

# 多群断面積の縮約と空間均質化の基礎

千葉豪

平成 26 年 9 月 18 日

本メモ（というか、このページに掲載しているメモ全部に言えることであるが）は、著者が「こう理解している」ということを記述したものであり、正確性に欠けている部分があるかもしれないことをあらかじめ断っておく（正確でないところは指摘して下さい）。

## 1 多群断面積の縮約

### 1.1 無限均質体系における縮約（漏洩を考えない場合）

はじめに、外部中性子源が与えられ、核分裂反応を考慮しない無限均質体系を考えよう。このような場合の縮約前の（詳細群での）減速方程式は次のように書ける。

$$\Sigma_{a,g}\phi_g + \sum_{g'} \Sigma_{g \rightarrow g'} \phi_g = \sum_{g'} \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} + s_g \quad (1)$$

ここで、 $s_g$  は  $g$  群の外部中性子源を示す。

さて、次に、詳細群のいくつかが含まれる「巨視的エネルギー群」 $G$  を考え、それに含まれる詳細群全てについて上式の和をとるものとする。すると、以下の式が得られるであろう。

$$\sum_{g \in G} \Sigma_{a,g} \phi_g + \sum_{g \in G} \sum_{g'} \Sigma_{g \rightarrow g'} \phi_g = \sum_{g \in G} \sum_{g'} \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'} + \sum_{g \in G} s_g \quad (2)$$

ここで、

$$\tilde{\phi}_G = \sum_{g \in G} \phi_g, \quad (3)$$

$$\tilde{s}_G = \sum_{g \in G} s_g \quad (4)$$

なる量を定義しよう。これを用いることにより、式 (2) は次のように書き直せる。

$$\frac{\sum_{g \in G} \Sigma_{a,g} \phi_g}{\tilde{\phi}_G} \tilde{\phi}_G + \sum_{G'} \frac{\sum_{g \in G, g' \in G'} \Sigma_{g \rightarrow g'} \phi_g}{\tilde{\phi}_G} \tilde{\phi}_G = \sum_{G'} \frac{\sum_{g \in G, g' \in G'} \Sigma_{g' \rightarrow g} \phi_{g'}}{\tilde{\phi}_{G'}} \tilde{\phi}_{G'} + \tilde{s}_G \quad (5)$$

そして、巨視的エネルギー群における断面積、すなわち縮約後の断面積を以下のように定義する。

$$\tilde{\Sigma}_{a,G} = \frac{\sum_{g \in G} \Sigma_{a,g} \phi_g}{\tilde{\phi}_G}, \quad (6)$$

$$\tilde{\Sigma}_{G \rightarrow G'} = \frac{\sum_{g \in G} \sum_{g' \in G'} \Sigma_{g \rightarrow g'} \phi_g}{\tilde{\phi}_G} \quad (7)$$

これらは中性子束荷重で縮約した断面積に他ならない。これらを用いることにより、式(5)は次のように書ける。

$$\tilde{\Sigma}_{a,G} \tilde{\phi}_G + \sum_{G'} \tilde{\Sigma}_{G \rightarrow G'} \tilde{\phi}_G = \sum_{G'} \tilde{\Sigma}_{G' \rightarrow G} \tilde{\phi}_{G'} + \tilde{s}_G \quad (8)$$

この式より、群断面積の縮約を中性子束荷重で行い、かつ、縮約群の外部源を式(4)で定義するならば、縮約後の減速方程式を解いて得られる中性子束は  $\sum_{g \in G} \phi_g$  となること、すなわち詳細群の中性子束の積分量を保存することが分かる。また、群断面積と中性子束の積で与えられる反応率の積分量も同様に保存することが分かる。

