

共鳴自己遮蔽効果と実効断面積¹

千葉 豪

実効断面積の計算方法、言い換えると原子炉物理における「共鳴理論」の概要について学びたい人には、第36回炉物理夏期セミナーテキストに掲載されている宇根崎博信先生のテキスト「実効断面積計算手法の基礎（超入門）」がお勧めなので、そちらも読まれるとよいであろう。

1 中性子束と中性子源

（スカラー）中性子束は、単位が $[1/\text{cm}^2 \cdot \text{s}]$ であり、「単位時間あたりに単位面積を垂直に通過する中性子数を全立体角について積分したもの」として定義される。一方、（スカラー）中性子源は、単位が $[1/\text{cm}^3 \cdot \text{s}]$ であり、「単位時間、単位体積あたりに発生する全中性子数」として定義される。単位の違いから分かるように、これらは同じ土俵で比べられる物理量ではない。

中性子源としては、Am-Be 等の「外部中性子源」に加えて、炉物理計算では「核分裂中性子源」と「散乱中性子源」が重要となる。核分裂中性子源 S_f は以下のように記述される。

$$S_f = \int \nu \Sigma_f(E') \phi(E') dE' \quad (1)$$

中性子源のエネルギー依存性を考慮し、以下のように記述される場合もある。

$$S_f(E) = \chi(E) \int \nu \Sigma_f(E') \phi(E') dE' \quad (2)$$

また、源のエネルギー依存性を考慮した散乱中性子源 $S_s(E)$ は以下のように記述される。

$$S_s(E) = \int \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(E') dE' \quad (3)$$

さて、中性子源と中性子束は同じ土俵では比べられない、と述べたが、中性子源と同じ土俵で比べられる物理量は何であろうか？ そのひとつが（巨視的）反応率である。反応率は、単位が $[1/\text{cm}^3 \cdot \text{s}]$ であり、「単位時間、単位体積あたりに起こる中性子と原子核の反応数」として定義される。

外部中性子源の無い定常の無限均質媒質を考えよう。定常という条件を課していることから、全てのエネルギーにおいて、単位時間、単位体積あたりに発生する中性子数と、単位時間、単位体積あたりに起こる反応数とは釣り合っていないなければならない。従って、以下のバランス式が成り立つ。

$$\Sigma_t(E) \phi(E) = S_f(E) + S_s(E) \quad (4)$$

共鳴自己遮蔽効果を考える場合には、共鳴エネルギー領域では核分裂中性子源の寄与が無視できることから、以下の式を用いればよい。

$$\Sigma_t(E) \phi(E) = S_s(E) \quad (5)$$

このバランス式は共鳴自己遮蔽効果と実効断面積を考える基礎となるものである。

¹/Document/Education/SelfShielding

2 共鳴自己遮蔽効果と実効断面積

散乱が全く無い仮想的な無限均質媒質では、以下のバランス式が成り立つであろう。

$$\Sigma_a(E)\phi(E) = \frac{\chi(E)}{k} \int \nu \Sigma_f(E')\phi(E')dE' \quad (6)$$

この式では、中性子束、反応断面積ともに連続エネルギーに基づいているが、エネルギーをいくつかの群に分割し、各々の群で断面積が一定値をとるとしよう。この場合、以下の多群に基づくバランス式が定義できる。

$$\Sigma_{a,g}\phi_g = \frac{\chi_g}{k'} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}\phi_{g'} \quad (7)$$

ここで、 g 群の中性子束 ϕ_g 及び核分裂スペクトルは以下のように定義される。

$$\phi_g = \int_{E \in g} \phi(E)dE \quad (8)$$

$$\chi_g = \int_{E \in g} \chi(E)dE \quad (9)$$

さて、式 (6) と式 (7) で得られる中性子増倍率 k と k' を一致させるためには、多群断面積 $\Sigma_{a,g}$ 、 $\nu \Sigma_{f,g}$ をどのように定義すればよいだろうか。ひとつの方法としては、全てのエネルギー群における反応率を、連続エネルギーの場合と多群の場合とで一致させるというものが考えられるであろう。すなわち、

$$\int_{E \in g} \Sigma_a(E)\phi(E)dE = \Sigma_{a,g}\phi_g, \quad (10)$$

$$\int_{E \in g} \nu \Sigma_f(E)\phi(E)dE = \nu \Sigma_{f,g}\phi_g \quad (11)$$

とすればよい。これより、 $\Sigma_{a,g}$ の定義式は以下のように得られる。

$$\Sigma_{a,g} = \frac{\int_{E \in g} \Sigma_a(E)\phi(E)dE}{\phi_g} = \frac{\int_{E \in g} \Sigma_a(E)\phi(E)dE}{\int_{E \in g} \phi(E)dE} \quad (12)$$

つまり、連続エネルギーと多群とで中性子増倍率を一致させるためには、多群断面積はエネルギー依存の断面積を中性子束 ϕ で重み付け平均した値として定義されるべきことが分かるであろう。このように、反応率を保存するように決められる多群断面積を実効断面積 (Effective cross section) と呼ぶ。

さて、媒質の多群巨視的断面積 Σ は、核種毎の微視的断面積 σ_i と数密度 N_i との積 $N_i\sigma_i$ を全ての核種について和をとることにより得られる ($\Sigma = \sum_i N_i\sigma_i$) ので、多群微視的断面積についても同様に中性子束で重み付け平均した値が使われる。核種 i の実効微視的断面積は以下のように書ける。

$$\sigma_{i,g} = \frac{\int_{E \in g} \sigma_i(E)\phi(E)dE}{\int_{E \in g} \phi(E)dE} \quad (13)$$

これまでの議論から明らかなように、多群断面積 $\sigma_{i,g}$ を計算するためには体系の $\phi(E)$ を知る必要がある。ところが厳密な $\phi(E)$ を得るためには莫大な計算コストがかかるし、そもそもはエネルギー依存の $\phi(E)$ を直接計算することを避けるため多群計算を行うわけなので本末転倒である。そこで、NR 近似 (Narrow resonance approximation) というものを導入する。

