中性子の減速におけるエネルギー損失の平均値[1]

2020/7/7　千葉　豪

エネルギー E_0 の中性子が原子核と弾性散乱したあとに、E から $E+dE$ のエネルギーになる確率 $P(E)dE$ は以下の式で記述される。

$$P(E)dE = \frac{dE}{(1-\alpha)E_0} \tag{1}$$

ここで α は、中性子の質量を m、衝突した原子核の質量を M とし、$A = M/m$ としたとき、

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \tag{2}$$

で定義されるパラメータである。式 (1) の意味するところは、「エネルギー E_0 で弾性散乱した中性子は、エネルギー区間 $[\alpha E_0, E_0]$ のあるエネルギーに等確率でなりうる」という、極めて簡単なものである。

以降では、簡単のため、中性子と軽水素との弾性散乱のみを考えることとする。この場合、$M = m$ となるため、$\alpha = 0$ となり、弾性散乱により、中性子は完全にそのエネルギーを失う場合もある、ということになる。

「軽水素との一回の衝突で、中性子は平均的にどの程度エネルギーを失うか」という問いに対して（著者も含めて）多くの人が「半分」と答えるであろう。このように考えると、例えば 3 回の衝突では 1/2 の 3 乗ということで、大体 8 分の 1 くらいまでエネルギーが小さくなるということになる。また、1MeV の中性子が 1eV に減速されるまでに必要な平均衝突回数は 20 程度と計算される。

しかしこれは間違いで、本来はもっと少ない回数で減速が行われることになる。

この点についてはどの炉物理の教科書にも詳細に記述してあるが、分かりやすい解説としては文献 [1] のものが挙げられる。この文献の記述を参考にして説明しよう。例えば、I 回の弾性散乱を行うものとして、i 回目の散乱で中性子エネルギーが β_i 倍となるとしよう。ここで、$0 \le \beta_i \le 1$ である。さて、I 回の弾性散乱後の中性子エネルギーは $\beta_1\beta_2\cdots\beta_I$ 倍となるわけだが、この散乱一回あたりの平均のエネルギー変化を $\bar{\beta}$ とするならば、$\bar{\beta}$ は以下の式で決められることになるであろう。

$$\bar{\beta}^I = \beta_1\beta_2\cdots\beta_I \tag{3}$$

従って、$\bar{\beta}$ は

$$\bar{\beta} =^I \sqrt{\beta_1\beta_2\cdots\beta_I} \tag{4}$$

と定義される。つまり、平均のエネルギー変化は、単純平均ではなく幾何平均で考えるべきである、ということを示している。平均のエネルギー変化を 1/2 とするのは単純平均であって、これを用いるべきではないということになる。式 (4) の両辺の対数をとることにより、以下の式を得る。

$$\ln\bar{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\ln\beta_i}{I} \tag{5}$$

この式は、幾何平均に基づく散乱後の中性子の平均エネルギーとしては、エネルギーの対数についての平均を考えるべきことを示している。つまり、散乱後の平均エネルギー $\bar{E}$ は以下の式で計算されるべきということになる。

$$\ln\bar{E} = \int_0^{E_0}\ln E P(E)dE = \int_0^{E_0}\frac{\ln E}{E_0}dE = \ln E_0 - 1 = \ln\left(\frac{E_0}{e}\right) \tag{6}$$

従って、一回の衝突で中性子エネルギーは平均的に $1/e$ 倍となる、ということが言える。

さて、中性子の軽水素との衝突による減速過程について、もう少し詳細に考えてみよう。

[1] /Document/Fundamental/AveEnergySlowingDown

ここでは中性子エネルギーの損失割合を考えるので、簡単のため初期エネルギーを 1 として考えることとする。

はじめに、i 回の弾性散乱後の中性子エネルギーの確率密度分布 $P_i(E)$ について考えよう。$i=1$ については、初期エネルギーを 1 としているので $P_1(E)=1$ が得られる。また、$P_2(E)$ については以下のように得られる。

$$P_2(E) = \int_E^1 P_1(E')P_2(E' \to E)dE' = \int_E^1 \frac{dE'}{E'} = [\ln E']_E^1 = -\ln E \tag{7}$$

なお、$P_i(E' \to E)$ は i 回目の弾性散乱においてエネルギー E' の中性子がエネルギー E に減速される確率密度を示す。さて、ここで $P_i(E) = \gamma_i (\ln E)^{i-1}$ と書けるとしよう。このとき、

$$\begin{aligned} P_{i+1}(E) &= \int_E^1 P_i(E')P_{i+1}(E' \to E)dE' = \int_E^1 \gamma_i \frac{(\ln E')^{i-1}}{E'} dE' \\ &= \gamma_i \left[\frac{1}{i}(\ln E')^i\right]_E^1 = -\frac{\gamma_i}{i}(\ln E)^i = -\frac{1}{i}(\ln E)P_i(E) \end{aligned} \tag{8}$$