次に、核分裂による中性子の増倍体系を考え、実効増倍率が縮約前後にどのようになるか整理しよう。この場合は、外部中性子源を核分裂中性子源に置き換えて考えればよい。

全核分裂源を1.0に規格化するとした場合、体系の中性子源としては核分裂スペクトル  $\chi_g$  そのものが与えられることになる。従って、縮約群の核分裂スペクトル  $\tilde{\chi}_G$  を

$$\tilde{\chi}_G = \sum_{g \in G} \chi_g \quad (9)$$

と定義し、群断面積を詳細群計算で得られた中性子束を荷重として縮約することにより、縮約群計算において、中性子束や反応率の積分量を保存させることが可能となる。また、詳細群の実効増倍率  $k$  は以下のように全生成率と全吸収率の比で定義することが出来る。

$$k = \frac{\sum_g \nu \Sigma_{f,g} \phi_g}{\sum_g \Sigma_{a,g} \phi_g} \quad (10)$$

縮約前後で反応率の積分値が保存されるとするならば、

$$k = \frac{\sum_g \nu \Sigma_{f,g} \phi_g}{\sum_g \Sigma_{a,g} \phi_g} = \frac{\sum_G \nu \tilde{\Sigma}_{f,G} \tilde{\phi}_G}{\sum_G \tilde{\Sigma}_{a,G} \tilde{\phi}_G} = \tilde{k} \quad (11)$$

となり、縮約後の減速方程式を解いて得られる実効増倍率  $\tilde{k}$  は縮約前の値  $k$  を保存することが分かる。

## 1.2 無限均質体系における縮約（漏洩を考える場合）

次に、無限均質体系について、漏洩をバックリングで考慮した場合の縮約について考えよう。全核分裂源を 1.0 とした場合、このような問題の支配方程式となる均質 B1 方程式は次のように書ける。

$$\Sigma_{t,g}^0 \phi_g + iB J_g = \sum_{g'} \Sigma_{g' \rightarrow g}^0 \phi_{g'} + \chi_g, \quad (12)$$

$$iB \phi_g + 3\alpha_g \Sigma_{t,g}^1 J_g = 3 \sum_{g'} \Sigma_{g' \rightarrow g}^1 J_{g'} \quad (13)$$

ここで、 $\Sigma_{g' \rightarrow g}^n$  は散乱断面積の  $n$  次の Legendre-moment を示す。また、 $\Sigma_{t,g}^0$ 、 $\Sigma_{t,g}^1$  はいずれも全断面積を示すが、縮約後の断面積の定義が異なるため、上添え字により区別している。 $iB J_g$  はカレントを示し、 $\alpha_g$  は、

$$\alpha_g = \frac{1}{3} \left( \frac{B}{\Sigma_{t,g}^0} \right)^2 \frac{A_g \Sigma_{t,g}^0}{1 - A_g \Sigma_{t,g}^0}, \quad (14)$$

$$A_g = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\Sigma_{t,g}^0 + iB\mu} d\mu \quad (15)$$

と定義される。また、 $A_g$  の積分を計算した式は

$$A_g = \frac{1}{B} \tan^{-1} \left( \frac{B}{\Sigma_{t,g}^0} \right) (B^2 > 0), \quad (16)$$

$$A_g = \frac{1}{2k} \ln \left( \frac{1 + \frac{k}{\Sigma_{t,g}^0}}{1 - \frac{k}{\Sigma_{t,g}^0}} \right) (k^2 = -B^2 > 0) \quad (17)$$

となる。なお、 $\alpha_g$  を 1 とすると均質 P1 方程式となる。

式 (12)、(13) に対する群断面積の縮約であるが、 $\Sigma_{t,g}^0$ 、 $\Sigma_{g' \rightarrow g}^0$  については中性子束荷重で、 $\Sigma_{g' \rightarrow g}^1$  についてはカレント荷重で行い、かつ  $\alpha$  については、縮約後断面積  $\tilde{\Sigma}_{t,G}^0$  から式 (14) 等を用いて計算するということはせず、 $\tilde{\alpha}_G \tilde{\Sigma}_{t,G}^1$  を

$$\tilde{\alpha}_G \tilde{\Sigma}_{t,G}^1 = \frac{\sum_{g \in G} \alpha_g \Sigma_{t,g}^1 J_g}{\sum_{g \in G} J_g} \quad (18)$$