NR 近似では、着目している共鳴の幅が十分に狭いと仮定することで、共鳴に入ってくる散乱中性子が共鳴の外で (共鳴より高いエネルギーで) 散乱されたものと見做す。従って、散乱中性子源のエネルギー依存

性は着目している共鳴に全く影響を受けず、一般的には弱いエネルギー依存性を持つと考えてよい。ここで、着目している共鳴とは無関係で弱いエネルギー依存性を示す関数を $W(E)$ と定義し、 $S_s(E) = W(E)$ とするならば、中性子のバランス式 (5) は以下のように書ける。

$$\Sigma_t(E)\phi(E) = W(E) \quad (14)$$

従って、NR 近似に基づいたときの無限均質媒質における中性子束 $\phi(E)$ は以下のように簡易的に表現できる。

$$\phi(E) = \frac{W(E)}{\Sigma_t(E)} \quad (15)$$

媒質に断面積が共鳴構造を有する核種 (共鳴核種) が含まれる場合、 $\Sigma_t(E)$ は比較的狭いエネルギー範囲で大きなエネルギー依存性を示す。この式より、 $\Sigma_t(E)$ の値が大きいエネルギーでは中性子束は小さくなり、逆に $\Sigma_t(E)$ の値が小さいエネルギーでは中性子束は大きくなるのが分かる。散乱中性子源と反応率が釣り合う定常状態であるため、反応断面積の値が大きいエネルギーではそのエネルギーに「溜まる」中性子の数は少なくなるであろうし、逆に断面積の値が小さいエネルギーではより多くの中性子が溜まることのできる、というようにも理解できるであろう。

さて、今は核種 i の多群断面積の計算を議論しているが、核種 i のみが媒質に含まれる共鳴核種であると仮定する。すると、式 (15) は次のように書けるであろう。

$$\phi(E) = \frac{W(E)}{N_i\sigma_{t,i}(E) + \sum_{j \neq i} N_j\sigma_{t,j,g}} \propto \frac{W(E)}{\sigma_{t,i}(E) + \left(\sum_{j \neq i} N_j\sigma_{t,j,g} \right) / N_i} = \frac{W(E)}{\sigma_{t,i}(E) + \sigma_0} \quad (16)$$

ここで、 σ_0 は背景断面積 (Background cross section) と呼ばれる仮想的な断面積であり、着目している核種 (ここでは核種 i) 以外の核種の寄与の大きさを示している。背景断面積が大きいほど着目核種の寄与は小さくなり、背景断面積が無限大になると着目核種の寄与はゼロとなる。背景断面積が無限大となる場合を無限希釈 (Infinite dilution) と呼び、中性子束は核種 i の断面積 $\sigma_{t,i}(E)$ の影響を受けず、まったく歪まないことが分かる。

U-238 の 6.67eV の巨大共鳴と、そのエネルギー領域における NR 近似に基づいて計算される中性子束エネルギースペクトル (ただし $W(E) = 1$ と仮定) を Fig. 1 に示す。背景断面積が小さいほど中性子束の歪みが大きくなるのが分かるであろう。

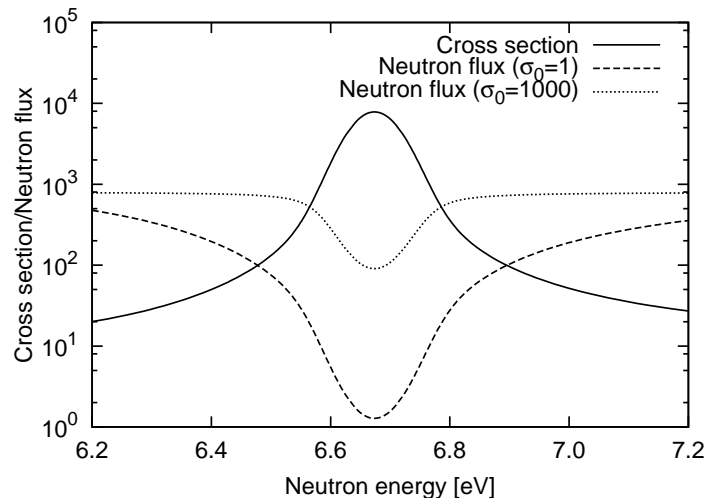


Fig. 1: U-238 巨大共鳴とそれに対応する中性子束エネルギースペクトル

式 (16) を式 (13) に代入することにより、以下の式を得る。

$$\sigma_{i,g} = \frac{\int_{E \in g} \frac{\sigma_i(E)W(E)}{\sigma_{t,i}(E) + \sigma_0} dE}{\int_{E \in g} \frac{W(E)}{\sigma_{t,i}(E) + \sigma_0} dE} \quad (17)$$

一般的に $\sigma_i(E)$ が大きいエネルギーでは $\sigma_{t,i}(E)$ も大きくなる。従って、 $\sigma_i(E)$ が大きいエネルギーでは $\sigma_{t,i}(E)$ も大きくなり重みが小さくなるため、 $\sigma_{i,g}$ を小さくする方向に働く。この効果が共鳴自己遮蔽効果 (Resonance self-shielding effect) と呼ばれるものである。

共鳴自己遮蔽効果は背景断面積が小さいほど顕著に現れる。逆に $\sigma_0 = \infty$ 、すなわち無限希釈状態の場合には、 $\sigma_{i,g}$ は

$$\sigma_{i,g} = \frac{\int_{E \in g} \frac{\sigma_i(E)W(E)}{\sigma_0} dE}{\int_{E \in g} \frac{W(E)}{\sigma_0} dE} = \frac{\int_{E \in g} W(E)\sigma_i(E)dE}{\int_{E \in g} W(E)dE} \quad (18)$$