と書けることから、$P_i(E)$ は以下のように書ける。

$$P_i(E) = \prod_{j=1}^{i-1}\left(-\frac{1}{j}\right)(\ln E)^{i-1} \tag{9}$$

では、ここで得られた $P_i(E)$ を用いて、i 回の散乱後の中性子エネルギーの（単純）平均値 $\bar{E}_i$ を求めよう。$\bar{E}_i$ は以下のように記述できる。なお、以降では積分範囲の記述は省略する。

$$\begin{aligned} \bar{E}_i &= \int E \prod_{j=1}^{i-1}\left(-\frac{1}{j}\right)(\ln E)^{i-1} dE \\ &= \prod_{j=1}^{i-1}\left(-\frac{1}{j}\right)\left\{\left[\frac{1}{2}E^2(\ln E)^{i-1}\right] - \int \frac{1}{2}E^2(i-1)(\ln E)^{i-2}\frac{1}{E}dE\right\} \\ &= \prod_{j=1}^{i-1}\left(-\frac{1}{j}\right)\left(-\frac{i-1}{2}\int E(\ln E)^{i-2}dE\right) \\ &= \prod_{j=1}^{i-2}\left(-\frac{1}{j}\right)\left(\frac{1}{2}\int E(\ln E)^{i-2}dE\right) = \frac{1}{2}\bar{E}_{i-1} \end{aligned} \tag{10}$$

$\bar{E}_1$ は明らかに 1/2 であるので、

$$\bar{E}_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \tag{11}$$

が得られる。

次に、I 回の散乱後の中性子エネルギーから、各回のエネルギーの変化割合 $\Delta\bar{E}_I$ を求めよう。エネルギー 1 の中性子が散乱後にエネルギー E になったので、散乱 1 回あたりにエネルギーが $E^{1/I}$ 倍になっていると考えればよい。$\Delta\bar{E}_I$ は以下で定義される。

$$\Delta\bar{E}_I = \int (E)^{1/I} P_I(E)dE \tag{12}$$

さて、この式を以下のように変形する。

$$
\begin{aligned}
\Delta \bar{E}_I &= \int E^{1/I} \prod_{j=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{j}\right) (\ln E)^{I-1} \, dE = \prod_{j=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{j}\right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-1} \, dE \\
&= \prod_{j=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{j}\right) \left\{ \left[\frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (\ln E)^{I-1} \right] - \int \frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (I-1) (\ln E)^{I-2} \frac{1}{E} dE \right\} \\
&= \prod_{j=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{j}\right) \left(-\frac{I}{I+1}(I-1)\right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-2} \, dE \\
&= \prod_{j=1}^{I-2} \left(-\frac{1}{j}\right) \left(\frac{I}{I+1}\right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-2} \, dE
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\int E^{1/I} (\ln E)^{j} \, dE &= \left[\frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (\ln E)^{j} \right] - \int \frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} j (\ln E)^{j-1} \frac{1}{E} dE \\
&= -\frac{I}{I+1} \cdot j \int E^{1/I} (\ln E)^{j-1} \, dE
\end{aligned}
\tag{14}
$$

となることから、

$$
\Delta \bar{E}_I = \left(\frac{I}{I+1}\right)^{I} \tag{15}
$$

が得られる。

$I \to \infty$ の極限をとった場合には以下となる。

$$
\lim_{I\to\infty} \Delta \bar{E}_I = \lim_{I\to\infty} \left(\frac{I}{I+1}\right)^{I} = \lim_{I\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/I}\right)^{I} = \frac{1}{\lim_{I\to\infty} \left(1+\frac{1}{I}\right)^{I}} = \frac{1}{e} \tag{16}
$$

つまり、**衝突回数が大きくなった場合には**、中性子と軽水素との一回の弾性散乱において、平均的にエネルギーが $1/e$ 倍となることが分かる。**Fig. 1** に、中性子が軽水素と有限回数弾性散乱したときの、散乱 1 回あたりに失なわれる中性子エネルギー相対値の平均を示す。1 回のみの衝突では平均は当然 0.5 となるが、回数が大きくなるにつれて $1/e$ に漸近していく様子が分かる。

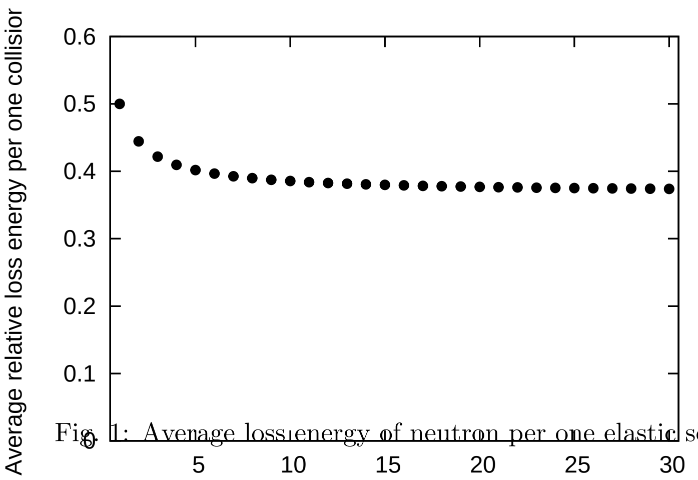

Fig. 1: Average loss energy of neutron per one elastic scattering with hydrogen-1