として定義してやれば、中性子束、カレント、およびそれらと断面積の積の積分量、さらには実効増倍率が縮約前後で保存されることになる。

## 1.3 非均質体系における縮約

非均質体系では、原式が拡散方程式の場合には拡散項を、輸送方程式の場合には衝突項を、それぞれ考慮する必要があるため、上述したように、単純に詳細群の中性子束やカレントを荷重として縮約しても、積分量を保存することは出来ない [1, 2]。

その例として、原式が一次元輸送方程式である場合を考えよう。 $g$  群の角度中性子束を  $\psi_g(\mu)$  とすると衝突項は  $\Sigma_{t,g}\psi_g(\mu)$  と書ける。なお、 $\mu$  は進行方向角度と X 軸がなす角の余弦を示す。縮約群でこのエネルギー積分量を保存させようとするならば、縮約群断面積を

$$\tilde{\Sigma}_{t,G}(\mu) = \frac{\sum_{g \in G} \Sigma_{t,g} \psi_g(\mu)}{\sum_{g \in G} \psi_g(\mu)} \quad (19)$$

と定義せざるを得ず、角度依存性を持たせなければならなくなる。もしくは、詳細群の角度中性子束を Legendre 展開することで、衝突項を  $\Sigma_{t,g} \sum_l \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \phi_{l,g}$  と記述し、

$$\tilde{\Sigma}_{t,G}^l = \frac{\sum_{g \in G} \Sigma_{t,g} \phi_{l,g}}{\sum_{g \in G} \phi_{l,g}} \quad (20)$$

として、Legendre-moment に依存した縮約群断面積を定義するという方法もある<sup>1</sup>。この場合、縮約後の輸送方程式における衝突項を

$$\begin{aligned} & \sum_l \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \tilde{\Sigma}_{t,G}^l \tilde{\phi}_{l,G} \\ &= \sum_l \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \left( \tilde{\Sigma}_{t,G}^1 - \tilde{\Sigma}_{t,G}^1 + \tilde{\Sigma}_{t,G}^l \right) \tilde{\phi}_{l,G} \\ &= \tilde{\Sigma}_{t,G}^1 \sum_l \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \tilde{\phi}_{l,G} + \sum_l \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \left( -\tilde{\Sigma}_{t,G}^1 + \tilde{\Sigma}_{t,G}^l \right) \tilde{\phi}_{l,G} \\ &= \tilde{\Sigma}_{t,G}^1 \tilde{\psi}_G(\mu) + \sum_l \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \left( -\tilde{\Sigma}_{t,G}^1 + \tilde{\Sigma}_{t,G}^l \right) \tilde{\phi}_{l,G} \end{aligned} \quad (21)$$

と変形し、上式 4 行目の第 2 項を輸送方程式の散乱源項に移動させることにより、一般的な輸送方程式の形にすることが出来る [4]。

## 2 多群断面積の均質化

### 2.1 1 群、反射境界条件を課された非均質体系における全領域均質化

ここではエネルギー群数を 1 とし、反射境界条件（中性子カレントがゼロ）を課された単ピンセル体系を考えよう。

非均質体系での中性子輸送方程式について、全角度、全空間で積分すると、以下の式が得られるであろう。

$$\langle \Sigma_a \phi \rangle = \frac{1}{k} \langle \nu \Sigma_f \phi \rangle \quad (22)$$

<sup>1</sup>ただし、角度中性子束の Legendre-moment は 1 次以上の場合は正負の値をとることになるため、場合によっては物理的に妥当とは言えないような縮約群断面積が定義される可能性があることは広く知られている [3]。

ここで、 $\phi$  はスカラー中性子束、 $\langle \rangle$  は全体積に対する空間積分を示す。

非均質体系で得られたスカラー中性子束  $\phi$  を用いて、均質化後の吸収断面積、核分裂生成断面積を次のように定義する。

$$\Sigma_a^h = \frac{\langle \Sigma_a \phi \rangle}{\langle \phi \rangle}, \quad (23)$$

$$\nu \Sigma_f^h = \frac{\langle \nu \Sigma_f \phi \rangle}{\langle \phi \rangle} \quad (24)$$