となる。このような断面積を無限希釈断面積 (Infinite dilution cross section) と呼ぶ。

共鳴自己遮蔽効果は、物理的には、断面積の共鳴構造により共鳴ピーク位置に対応するエネルギーの中性子レベルが小さくなることで、中性子が共鳴核種と反応する機会を逸する効果、と考えるとよいであろう²。Fig. 2 の (a) に U-238 の 6.67eV の巨大共鳴が含まれるエネルギー群 (SRAC107 群構造の 57 群) における実効捕獲断面積を示すが、背景断面積が小さくなるにつれて実効断面積が小さくなる様子が分かる。また、Fig. 3 には U-238 捕獲反応について、無限希釈断面積と実効断面積 (軽水炉燃料を想定して計算したもの) を示す。

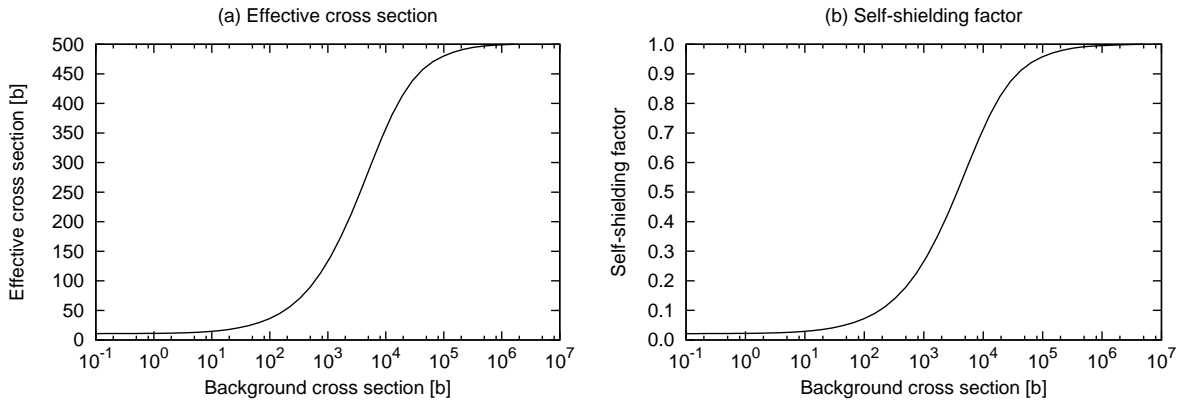


Fig. 2: 背景断面積と実効断面積の関係 (U-238 捕獲反応)

これまでの議論から明らかなように、実効断面積は背景断面積に依存する。そこで、実効断面積 σ_g を無限希釈断面積 $\sigma_g(\infty)$ を用いて以下のような形式で記述する。

$$\sigma_g(\sigma_0) = f(\sigma_0)\sigma_g(\infty) \quad (19)$$

ここで、 $f(\sigma_0)$ は、どの程度共鳴自己遮蔽効果が効いているかを示すパラメータであり、自己遮蔽因子 (Self-shielding factor) と呼ばれる。自己遮蔽因子の背景断面積に対する依存性の例については Fig. 2 の (b) に示している。

²背景断面積が小さいということは着目している共鳴核種が大量に体系に存在していることを意味する。共鳴核種のひとつに着目すると、背景断面積が小さい状況、つまり同じ共鳴核種が周りに大量に存在している状況では、それらによって中性子束が歪むため、自分自身が断面積の値が高いエネルギーの中性子と反応する機会を逸することを意味する (Studsvik Japan の山崎氏より)。これも共鳴自己遮蔽効果のひとつの理解の仕方であろう。

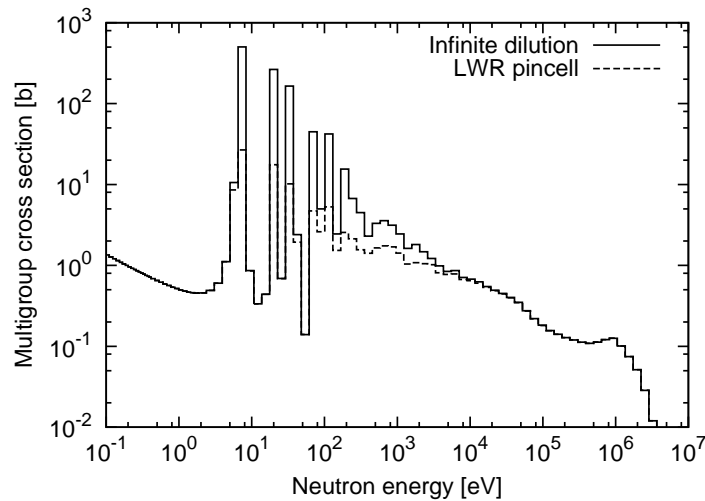


Fig. 3: 無限希釈断面積と実効断面積 (U-238 捕獲反応)

無限希釈断面積といくつかの σ_0 の値に対する自己遮蔽因子を予め計算しテーブル化しておけば、計算対象の σ_0 を計算し、その値に対応する自己遮蔽因子を内挿により求めることで、任意の計算対象の実効断面積を容易に計算することが可能となる。このように、無限希釈断面積と自己遮蔽因子テーブルからなる核データライブラリを ABBN 型もしくは Bondarenko 型の多群断面積ライブラリ (もしくは炉定数セット (Reactor constant set)) と呼ぶ³。

式 (16) に示されているように、共鳴核種 i に対する背景断面積は以下の式で定義される。

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{j \neq i} N_j \sigma_{t,j,g}}{N_i} \quad (20)$$

これまでの議論では着目している核種以外は共鳴断面積を持たないと仮定していたため、上式の右辺に用いる $\sigma_{t,j,g}$ は無限希釈断面積でよいが、実際には媒質中に複数の共鳴核種が含まれる。従って、着目核種以外の核種の多群断面積としては、無限希釈断面積よりもむしろ実効断面積を用いたほうが望ましいと考えられる。この場合、全ての実効断面積の初期値を無限希釈断面積とした反復計算により全ての共鳴核種の実効断面積を計算することになる。このような反復計算方法は「Bondarenko iteration」と呼ばれることもある。

