非同次微分方程式のいろいろな解き方[1]

2023/8/17 改訂 千葉　豪

課題：以下の微分方程式を解け。ただし、$n(0) = n_0$ とする。

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\lambda n(t) + S \tag{1}$$

1　解答例１：定数変化法を用いた場合

同次方程式

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\lambda n(t) \tag{2}$$

の一般解は

$$n(t) = C \exp(-\lambda t) \tag{3}$$

なので、課題の微分方程式の一般解を

$$n(t) = C(t) \exp(-\lambda t) \tag{4}$$

とおく。これを式 (1) に代入すると、

$$C'(t) \exp(-\lambda t) + C(t)(-\lambda) \exp(-\lambda t) = -\lambda C(t) \exp(-\lambda t) + S \tag{5}$$

より

$$C'(t) = S \exp(\lambda t) \tag{6}$$

が得られる。従って、

$$C(t) = \frac{S}{\lambda} \exp(\lambda t) + C_0 \tag{7}$$

が得られる。これを式 (4) に代入することにより

$$n(t) = \left(\frac{S}{\lambda} \exp(\lambda t) + C_0\right) \exp(-\lambda t) = C_0 \exp(-\lambda t) + \frac{S}{\lambda} \tag{8}$$

が得られ、初期条件

$$n(0) = C_0 + \frac{S}{\lambda} = n_0 \tag{9}$$

から

$$C_0 = n_0 - \frac{S}{\lambda} \tag{10}$$

が得られ、最終的に、課題の解として

$$n(t) = \left(n_0 - \frac{S}{\lambda}\right) \exp(-\lambda t) + \frac{S}{\lambda} \tag{11}$$

が得られる。

2　解答例２：ラプラス変換を用いた場合

式 (1) の両辺にラプラス変換を施すと以下の式を得る。

$$-n(0) + s\hat{n}(s) = -\lambda \hat{n}(s) + \frac{S}{s} \tag{12}$$

この式を整理すると、以下の式が得られる。

$$\hat{n}(s) = \frac{S}{(s+\lambda)s} + \frac{n(0)}{s+\lambda} = \frac{S}{\lambda}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\lambda}\right) + \frac{n_0}{s+\lambda} \tag{13}$$

これをラプラス逆変換することにより、以下の式を得る。

$$n(t) = \frac{S}{\lambda} - \frac{S}{\lambda} \exp(-\lambda t) + n_0 \exp(-\lambda t) = \left(n_0 - \frac{S}{\lambda}\right) \exp(-\lambda t) + \frac{S}{\lambda} \tag{14}$$

[1] /Document/Education/dndt_lambdan_s

3　解答例３：直接的な解法を用いた場合

式 (1) は以下のように変形できる。

$$\frac{dn}{S - \lambda n} = dt \tag{15}$$

この両辺を積分すると、以下を得る。

$$\ln(S - \lambda n) \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = t + C, \tag{16}$$

$$\ln(S - \lambda n) = -\lambda(t + C) \tag{17}$$

これより、

$$\exp(-\lambda t) \cdot \exp(-\lambda C) = S - \lambda n \tag{18}$$

が得られ、$\exp(-\lambda C) = C_0$ とおくことにより

$$n(t) = \frac{S}{\lambda} - \frac{C_0}{\lambda} \exp(-\lambda t) \tag{19}$$

が得られる。初期条件より

$$\frac{S}{\lambda} - \frac{C_0}{\lambda} = n_0 \tag{20}$$

が得られるので、

$$C_0 = S - n_0 \lambda \tag{21}$$

が得られ、最終的に課題の解として

$$n(t) = \left(n_0 - \frac{S}{\lambda}\right) \exp(-\lambda t) + \frac{S}{\lambda} \tag{22}$$

が得られる。

4　解答例４：一般解と特解の重ね合わせを用いた場合

非同次の線形微分方程式の一般解は、１つの特解と同次の線形微分方程式の一般解との和で与えられる。

同次方程式の一般解は前述のとおり

$$n(t) = C \exp(-\lambda t) \tag{23}$$

である。一方、式 (1) の特解としては、非同次項が定数であることに着目すると、特解も同様に定数として与えられることが分かるので、

$$-\lambda n + S = 0 \tag{24}$$

より、

$$n(t) = \frac{S}{\lambda} \tag{25}$$

が特解となることが分かる。

従って、非同次方程式 (1) の一般解としては

$$n(t) = C \exp(-\lambda t) + \frac{S}{\lambda} \tag{26}$$

が得られるので、初期条件 $n(0) = n_0$ を用いることにより、課題の解として

$$n(t) = \left(n_0 - \frac{S}{\lambda}\right) \exp(-\lambda t) + \frac{S}{\lambda} \tag{27}$$

が得られる。

5　解答例５：定数変化法の一般式を用いた場合

微分方程式

$$\frac{dn(t)}{dt} = P(t)n(t) + Q(t) \tag{28}$$

の一般解は

$$n(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)\left\{\int Q(t)\exp\left(-\int P(t)dt\right)dt + C_0\right\} \tag{29}$$

