} \phi_g$ （自群散乱断面積と呼ぶ）を引くことにより、以下の式が得られる。

$$-D_g \frac{d^2 \phi_g}{dx^2} + \Sigma_{r,g} \phi_g = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'} + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \chi_g \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \phi_{g'} \quad (11)$$

この式が原子炉物理の計算で一般的に扱われる中性子拡散方程式の形式である。なお、上式左辺第二項に現れる  $\Sigma_{r,g}$  は（ $g$  群からの）除去断面積と呼ばれ、

$$\Sigma_{r,g} = \Sigma_{a,g} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g \rightarrow g'} \quad (12)$$

で定義される。

中性子と原子核との散乱断面積は  $\Sigma_s$  で与えられるが、散乱反応にはいくつかの種類があるため、散乱断面積は個々の部分反応の和ということが出来る。原子炉の計算で重要となる散乱反応には三種類あり、それらは弾性散乱、非弾性散乱、 $(n,2n)$  と呼ばれる。

弾性散乱は中性子が原子核と弾性的に散乱するものであり、反応前後で中性子と原子核のエネルギー、運動量の総和が保存される。中性子が弾性散乱反応で失うエネルギーは衝突する原子核の質量数  $A$  が小さいほど大きく、エネルギー  $E$  の中性子が弾性散乱した場合、散乱後の中性子のエネルギーの最下限値は  $\alpha E$  で与えられる。ここで  $\alpha = (A-1)^2/(A+1)^2$  である<sup>2</sup>。非弾性散乱反応では、反応とともにガンマ線が放出される。従って、反応に伴って放出される中性子のエネルギーは、ガンマ線の放出分だけ小さくなる。また、 $(n,2n)$  反応では、中性子が原子核と反応した後、中性子が二個とガンマ線が放出される<sup>3</sup>。ウランなどの質量数の大きい原子核と中性子の衝突では、弾性散乱では中性子はそれほどエネルギーは失わないが、非弾性散乱、 $(n,2n)$  反応では大きくエネルギーを失う<sup>4</sup>。

式(11)に示されているように、中性子拡散方程式には様々な断面積(核データ)が用いられる。それらをまとめると以下のようになる。

- 捕獲断面積  $\Sigma_c$
- 核分裂断面積  $\Sigma_f$
- 核分裂あたりの中性子発生数  $\nu$
- 核分裂スペクトル  $\chi$
- 弾性散乱断面積
- 非弾性散乱断面積
- $(n,2n)$  断面積

なお、拡散係数  $D$  は全断面積等から決定されるパラメータである。

## 4 実効増倍率の計算

これまでに、核分裂連鎖反応の程度を示す指標として実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  を説明した。実効増倍率は、 $\nu\Sigma_f$  や  $D$ 、 $\Sigma_a$  といった核データと系の形状が与えられれば、多群中性子拡散方程式を解くことによって得ることが出来る。系がシンプルである場合にはこういった方程式は解析的に(数値計算を行わずに)解くことができるが、一般的にはそのような場合は殆どなく、数値計算に頼ることになる。

中性子の振る舞いは厳密には中性子輸送方程式により記述される。これまで説明してきた中性子拡散方程式は中性子輸送方程式の近似式であるため、拡散方程式に対する数値計算解にはその近似誤差が含まれることになる。この近似誤差は高速中性子系では比較的大きく現れ、さらに系が小型である場合には無視できない程度になる。従って、小型の高速中性子系に対しては拡散方程式を適用することは殆どない。

中性子輸送方程式を解く方法としては、燃料ピンや燃料集合体など複雑な形状を扱う場合には衝突確率法、特性曲線法(Characteristics法)と呼ばれる方法が、球、円柱、正方形体系に対し

<sup>2</sup>例えば水素との弾性散乱を考えた場合は、水素の質量数は1なので  $\alpha = 0$  となり、散乱の結果エネルギーを完全に失う可能性があることになる。一方、U-235との弾性散乱を考えた場合は  $\alpha = 0.983$  となり、弾性散乱で中性子が失うエネルギーは最大でも2%弱であることが分かる。

<sup>3</sup>厳密には、 $(n,2n)$  反応では中性子が二個生成されることから、除去断面積の定義を変更する必要がある。

<sup>4</sup>非弾性散乱、 $(n,2n)$  反応は、高速中性子系では中性子のエネルギー分布を決定する重要な核データである。

では離散座標法 (Discrete ordinate 法、 $S_n$  法) が、主に用いられる。一方、拡散方程式に対しては、有限差分法を用いることが一般的である。

中性子輸送方程式、拡散方程式を解くために CBZ に実装されているソルバーを Table 1 にまとめる。

表 1: CBZ の中性子輸送、拡散ソルバー

対象とする方程式	ソルバー名	計算手法	適用体系
輸送	SNT	$S_n$	XYZ
	SNRZ	$S_n$	円柱
	SNR	$S_n$	球
	PJI	衝突確率法	球、円筒、XY 任意
	MEC	特性曲線法	XY 任意
拡散	PLOS	有限差分法	XYZ、球、円筒
	DHEX	有限差分法	Hex-Z、Tri-Z
	ABEMIE	境界要素法	XY 任意