3 中性子源の取り扱い

第 2 章では散乱中性子源について NR 近似を仮定していたが、これは非常に大雑把な近似であり、熱中性子炉の計算では極めて精度が悪い。そのため、WR (Wide resonance) 近似や IR (Intermediate resonance) 近似といった方法が提案されている。また、空間依存性を考えない一点炉や、ピンセルなどの比較的単純な体系では、エネルギーの離散化を非常に細かく行うことで、ほぼ連続的とみなせる取り扱いが可能である。このような「厳密な減速モデル」で中性子源を取り扱う方法も実用化されている。

³旧ソ連の研究者、L.P.Abagyan、N.O.Bazazjants、I.I.Bondarenko、M.N.Nikolaev が考案したため、その頭文字をとって ABBN 型と呼ばれる。

4 共鳴干渉効果

これまで述べたように、ある共鳴核種についての共鳴自己遮蔽効果を評価する（実効断面積を計算する）際には、着目核種以外は非共鳴核種と仮定される。従って、着目核種以外の共鳴核種による中性子束の歪みを原理的に考慮することが出来ない。

例えば U-238 の 6.67eV の巨大共鳴の大部分が含まれる SRAC107 群構造の 57 群について考えよう。Fig. 4 に U-235 と U-238 の全断面積を示すが、このエネルギー群における U-235 の実効断面積には U-238 の共鳴が大きく影響するであろうこと、U-238 の共鳴構造を無視して U-235 の実効断面積を計算することの誤差が大きくなるであろうことが容易に想像できる。この、他の核種の共鳴により自身の共鳴自己遮蔽効果が干渉を受けること（異なる核種の共鳴が干渉しあうこと）を共鳴干渉効果 Resonance interference effect と呼び、この正確な取り扱いが特に熱中性子炉では重要となる。

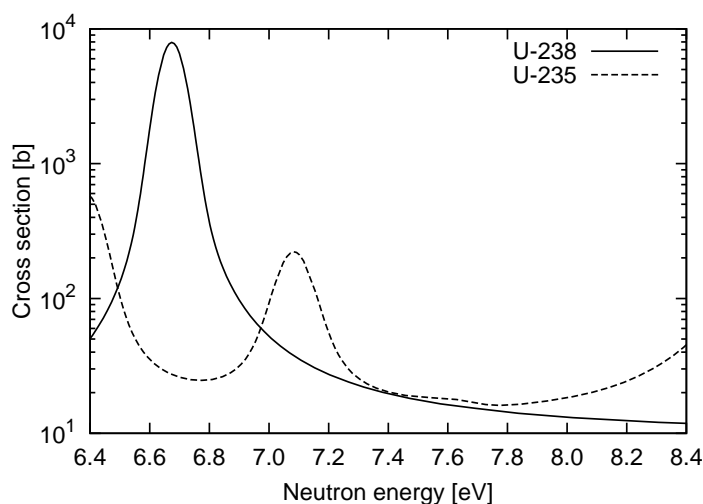


Fig. 4: SRAC57 群における U-235 と U-238 の全断面積

TIMS コードでは、着目する共鳴核種と減速材核種に加えて、もうひとつの共鳴核種を考慮した中性子の減速計算が可能である。その結果、ある着目核種の自己遮蔽因子を計算する際に、共鳴干渉効果を考慮する相手核種の自分自身に対する数密度比をパラメータとすることができる。このパラメータを R 因子と呼ぶ。このような場合には、自己遮蔽因子テーブルが背景断面積、温度および R 因子に依存した 3 次元のものとなる。

SRAC57 群における U-235 の捕獲反応に対する自己遮蔽因子について、異なる R 因子の値で計算した結果を Fig. 5 に示す。ここでの R 因子は U-238 数密度の U-235 数密度に対する比として定義している。R 因子を介して共鳴干渉効果を考慮する核種については背景断面積には含まれないため、R 因子が大きくなるにつれて背景断面積はその分（U-238 の分）小さくなることになる。従って、同一の背景断面積においては R 因子が大きくなるにつれて（実質上は背景断面積が大きくなる効果があるため）自己遮蔽因子は大きくなるものと考えられる。R 因子がゼロのときと比べて、R 因子が 1 のときのほうが自己遮蔽因子が大きめにでているのはそのような理由で説明できるであろう。しかし、R 因子が 100 程度になると、自己遮蔽因子は R 因子がゼロの場合と比べて、大きく異なる値をとることが分かる。これは U-238 と U-235 の共鳴自己遮蔽効果によるものと考えられる。

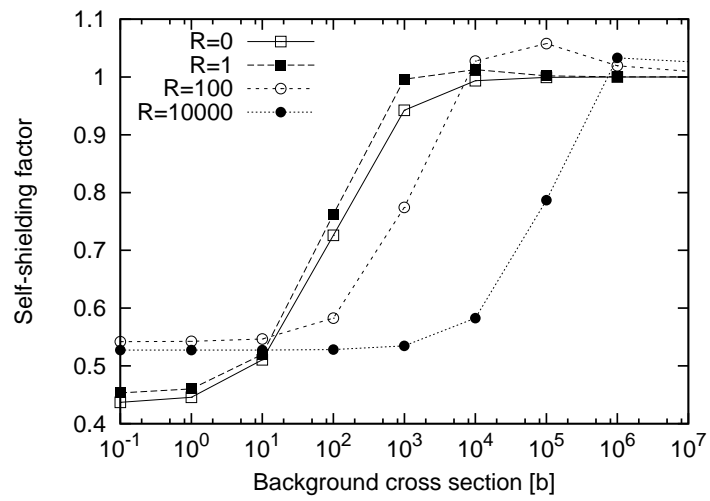


Fig. 5: SRAC57 群における U-235 の捕獲反応における共鳴自己遮蔽因子

5 非均質体系での共鳴自己遮蔽効果

5.1 孤立系

ここまでは無限均質体系での共鳴自己遮蔽効果について議論してきた。中性子の平均自由行程が短い高速中性子体系では、複雑な空間構造を有する燃料集合体を空間的に平均化した均質媒質に置き換えてもそれほど大きな誤差が生じないため、これまで説明してきた理論が適用できるが、熱中性子体系となるとそうもいかない。そこで、燃料棒、被覆管、冷却材からなる「非均質燃料セル」に対する共鳴理論が必要となる。その代表的なものが等価原理 Equivalence theory と呼ばれるものであるが、ここでは無限に広がる冷却材中に一本の円筒状の燃料ペレットが置かれたとき（これを孤立系と呼ぶ）の、燃料ペレットにおける共鳴自己遮蔽効果を考える。