と書ける（この式の導出は後に行う）。課題では $P(t) = -\lambda$、$Q(t) = S$ とおけるので、これを式 (29) に代入すると以下を得る。

$$\begin{aligned} n(t) &= \exp\left(\int -\lambda dt\right)\left\{\int S\exp\left(-\int -\lambda dt\right)dt + C_0\right\} \\ &= \exp(-\lambda t)\left\{\int S\exp(\lambda t)dt + C_0\right\} = \exp(-\lambda t)\left\{\frac{S}{\lambda}\exp(\lambda t) + C_0\right\} \\ &= \frac{S}{\lambda} + C_0\exp(-\lambda t) \end{aligned} \tag{30}$$

これに対して、初期条件 $n(0) = n_0$ を用いることにより、課題の解として

$$n(t) = \left(n_0 - \frac{S}{\lambda}\right)\exp(-\lambda t) + \frac{S}{\lambda} \tag{31}$$

が得られる。

さて、最後に式 (29) を導出しよう。ここでは定数変化法を用いることとする。

式 (28) の同次方程式 $\frac{dn(t)}{dt} = P(t)n(t)$ の一般解は

$$n(t) = C\exp\left(\int P(t)dt\right) \tag{32}$$

と書けるので、式 (28) の一般解を

$$n(t) = C(t)\exp\left(\int P(t)dt\right) \tag{33}$$

とおいて、これを式 (28) に代入する。その結果、以下の式が得られる。

$$C'(t) = Q(t)\exp\left(-\int P(t)dt\right) \tag{34}$$

これより、

$$C(t) = \int Q(t)\exp\left(-\int P(t)dt\right)dt + C_0 \tag{35}$$

が得られるので、これを式 (33) に代入することにより、式 (29) を得ることが出来る。

6　解答例６：記号法を用いた場合

解答例４では一般解と特解の解の重ね合わせから非同次方程式の解を求めたが、特解を求める方法として、記号法という便利なものがある。記号法では、x の微分を

$$\frac{d}{dx} = D, \qquad \frac{d^2}{dx^2} = D^2, \qquad \cdots \tag{36}$$

というように D という記号で表す。すると解くべき非同次方程式を

$$\phi(D)y = R(x) \tag{37}$$

のように書くことが出来る。形式的にこの式の解は $\phi(D)^{-1}R(x)$ と書けるため、$\phi(D)^{-1}$ の意味を調べておくと特解を機械的に求めることが出来る。

今回の課題の式は記号法を用いると

$$(D + \lambda)n = S \tag{38}$$

と書けるので、特解は $S \cdot (D+\lambda)^{-1}$ と書ける。

$R(x)$ が多項式の場合は、以下の公式を用いると便利である。

$$\frac{1}{D-\alpha}R = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-\frac{D}{\alpha}}R = -\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{D}{\alpha}+\frac{D^2}{\alpha^2}+\cdots\right)R \tag{39}$$

また、R が定数の場合、$DR=0$ なので、上式は以下のように書き直せる。

$$\frac{1}{D-\alpha}R = -\frac{1}{\alpha}R \tag{40}$$

従って、式 (38) の特解を

$$\frac{1}{D+\lambda}S = \frac{1}{D-(-\lambda)}S = -\frac{1}{-\lambda}S = \frac{S}{\lambda} \tag{41}$$

のように得ることが出来る。

なお、任意の $R(x)$ に対する公式は以下の通りである。

$$\frac{1}{D-\alpha}R(x) = \exp(\alpha x)\int \exp(-\alpha x)R(x)dx \tag{42}$$

これを用いると、式 (38) の特解は

$$n = \frac{S}{D+\lambda} = S\exp(-\lambda t)\int \exp(\lambda t)dt = S\exp(-\lambda t)\frac{1}{\lambda}\exp(\lambda t) = \frac{S}{\lambda} \tag{43}$$

と得られる。

7　解答例７：$n\exp(\lambda t)$ の微分の形にした場合

課題の式を以下のように変形する。

$$\frac{dn(t)}{dt} + \lambda n(t) = S \tag{44}$$

この両辺に $\exp(\lambda t)$ を乗ずると以下の式を得る。

$$\frac{dn(t)}{dt}\exp(\lambda t) + \lambda n(t)\exp(\lambda t) = S\exp(\lambda t) \tag{45}$$

この左辺が $n(t)\exp(\lambda t)$ の微分であることに着目すると、以下の式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\{n(t)\exp(\lambda t)\} = S\exp(\lambda t) \tag{46}$$

これを解くと以下のように $n(t)$ の一般解が得られる。

$$\begin{aligned} n(t)\exp(\lambda t) &= \frac{1}{\lambda}S\exp(\lambda t) + C, \\ n(t) &= \frac{1}{\lambda}S + C\exp(-\lambda t) \end{aligned} \tag{47}$$

あとは初期条件を用いることにより、課題の解を得ることが出来る。

8　解答例８：変数変換により同次方程式に置き換えた場合

$N(t)$ として以下を定義する。

$$N(t) = -\lambda n(t) + S \tag{48}$$

このとき、以下の式が成り立つ。

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda\frac{dn(t)}{dt} \tag{49}$$