これらの均質断面積を用いた場合、均質化後の体系での中性子輸送方程式について、全角度、全空間で積分すると、以下の式が得られる。

$$\Sigma_a^h \langle \phi^h \rangle = \frac{1}{k^h} \nu \Sigma_f^h \langle \phi^h \rangle \quad (25)$$

式 (23)、(24) を用いることにより、式 (25) は次のように書ける。

$$\frac{\langle \Sigma_a \phi \rangle}{\langle \phi \rangle} \langle \phi^h \rangle = \frac{1}{k^h} \frac{\langle \nu \Sigma_f \phi \rangle}{\langle \phi \rangle} \langle \phi^h \rangle \quad (26)$$

これを整理すると、以下の式を得る。

$$\langle \Sigma_a \phi \rangle = \frac{1}{k^h} \langle \nu \Sigma_f \phi \rangle \quad (27)$$

これより、 $k^h = k$ 、すなわち均質化前後で実効増倍率が保存されることが分かる。

## 2.2 1群、反射境界条件を課された非均質体系における部分領域均質化

では次に、外側に反射境界条件が課された  $2 \times 1$  のピンセル配列を考え、それぞれのピンセルについて均質化を行なうことを考えよう。この場合、 $2 \times 1$  ピンの非均質体系の中性子束を荷重として均質化すれば、均質化前後で実効増倍率と反応率は保存されるであろうか？ 答えは「否」である。

この体系を構成するふたつのピンセルを、それぞれピンセル1、ピンセル2としよう。ピンセル1について、全角度、全体積で非均質体系における輸送方程式を積分したならば、次の式が得られるであろう。

$$J_{1 \rightarrow 2} + \langle \Sigma_a \phi \rangle_1 = \frac{1}{k} \langle \nu \Sigma_f \phi \rangle_1 \quad (28)$$

ここで、 $J_{1 \rightarrow 2}$  はピンセル1からピンセル2への正味中性子カレントを示す。同様に、均質化後の輸送方程式を積分した場合、次の式が得られるであろう。

$$J_{1 \rightarrow 2}^h + \Sigma_{a,1}^h \langle \phi^h \rangle_1 = \frac{1}{k^h} \nu \Sigma_{f,1}^h \langle \phi^h \rangle_1 \quad (29)$$

式 (28) と (29) が等価となるためには、反応率に加えて、境界での正味中性子カレントが均質化前後で保存されなければならない。従って、反応率の保存を狙った中性子束荷重の均質断面積では、境界での正味中性子カレントを保存させる保証が無く、結果的に反応率、境界カレントともに保存することが出来ない。

その問題を克服するために提案されている手法が、中性子束不連続因子であり、Superhomogenization 法 (SPH 法) である。ここでは SPH 法に焦点を当てて議論を進めることとする。

SPH 法は、各均質領域について、均質化前後で反応率を保存させるように、均質断面積を SPH 因子  $\mu$  により調整する方法である。SPH 因子を導入した場合、式 (29) は次のように書ける。

$$J_{1 \rightarrow 2}^h + \mu_1 \Sigma_a^h \langle \phi^h \rangle_1 = \frac{1}{k^h} \mu_1 \nu \Sigma_f^h \langle \phi^h \rangle_1 \quad (30)$$

ここで、 $\mu$  は

$$\langle \Sigma_a \phi \rangle_1 = \mu_1 \Sigma_a^h \langle \phi^h \rangle_1, \quad (31)$$

$$\langle \nu \Sigma_f \phi \rangle_1 = \mu_1 \nu \Sigma_f^h \langle \phi^h \rangle_1 \quad (32)$$

が成り立つように決められる。

非均質体系に対する輸送方程式を全角度、全空間で積分すると、以下の式を得るであろう。

$$\sum_i \langle \Sigma_a \phi \rangle_i = \frac{1}{k} \sum_i \langle \nu \Sigma_f \phi \rangle_i \quad (33)$$