燃料領域と減速材領域からなる体系における燃料領域の中性子バランスを考えると、燃料領域で生成した中性子が次の反応を燃料領域で起こす確率、減速材領域で生成した中性子が次の反応を燃料領域で起こす確率が必要となる。前者を $P_{f \rightarrow f}(E)$ 、後者を $P_{m \rightarrow f}(E)$ と記述すると、燃料領域における中性子バランス式は以下のように書ける。

$$\Sigma_{t,f}(E)V_f\phi_f(E) = S_f(E)V_fP_{f \rightarrow f}(E) + S_m(E)V_mP_{m \rightarrow f}(E) \quad (21)$$

ここで、下添字について、 f は燃料領域を、 m は減速材領域を示す。また、 V は体積を、 S は中性子源を示す。この式から我々は $\phi_f(E)$ を求めたいわけであるが、その表式を簡単にするため、まずは以下の相反定理とよばれる式を導入する。

$$\Sigma_{t,f}(E)V_fP_{f \rightarrow m}(E) = \Sigma_{t,m}V_mP_{m \rightarrow f}(E) \quad (22)$$

ここで、減速材領域は非共鳴核種からなると考えるため $\Sigma_{t,m}$ はエネルギー依存性を有さない。式 (22) を用いると、式 (21) は次のように書き直せる。

$$\phi_f(E) = \frac{1}{\Sigma_{t,f}(E)}S_f(E)P_{f \rightarrow f}(E) + \frac{1}{\Sigma_{t,m}}S_m(E)P_{f \rightarrow m}(E) \quad (23)$$

さて、燃料領域で生成した中性子が燃料領域で反応する確率 $P_{f \rightarrow f}(E)$ であるが、燃料領域での反応のしやすさに対応する $\Sigma_{t,f}(E)$ に対して、燃料領域からの逃げやすさに対応するパラメータを導入すれば記述可能であることが分かる。燃料領域からの逃げやすさは、燃料領域の形状に強く依存するパラメータであり、エネルギー依存性は小さいと考えることができるであろう。そこで、燃料領域からの逃げやすさを Σ_e というエネルギーに依存しないパラメータで記述できるとし、 $P_{f \rightarrow f}(E)$ を次のように書く。

$$P_{f \rightarrow f}(E) = \frac{\Sigma_{t,f}(E)}{\Sigma_{t,f}(E) + \Sigma_e} \quad (24)$$

また、 $P_{f \rightarrow f}(E) + P_{f \rightarrow m}(E) = 1$ が成り立つので

$$P_{f \rightarrow m}(E) = \frac{\Sigma_e}{\Sigma_{t,f}(E) + \Sigma_e} \quad (25)$$

が得られる。これら式 (24)、(25) を式 (23) に代入することにより、最終的に

$$\phi_f(E) = \frac{S_f(E) + S_m(E)\Sigma_e/\Sigma_{t,m}}{\Sigma_{t,f}(E) + \Sigma_e} \quad (26)$$

が得られる。この式の分子の中性子源に関するエネルギー依存性を $W(E)$ で記述するならば、この式は

$$\phi_f(E) = \frac{W(E)}{\Sigma_{t,f}(E) + \Sigma_e} \quad (27)$$

と書き直せ、無限均質媒質における中性子束の式 (15) に対して、分母に Σ_e が加えられた形となることが分かる。すなわち、非均質体系に対しては、核種 i に対する背景断面積 σ_0 として

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{j \neq i} N_j \sigma_{t,j,g}}{N_i} + \Sigma_e \quad (28)$$

を用いることで、無限均質体系と同様の理論を適用出来ることが分かる。これが非均質体系と均質体系を「等価」とする等価原理の概要である。

以上より、燃料領域と減速材領域とで構成される非均質体系において実効断面積を計算するときには、 Σ_e なるパラメータが重要となることが示された。ではこの Σ_e をどのように決めるのであろうか？これについては、燃料領域で生成した中性子が燃料領域から逃げる確率 $P_{f \rightarrow m}$ を考える必要がある。この確率を「脱出確率」と呼ぶが、これは以下の式で厳密に求めることができる。

$$P_{f \rightarrow m}(E) = \frac{1}{4\pi V_f \Sigma_{t,f}(E)} \int_{0 < \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}} d\Omega \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \left(1 - e^{-\Sigma_{t,f}(E)l}\right) \quad (29)$$

この式の説明は省略するが、この式から近似式である式 (25) を導くため「弦法」と呼ばれる方法が導入される。それでは、小林啓佑先生の教科書「原子炉物理」に基づいて、弦法について説明しよう。

領域 V をある直線が横切るときにこの領域の表面で切り取られる内部の線分を「弦」という。ここで、外に凸の領域の弦長が l と $l + dl$ の間にある確率が $f(l)dl$ であるような確率密度関数（これを弦分布関数とよぶ） $f(l)$ を考える。 $f(l)dl$ は以下のように定義される。

$$f(l)dl = \frac{\int_l^l d\Omega \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{\int_{0 < \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}} d\Omega \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})} \quad (30)$$

ここで、 dS は領域の表面 S の微小表面積、 \mathbf{n} はその点での内向きの単位法線ベクトルである。考えている体系を示したものを Fig. 6 に示す。