以上では、軽水素との弾性散乱を考えたが、質量数が 2 以上の原子核との散乱の場合、i 回の弾性散乱後の中性子エネルギーの確率密度分布 $P_i(E)$ はどう計算されるだろうか？

この場合、E' から E に散乱される確率密度 $P(E' \to E)$ は

$$P(E' \to E) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)E'} & (\alpha < E < 1) \\ 0 & (0 < E < \alpha) \end{cases} \tag{17}$$

と与えられる。このように、確率密度がエネルギーの範囲に応じて変わることが $P_i(E)$ の導出を困難にする。

以下では、中性子の初期エネルギーを 1 として、$P_i(E)$ について考える。

$P_1(E)$ については以下のように与えられる。

$$P_1(E) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)} & (\alpha < E < 1) \\ 0 & (0 < E < \alpha) \end{cases} \tag{18}$$

$P_2(E)dE$ は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} P_2(E)dE = \int_E^1 P_1(E')dE' P_2(E' \to E)dE = \int_E^1 P_1(E')dE' \frac{dE}{(1-\alpha)E'} \\ = \frac{dE}{1-\alpha}\int_E^1 \frac{P_1(E')}{E'}dE' \end{aligned} \tag{19}$$

$P_1(E)$ が式 (18) に示されているようにエネルギー領域によって異なることから、この積分は場合分けで計算する必要がある。$\alpha < E < 1$ であれば、積分区間で $P_1(E)$ は同一の式となるので、

$$P_2(E)dE = \frac{dE}{1-\alpha}\int_E^1 \frac{P_1(E')}{E'}dE' = \frac{dE}{1-\alpha}\int_E^1 \frac{1}{(1-\alpha)E'}dE' = -\frac{dE}{(1-\alpha)^2}\ln E \tag{20}$$

となる。一方、$\alpha^2 < E < \alpha$ であれば、

$$P_2(E)dE = \frac{dE}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \frac{1}{(1-\alpha)E'}dE' = -\frac{dE}{(1-\alpha)^2}\ln\alpha \tag{21}$$

となる。以上を整理すると、$P_2(E)$ は以下のように書ける。

$$P_2(E) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(1-\alpha)^2}\ln E & (\alpha < E < 1) \\ \dfrac{-1}{(1-\alpha)^2}\ln\alpha & (\alpha^2 < E < \alpha) \\ 0 & (0 < E < \alpha^2) \end{cases} \tag{22}$$

この例のように、i が大きくなるに従い、$P_i(E)$ の定義範囲の数は大きくなることが考えられ、$P_i(E)$ を導出することは容易ではないことが想像される。

なお、中性子の減速に関しては、1983 年、斎藤慶一氏が日本原子力学会誌の「私のノートから」の欄に「中性子減速の数学モデル」と題したメモを寄稿している [2]。このメモでは、中性子と軽水素との弾性散乱反応に関して、レサジー u における衝突回数 n_u の確率分布と n 回の衝突後のレサジー u_n の確率密度関数を考え、両者の平均がそれぞれ

$$\langle n_u \rangle = u, \tag{23}$$

$$\langle u_n \rangle = n, \tag{24}$$

と与えられる一方、エネルギー E における衝突回数 n_E の確率分布と n 回の衝突後のエネルギー E_n の確率密度関数の平均はそれぞれ

$$\langle n_E \rangle = \ln(E_0/E), \tag{25}$$

$$\langle E_n \rangle = E_0/2^n, \tag{26}$$

と与えられるため、$\langle u_n \rangle \neq \ln(E_0/\langle E_n \rangle)$ となり、「衝突ごとに平均エネルギーは何倍になるか、という設問（説明）にあいまいさが生じ、1/2 か 1/e かということになる」という記述があり、古くから議論されている内容であることが分かる。また、文献 [3] も同様の内容に関するものである（が、筆者はまだ読解できていない）。

本件に関して、有益なメモを作成してくれた平成 29 年度「原子炉物理」受講者である稲垣慶修君に深く感謝します。

参考文献

[1] 原澤進、「基礎原子力講座 4、原子炉入門」、コロナ社

[2] 斎藤慶一、「中性子減速の数学モデル」、日本原子力学会誌、**25**[10], p. 808-809 (1983).

[3] E.R. Cohen, ‘How many collisions to slow down a neutron?’ *Nucl. Sci. Eng.*, **89**, p. 99-108 (1985).