また、SPH 法を適用した均質体系についても同様の操作を行なうと、以下の式を得るであろう。

$$\sum_i \mu_i \Sigma_{a,i}^h \langle \phi^h \rangle_i = \frac{1}{k^h} \sum_i \mu_i \nu \Sigma_{f,i}^h \langle \phi^h \rangle_i \quad (34)$$

各均質領域において、均質化前後で反応率が保存されることから、 $k = k^h$ 、すなわち、均質化前後で実効増倍率が保存されることになる。さらに、均質化前後で実効増倍率が保存されるならば、式 (28) と (30) を比較することにより、正味の中性子カレントも保存されることが分かるであろう。

固有値計算では中性子束の規格化は任意である。従って、ある中性子束規格化条件のもとで非均質計算が行なわれた場合に、均質化後の計算の中性子束の規格化をどのように行なうかにより、SPH 因子の値は変わってくることになる。基本的に、どのように規格化を行なったとしても、反応率、境界カレントは均質化前後で保存されるが、均質断面積を用いて計算を行なう体系の外部境界条件が、均質化計算を行なった (均質断面積と SPH 因子を計算した) 体系の外部境界条件と異なる場合<sup>2</sup> には、その不整合に伴う誤差が現れ、その大きさは SPH 因子を計算したときに課した規格化条件に強く影響を受けることが良く知られている。

一般的に良く用いられている規格化法は体系の全中性子束を保存させる、というものである。また、核分裂源を保存させる、という方法も考えられるであろう。一方、「Black-box homogenization」という考え方もあり、これに基づく、境界カレントが均質・非均質で一致するように規格化を行なう。これは、例えばある均質化対象領域を考えた場合、境界カレントが保存されていれば、その領域が均質であろうが非均質であろうが関係ないし、全体系の中性子バランスも保たれるというコンセプトに基づく (ものである) [3]。最近提案されている「改良 SPH 因子法」では、不連続因子の考え方を取り入れ、体系の表面中性子束が

<sup>2</sup>例えば単一集合体計算で求めたピンセルの均質断面積、SPH 因子を、全炉心計算で用いるような場合。

非均質・均質で一致するように規格化が行なわれる [5]。拡散近似のもとでは、境界表面カレント  $J_{\pm}$  は、表面中性子束  $\phi$  と表面の正味のカレント  $J$  を用いて以下のように記述される。

$$J_{\pm} = \frac{\phi}{4} \pm \frac{J}{2} \quad (35)$$

従って、反射境界条件（ゼロカレント）が課されている場合には、

$$J_{\pm} = \frac{\phi}{4} \quad (36)$$

となるため、このような場合には、改良 SPH 因子法は境界カレントを非均質・均質体系で一致するように規格化を行なっていることになる [6]。

なお、特殊の例として、上の例におけるピンセル 2 がもともと均質であった場合を考えよう。この場合、ピンセル 2 がそもそも均質であるため、この領域の「均質」断面積はそのままの断面積を用いればよいように思えるが、このような領域に対しても SPH 因子を導入する必要があることに注意が必要である。

## 参考文献

- [1] T. Takeda, T. Kitada, 'Direction and region dependent cross sections for use to MOX fuel analysis,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, Supp. 2, p.1057-1060 (2002).
- [2] N. Sugimura, A. Yamamoto, 'Resonance treatment based on ultra-fine-group spectrum calculation in the AEGIS code,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**, p.958-966 (2007).
- [3] R. Sanchez, 'Assembly homogenization techniques for core calculations,' *Ann. Nucl. Energy*, **51**, p.14-31 (2009).
- [4] G.I. Bell, *et al.*, 'Multitable treatments of anisotropic scattering in Sn multigroup transport calculations,' *Nucl. Sci. Eng.*, **23**, p.376 (1967).
- [5] A. Yamamoto, *et al.*, 'Improvement of SPH method for pin-by-pin core calculations,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **41**, p.1155-1165 (2004).
- [6] G. Chiba, *et al.*, 'A note on application of superhomogenization factors to integro-differential neutron transport equations,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **49**, p.272-280 (2012).