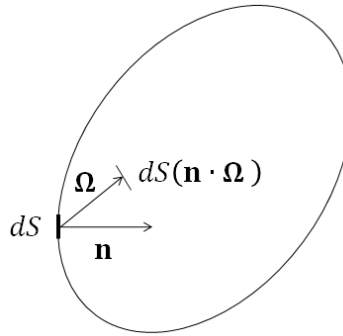


Fig. 6: 外に凸の閉領域

なお、式 (30) の分子の立体角要素 $d\Omega$ は $\boldsymbol{\Omega}$ 方向の弦長を l とすると、弦長が l と $l + dl$ の間にあるような方向の範囲内のものだけを含むものとする。式 (30) の分母は、立体角 $\boldsymbol{\Omega}$ を極角 θ と方位角 φ を用いて

$$\int_{0 < \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}) d\Omega = \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \theta d\varphi = \int_0^1 2\pi \mu d\mu = \pi \quad (31)$$

と記述することにより πS と書けるので、式 (30) は次のように書き直せる。

$$f(l)dl = \frac{\int_l^l d\Omega \int_S dS (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega})}{\pi S} \quad (32)$$

式 (29) で示される $P_{f \rightarrow m}(E)$ を得るために、この式の両辺に $\frac{1 - e^{-\Sigma_{t,f}(E)l}}{4\Sigma_{t,f}(E)V_f/S}$ を乗じて l について積分をとると、以下が得られる。

$$P_{f \rightarrow m}(E) = \frac{1}{4\Sigma_{t,f}(E)V_f/S} \int_0^{l_{max}} (1 - e^{-\Sigma_{t,f}(E)l}) f(l) dl \quad (33)$$

ここで、以下の式で定義される領域 V の平均弦長 \bar{l} を考えよう。

$$\bar{l} = \int_0^{l_{max}} l f(l) dl = \frac{1}{\pi S} \int_{4\pi} d\Omega \int dS l (\mathbf{n} \cdot \Omega) \quad (34)$$

なお、領域の表面に関する積分の範囲は、 Ω に依存して異なることに注意が必要である（全表面とはならない）。この式の分子の積分は

$$\int dS l (\mathbf{n} \cdot \Omega) = V \quad (35)$$

と書ける（Fig. 7 を参照のこと）ので、平均弦長は

$$\bar{l} = \frac{4\pi \cdot V}{\pi S} = \frac{4V}{S} \quad (36)$$

と得られる。すなわち任意の外に凸の領域の平均弦長は、その領域の体積と表面積から与えられることが

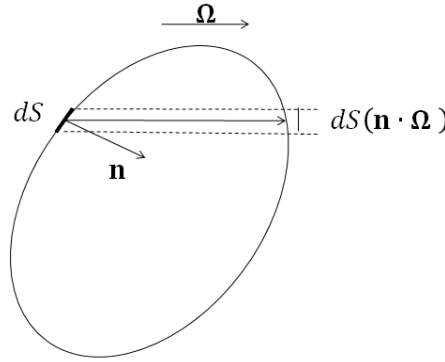


Fig. 7: 外に凸の閉領域 (2)

分かる。この式を用いることにより、式 (33) は次のように書き直せる。

$$P_{f \rightarrow m}(E) = \frac{1}{\Sigma_{t,f}(E)\bar{l}} \int_0^{l_{max}} (1 - e^{-\Sigma_{t,f}(E)l}) f(l) dl \quad (37)$$

ここで、弦分布関数 $f(l)$ に対して以下の仮定を導入するのがミソである。これは Sauer という人が 1963 年に発表したものとされている。

$$f(l) dl = \frac{l}{\bar{l}} e^{-\frac{l}{\bar{l}}} dl \quad (38)$$

これを無限円柱体系における脱出確率の計算に適用すると、無限円柱では最大弦長 l_{max} が無限大となるため、脱出確率として以下の式が得られる。

$$P_{f \rightarrow m}(E) = \frac{1}{1 + \Sigma_{t,f}(E)\bar{l}} = \frac{1/\bar{l}}{\Sigma_{t,f}(E) + 1/\bar{l}} \quad (39)$$

これは脱出確率に対するウィグナーの有理近似式と呼ばれる。この式より、 Σ_e が平均弦長 \bar{l} を用いて

$$\Sigma_e = \frac{1}{\bar{l}} \quad (40)$$

と記述できることが分かる。

ここで、脱出確率について、 $\Sigma_{t,f}(E) = 0$ および $\Sigma_{t,f}(E) \rightarrow \infty$ の極限を取った場合の振る舞いについて考えよう。慣例的に、光学距離 $\Sigma \bar{l}$ が大きいときを「Black」、逆に小さいときを「White」と呼び、また $\Sigma \bar{l} \rightarrow \infty$ を「Black limit」、 $\Sigma \bar{l} \rightarrow 0$ を「White limit」と呼ぶ。さらに Black と White の中間を「Gray」と呼んだりもする。 $\Sigma_{t,f}(E) = 0$ の場合は、式 (29) に対してド・ロピタルの定理を用いることにより以下のように計算できる。

$$P_{f \rightarrow m}(E) = \frac{1}{4\pi V_f} \int_{0 < \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}} d\Omega \int dS (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}) l = 1 \quad (41)$$

なお、この式変形では式 (35) を用いている。一方、 $\Sigma_{t,f}(E) \rightarrow \infty$ の場合は、以下となる。

$$P_{f \rightarrow m}(E) = \lim_{\Sigma_{t,f}(E) \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi V_f \Sigma_{t,f}(E)} \int_{0 < \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}} d\Omega \int dS (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{S}{4V_f \Sigma_{t,f}(E)} = \frac{1}{\bar{l} \Sigma_{t,f}(E)} \quad (42)$$

この式変形では式 (31) を用いている。以上より、式 (39) で示される脱出確率の有理近似は、 $\Sigma_{t,f}(E) = 0$ および $\Sigma_{t,f}(E) \rightarrow \infty$ 、すなわち Black limit 及び White limit のいずれにおいても厳密値を再現していることが分かるであろう。

