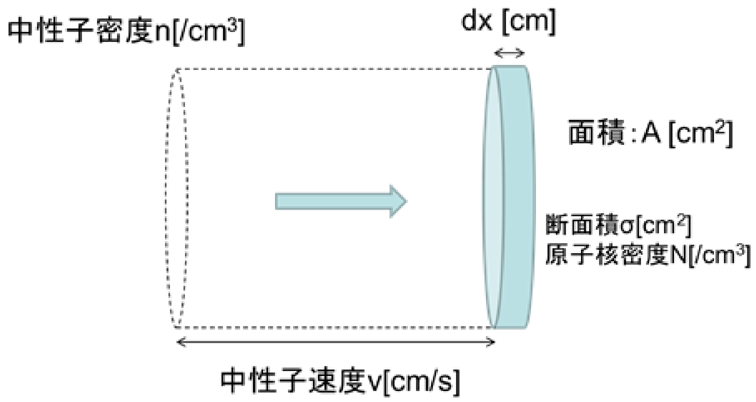
中性子と原子核との反応断面積

空間に密度 n[/cm^3] で均一に存在する中性子群が速度 v[cm/s] で特定の方向に運動し、これが非常に薄い幅 dx[cm] をもつ平面媒質に垂直に入射するものとする。なお、この媒質には断面積が σ[cm^2] である原子核が密度 N[/cm^3] で均一に含まれているとする。以下、単位時間、単位体積あたりに、この媒質中で生じる中性子と原子核との反応数について考える。



以下、断面積が A[cm^2] で与えられる領域について考える。

単位時間あたりに平板媒質の着目部分を通過する中性子数は nvA[/s] で与えられる。

一方、dx が非常に小さく原子核が媒質内で中性子の運動方向に対して重ならないと考えると、媒質で中性子と原子核とが反応する確率は、媒質の断面積に占める原子核の断面積の割合と考えられる。媒質の断面積は A[cm^2]、全ての原子核の断面積は $\sigma \times NAdx$[cm^2] なので、dx の幅の媒質で中性子と原子核とが反応する確率は $\sigma NAdx/A = \sigma Ndx$ で与えられる。

以上より、単位時間あたりに媒質内で発生する中性子と原子核との反応数は $nvA \times \sigma Ndx$[/s] で与えられる。また、着目している媒質の体積は Adx[cm^3] であるので、単位体積あたりの反応数は $nv \times \sigma N$[/s/cm^3] となる。

中性子の密度 n[/cm^3] と中性子の速度 v[cm/s] の積 nv[/cm^2/s] は中性子束 Neutron flux と呼ばれ ϕ で表す。単位より、中性子束は「単位時間あたりに単位面積を通過する中性子数」として定義される。

また、原子核の数密度 N[/cm^3] と断面積 σ[cm^2] の積 $N\sigma$[/cm] は巨視的断面積 Macroscopic cross section と呼ばれ Σ で表す。巨視的断面積は微小長さと乗じることにより、「その微小長さで反応を起こす確率」として定義される。なお、σ は巨視的断面積と区別して微視的断面積 Microscopic cross section と呼ばれる。

これらを用いることにより、単位時間、単位体積あたりの反応数は $\phi \times \Sigma$ とも書ける。

複数種の原子核が媒質に含まれる場合は、巨視的断面積は $\sum_i N_i\sigma_i$ として定義される。ここで、i は原子核の種類を示すインデックスである。すなわち、微視的断面積は個々の原子核に対して与えられる定数であるが、巨視的断面積は「媒質」に対して与えられる定数である（「ウラン-235 の巨視的断面積」「ウラン燃料の微視的断面積」という言い方は間違い）。

なお、この例では、原子核があたかも幾何学的に特定の「断面積」を有しているとして議論を進めたが、実際にはそれは誤りである。それは、微視的断面積が中性子の入射エネルギーに依存して大きく変動することから明らかであろう。

巨視的断面積 Σ は、その次元が [/cm] であることから、「単位長さあたりに中性子と原子核とが反応する確率密度」と考えてしまうかもしれない。この場合、$\Sigma = 10$ のときは、0.1cm を乗じれば確率が 1.0 になるので、「0.1cm の幅の媒質で中性子が完全に反応する」となるだろう。**ただし、これは間違いである。**その理由は、中性子が媒質内を進むのに従い反応によって減衰するためである。すなわち、x が大きくなればなるほど中性子は減衰するため、x で反応する確率は小さくなるはずである。

では、中性子が x で反応を起こす確率密度 $p(x)$ を考えてみる。中性子が媒質内で反応を起こす確率は、微小な幅 dx では Σdx で与えられる。従って、n の中性子が dx で反応を起こしたことによる変動 dn は、$dn = -\Sigma dx n$ として与えられる。これより微分方程式

$$\frac{dn}{dx} = -\Sigma n \tag{1}$$

が得られ、解として

$$n(x) = n(0)\exp(-\Sigma x) \tag{2}$$

が得られる。$x \sim x + dx$ で反応を起こす確率 $p(x)dx$ は、x まで生き残る確率 $\exp(-\Sigma x)$ と $x \sim x + dx$ で反応を起こす確率 Σdx の積となるため、

$$p(x)dx = \exp(-\Sigma x)\Sigma dx \tag{3}$$

で与えられる。従って、x で反応を起こす確率密度は

$$p(x) = \exp(-\Sigma x)\Sigma \tag{4}$$

で与えられる。$p(0) = \Sigma$ であるため、x が非常に小さい場合には、中性子と原子核との反応確率密度は Σ で与えられることが分かる。