従って、課題の式は以下の同次方程式に書き直せる。

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \tag{50}$$

従って、$N(t)$ の一般解として以下が得られる。

$$N(t) = C\exp\left(-\lambda t\right) \tag{51}$$

これより、$n(t)$ の一般解として以下が得られる。

$$n(t) = \frac{S-N(t)}{\lambda} = \frac{S}{\lambda} - \frac{C}{\lambda}\exp(-\lambda t) = C'\exp(-\lambda t) + \frac{S}{\lambda} \tag{52}$$

9　解答例９：山辺の方法を用いた場合

非同次項が多項式で記述されるときに「山辺の方法」と呼ばれる方法で特解を得ることが出来る。この方法を説明するため、例題と異なる以下の微分方程式を考える。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 \tag{53}$$

微分演算子を形式的に D で記述すると、この方程式は以下のように書き直せる。

$$y = \frac{x^2}{D^2 - 5D + 4} \tag{54}$$

ここで山辺の方法の出番である。この方法ではこの式に対して以下のような「割り算」を行い特解を得る。この例では特解は $\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{21}{32}$ である。

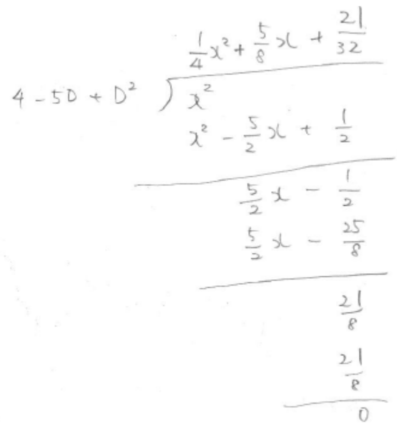

図 1: 山辺の方法の計算例

10　解答例１０：行列指数法を用いた場合

課題の式は、形式的に以下のように書くことが出来る。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} n(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n(t) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

これを行列、ベクトルを用いて以下のように記述する。

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{n} \tag{56}$$

この方程式の解は行列指数 $\exp(\boldsymbol{M}t)$ を用いて以下のように書ける。

$$\boldsymbol{n}(t) = \exp\left(\boldsymbol{M}t\right)\boldsymbol{n}(0) \tag{57}$$

行列指数は以下のように定義される。

$$\exp\left(\boldsymbol{M}t\right) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}t + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{M}t\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\boldsymbol{M}t\right)^3 + \cdots \tag{58}$$

ここで、$\boldsymbol{I}$ は単位行列を示す。さらに、

$$\boldsymbol{M}^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix} -\lambda & S \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\lambda\boldsymbol{M} \tag{59}$$

より、式 (58) は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
\exp\left(\boldsymbol{M}t\right) &= \boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}t+\frac{1}{2}\left(-\lambda\right)\boldsymbol{M}t^2+\frac{1}{3!}\left(-\lambda\right)^2\boldsymbol{M}t^3+\cdots \\
&= \boldsymbol{I}-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{M}\left(-\lambda t+\frac{1}{2}(-\lambda t)^2+\frac{1}{3!}(-\lambda t)^3+\cdots\right) \\
&= \boldsymbol{I}-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{M}\left(\exp(-\lambda t)-1\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \exp(-\lambda t)-1 & -\frac{S}{\lambda}\left(\exp(\lambda t)-1\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(-\lambda t) & -\frac{S}{\lambda}(\exp(-\lambda t)-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (60)
\end{aligned}$$

これより

$$n(t)=n_0\exp(-\lambda t)-\frac{S}{\lambda}(\exp(-\lambda t)-1) \qquad (61)$$

が得られる[2]。

11　解答例１１：さらに微分して $\dfrac{dn(t)}{dt}$ を求めた場合

式 (1) の両辺を微分すると以下の式を得る。

$$\frac{d^2n(t)}{dt^2}=-\lambda\frac{dn(t)}{dt} \qquad (62)$$

この式を解くことにより、以下が得られる。

$$\frac{dn(t)}{dt}=C\exp(-\lambda t) \qquad (63)$$

なお、式 (62) と式 (1) は必要十分の関係にはないため、式 (63) を満足するもののうち、さらに式 (1) を満足するものを求めればよいことになる。これを式 (1) に代入すると以下を得る。

$$C\exp(-\lambda t)=-\lambda n(t)+S \qquad (64)$$

従って、

$$n(t)=-\frac{C}{\lambda}\exp(-\lambda t)+\frac{S}{\lambda} \qquad (65)$$

が得られ、初期条件を用いることにより課題の解を得ることが出来る[3]。

[2] 当初は非同次方程式をこのような形に変換して解を得ることができるとは信じられなかったが、得られた解は解析解を再現しているので、問題ないということで今は納得している（名大の遠藤知弘先生、いろいろご助言いただき、どうも有難うございました）。

[3] この解き方は平成 30 年度原子炉物理学受講者の佐藤優太君に教えてもらったものである。