有理近似の精度を向上させるため、因子 a を $1/\bar{l}$ に乗ずることがある。この因子を「ベル因子」と呼ぶ。この場合の脱出確率は以下のように書ける。

$$P_{f \rightarrow m}(E) = \frac{a/\bar{l}}{\Sigma_{t,f}(E) + a/\bar{l}} \quad (43)$$

この場合、式から明らかなように、White limit では厳密値を再現する一方、Black limit では厳密値の a 倍に漸近していくことが分かる。円柱体系と平板体系における脱出確率に対する有理近似の誤差を Fig. 8 に示す。有理近似は Black limit、White limit において脱出確率の厳密解を再現するが、中間領域では過小評価となることが分かる。それに対して、 a の値を大きくすることにより、中間領域の過小評価を改善することが出来る。ただし、前述の通り、この場合、Black limit では厳密解に漸近しないことになる。

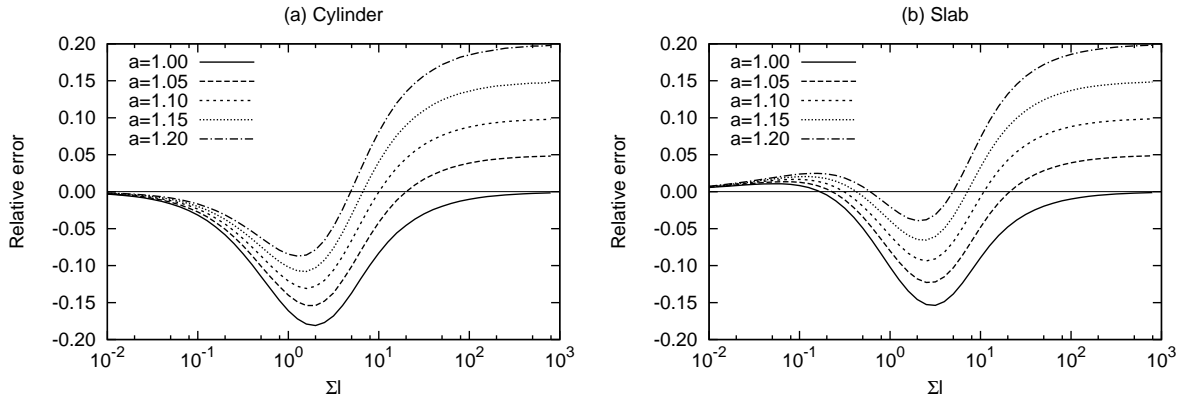


Fig. 8: 脱出確率に対する有理近似の誤差

5.2 非孤立系

前節では減速材中に単一の燃料領域が置かれた場合について考えたが、原子炉では複数の燃料棒が配置されることになるため、ここではこのような「非孤立系」について考える。このような場合、ある燃料棒を脱出した中性子が減速材領域を通過した後にまた別の燃料棒に入射する可能性、言い換えると、ある燃料

棒に着目したときに別な燃料棒から脱出した中性子が入射してくる可能性がある。このことは、燃料領域からの中性子の脱出確率が非孤立系では孤立系と比べて小さくなることを意味しており、非孤立系ではこの点を共鳴自己遮蔽効果の計算で適切に考慮する必要がある。

非孤立系の共鳴自己遮蔽効果については Dancoff 係数法と呼ばれる方法が適用される。この方法について、小林先生の「原子炉物理」を参考にして解説する。

強度が一定で等方の中性子源 Q が均一に分布する減速材中に置かれている燃料領域について、この領域に入ってくる中性子数を計算しよう。ここで、Fig. 9 のように、減速材中の微小体積 dr' で発生した Ω の方向を向く中性子が、位置 r を中心とした微小面積 dS をもつ表面において燃料領域に入射するものとする。減速材領域の反応断面積を Σ_M と記述したとき、面 dS へ入射する中性子数は以下で与えられる。

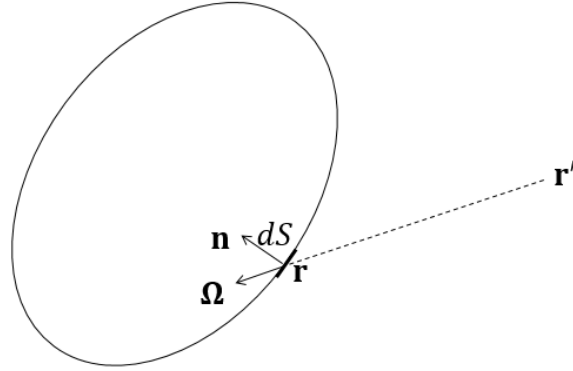


Fig. 9: 燃料領域に入射する中性子

$$dS (\mathbf{n} \cdot \Omega) \int dr' \frac{\exp(-\Sigma_M |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} Q \quad (44)$$

$l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ とおくと

$$dr' = \left(4\pi l^2 \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \right) \cdot dl = l^2 dl d\Omega \quad (45)$$

と書ける。ここで、この dS 、 Ω に関して、減速材領域が $l = 0$ から l' まで存在する ($l = l'$ において別な燃料領域が存在する) ものとする。このとき、 $l = 0$ から l' の減速材領域において発生した中性子が燃料へ入射する中性子数として以下が得られる。

$$dS d\Omega \int_0^{l'} dl \frac{Q}{4\pi} \exp(-\Sigma_M l) (\mathbf{n} \cdot \Omega) = \frac{Q}{4\pi \Sigma_M} dS d\Omega (1 - \exp(-\Sigma_M l')) (\mathbf{n} \cdot \Omega) \quad (46)$$

これを、全表面 S 、それに対応する全角度範囲について積分することにより、着目燃料領域に入射する中性子数 I が以下のように得られる。

$$I = \frac{Q}{4\pi \Sigma_M} \int_S dS \int_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) > 0} d\Omega (1 - \exp(-\Sigma_M l')) (\mathbf{n} \cdot \Omega) \quad (47)$$

式 (31) を用いると、この式はさらに以下のように変形される。

$$I = \frac{SQ}{4\Sigma_M} - \frac{Q}{4\pi \Sigma_M} \int_S dS \int_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) > 0} d\Omega \exp(-\Sigma_M l') (\mathbf{n} \cdot \Omega) \quad (48)$$

l' は dS 、 $d\Omega$ に依存して決まるが、減速材中に単一の燃料領域がある場合については l' は全ての dS 、 $d\Omega$ について ∞ がその上限となる。このような場合、すなわち孤立系での燃料領域への入射中性子数 I_0 は

$$I_0 = \frac{SQ}{4\Sigma_M} \quad (49)$$

と書ける。

孤立系における燃料棒表面に入射する中性子数 I_0 と、着目燃料棒以外にも燃料棒が存在するような非孤立系での入射中性子数 I を用いて、ダンコフ補正 (Dancoff correction) C が以下のように定義される。

$$C = \frac{I_0 - I}{I_0} \quad (50)$$

ダンコフ補正の物理的意味は、この定義から明らかなように、「孤立系での減速材からの入射中性子数に対して、非孤立系において他の燃料棒による「影の効果」でどの程度入射中性子数が減少するか」となる。従って、他の燃料棒による影の効果が小さい場合はダンコフ補正はほぼゼロとなるし、周囲を他の燃料棒に囲まれ、減速材が殆ど存在しない場合はダンコフ補正はほぼ 1 となる。

なお、ダンコフ補正は「着目している燃料棒から 1 個の中性子が飛び出したとき、この中性子が途中で減速材と衝突することなく、他の燃料棒に到達する確率」としても定義できる。これは I_0 、 I を用いた上述の定義と矛盾するものではないことを以下に示そう。ある燃料領域の微小表面 dS から脱出した Ω の方向を向く中性子が距離 l' で別な燃料領域に到達するものとする。このとき、この中性子が減速材領域で反応せず、別な燃料領域に到達する確率は $\exp(-\Sigma_M l')$ と与えられる。これを、全表面、全角度で積分することにより、「着目している燃料棒から 1 個の中性子が飛び出したとき、この中性子が途中で減速材と衝突することなく、他の燃料棒に到達する確率」が以下のように計算できる（式変形中に式 (31) を用いていることに注意）。

$$\frac{\int_S dS \int_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) > 0} d\Omega \exp(-\Sigma_M l') (\mathbf{n} \cdot \Omega)}{\int_S dS \int_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) > 0} d\Omega (\mathbf{n} \cdot \Omega)} = \frac{\int_S dS \int_{(\mathbf{n} \cdot \Omega) > 0} d\Omega \exp(-\Sigma_M l') (\mathbf{n} \cdot \Omega)}{\pi S} \quad (51)$$

これが式 (50) と一致することは容易に示すことができる。

ダンコフ補正の求め方としては、古典的な方法として、孤立系の脱出確率と同様に、減速材領域の弦分布関数を仮定して解析的に求める方法が挙げられるが、一般的に、こうした方法は現在は用いられていない。

現在、広く用いられている方法は、杉村氏と山本先生が考案した「Neutron current method」である [1]。燃料領域に入射した中性子がそこで必ず吸収されるとするならば、燃料領域における中性子束は表面からの入射中性子数に比例することになる。この場合、ダンコフ補正は以下のようにも書ける。

$$C = \frac{\phi_0 - \phi}{\phi_0} \quad (52)$$

Neutron current method ではこれを利用して、減速材領域に一定強度の源を置いた固定源計算からダンコフ補正を数値的に求める。

また、燃料棒が規則正しく配列しているような場合、つまり燃料棒と冷却材で構成される単位燃料セルに対して完全反射や等方反射といった境界条件を課するような場合には、ダンコフ補正は容易に求めることができる。単位燃料セルにおいて等方反射条件のもとでは以下の関係式が導出される（導出については小林先生の教科書を参考のこと）。

$$P_e^L = \frac{P_e^s (1 - C)}{1 - (1 - \Sigma_{t,f}(E) \bar{l} P_e^s) C} \quad (53)$$

ここで、 P_e^L 、 P_e^s はそれぞれ格子系、孤立系の燃料棒からの脱出確率を示す。このとき、 $\Sigma_{t,f}(E)$ に対して無限大の極限を取ると、 $P_e^s \rightarrow \frac{1}{\bar{l} \Sigma_{t,f}(E)}$ より、以下の式が得られる。

$$P_e^L = \frac{1/(\bar{l} \Sigma_{t,f}(E))(1 - C)}{1 - 0} = \frac{1 - C}{\bar{l} \Sigma_{t,f}(E)} \quad (54)$$

このことを利用して、燃料棒の無限配列体系において燃料領域の全断面積を無限大と見做せる程度大きく設定して脱出確率 P_e^L を計算し、そこからダンコフ補正 C を求めることができる。

ダンコフ補正を考慮した場合の脱出確率の有理近似であるが、これについては、式 (53) に対して孤立系の脱出確率 P_e^s の有理近似を代入することで得られる。例えば Bell 因子を考慮しない場合には式 (39) を用いて以下の式が得られる。

$$P_e^L = \frac{(1-C)/\bar{l}}{\Sigma_{t,f}(E) + (1-C)/\bar{l}} = \frac{(1-C)\Sigma_e}{\Sigma_{t,f}(E) + (1-C)\Sigma_e} \quad (55)$$

これより、非孤立系であることで孤立系の脱出断面積が $(1-C)$ だけ小さくなっていることが分かるであろう。また、Bell 因子を考慮した場合には式 (43) を用いて以下の式が得られる。

$$P_e^L = \frac{\frac{1-C}{(1+(a-1)C)} \cdot \frac{a}{\bar{l}}}{\Sigma_{t,f}(E) + \frac{1-C}{1+(a-1)C} \cdot \frac{a}{\bar{l}}} \quad (56)$$

参考文献

- [1] N. Sugimura, A. Yamamoto, "Evaluation of Dancoff factors in complicated geometry using the method of characteristics," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **43**, p.1182-1187 (2006).