

# 原子炉動特性の基礎 (1) 一点炉遅発中性子一群動特性方程式<sup>1</sup>

2018/5/21 改訂 千葉 豪

## 1 即発中性子のみ的一点炉近似動特性方程式の導出

はじめに即発中性子のみ動特性方程式を文献 [1] に従って導出する。

核分裂性物質とその他の構成材からなる有限の体系を考え、核分裂反応以外の中性子の供給がなく、かつその内部の中性子密度分布がその体系固有の持続的な分布に達しているものとする。この体系内における中性子数のバランスは以下の式で表現される。

$$\frac{dn(t)}{dt} = S - A - L \quad (1)$$

ここで、 $n(t)$  は体系内の中性子の総数を示し、 $S$ 、 $A$ 、 $L$  はそれぞれ単位時間あたりの平均的な中性子の（核分裂反応による）発生数、吸収数、漏れ数を示している。中性子実効増倍率  $k$  はこれらを用いて以下のように定義することができる<sup>2</sup>。

$$k = \frac{S}{L + A} \quad (4)$$

$(L + A)$  は単位時間あたりの平均中性子消滅数であり、 $n$  が中性子の総数であるから、 $n/(L + A)$  を中性子の平均的な寿命と考えることが出来る。従って、中性子の平均寿命を  $l$  と定義すると  $l = n/(L + A)$  より  $L + A = n/l$  の関係が得られる。同様に、 $S$  は単位時間あたりの平均中性子発生数であるから、 $n$  をそれで割ったものが中性子の生成に要する平均の時間となる。従って、中性子の平均生成時間を  $\Lambda$  と定義すると  $\Lambda = n/S$  より  $S = n/\Lambda$  が得られる<sup>3</sup>。

なお、中性子の平均寿命  $l$  と平均生成時間  $\Lambda$  について、式 (4) を用いることにより

$$\Lambda = \frac{n}{S} = \frac{n}{k(L + A)} = \frac{l}{k} \quad (5)$$

の関係が得られる。

式 (1) と式 (4) より、次式が得られる。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{k - 1}{l} n(t) \quad (6)$$

これが即発中性子のみ動特性方程式である。また、この方程式の解は次のように与えられる。

$$n(t) = n(0) \exp\left(\frac{k - 1}{l} t\right) \quad (7)$$

## 2 遅発中性子を考慮した一点炉近似動特性方程式の導出

核分裂反応とほぼ同時に発生する中性子は即発中性子と呼ばれるが、それに対して、核分裂で発生した核分裂生成物の一部がベータ崩壊したあとに中性子を発生する場合がある。このベータ崩壊は時間的遅れを伴うため、それとともに発生する中性子も核分裂反応からある時間だけ遅れて生成されることになる。このような中性子を遅発中性子 (Delayed neutron) と呼び、ベータ崩壊とともに遅発中性子を放出する核分裂生成物を遅発中性子先行核 (Delayed neutron precursor) と呼ぶ<sup>4</sup>。

<sup>1</sup>/Document/Study/Kinetics/OneGroup/

<sup>2</sup>中性子実効増倍率を「ある世代における中性子数  $N_0$  と次の世代における中性子数  $N_1$  の比」、すなわち  $N_1/N_0$  として定義する場合があるが、これは式 (4) の定義と整合している。ある世代に存在する中性子は、体系から漏れるか、原子核に吸収されることによって体系から消滅する。従って、体系から漏れずに原子核に吸収される確率は  $A/(A + L)$  と定義される。また、中性子が原子核に吸収された場合、ある確率で核分裂反応が起こり新たな中性子が発生する。中性子が原子核に吸収されたときの平均中性子発生数は  $S/A$  として定義される。次の世代の中性子数  $N_1$  は、 $N_0$  に対して、体系から漏れずに原子核に吸収される確率、及び中性子が原子核に吸収されたときの平均中性子発生数を乗じたものとして定義できるため、以下の式が成り立つ。

$$N_1 = N_0 \cdot \frac{A}{A + L} \cdot \frac{S}{A} = N_0 \cdot \frac{S}{A + L} \quad (2)$$

従って、

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{S}{A + L} = k \quad (3)$$

が得られる。

<sup>3</sup>中性子生成時間は英語では「Generation time」と呼称されるが、いくつかの日本語の炉物理の教科書ではこれを「世代時間」と訳している場合がある。厳密にはこれは誤訳といつてよいだろう。

<sup>4</sup>厳密には、遅発中性子は先行核の崩壊とともに発生するのではなく、先行核が崩壊して生成された核種 (遅発中性子放出核 (Delayed neutron emitter)) から放出される、と言える。

遅発中性子先行核としては 100 を越えるものが挙げられるが、その個々について陽的に扱うことは困難を伴うため、一般的にはベータ崩壊の半減期が近いものをグループ化して取り扱う。このグループを遅発中性子先行核家系 (Delayed neutron precursor family) などと呼び、通常は 6 つのグループに分ける。また、エネルギーと同様に群という呼び方もする。

なお、以降では、問題を簡略化するため、遅発中性子先行核を一つの群にまとめて考えることとする (先行核一群近似)。

## 2.1 簡易モデルに基づく動特性方程式の導出

はじめに、厳密さを犠牲にした簡易的なモデルに基づいて動特性方程式を導出しよう。

核分裂反応で発生する中性子のうち、割合  $\beta$  が遅発中性子 (すなわち先行核) であるとする。中性子増倍率が  $k$  であるとき、ある時点で  $n$  個の中性子があったならば、次の世代においては、中性子が  $(1 - \beta)kn$  個、先行核が  $\beta kn$  個発生することになる。従って、1 世代経過したときの中性子数 (中性子密度とも言う)  $n$ 、先行核数 (先行核密度とも言う)  $C$  の変動はそれぞれ以下のように書けるであろう。

$$\Delta n = (1 - \beta)kn - n \quad (8)$$

$$\Delta C = \beta kn \quad (9)$$

従って、 $\Delta t$  という時間内での  $n$ 、 $C$  の変動は、1 世代の長さを中性子の寿命  $l$  として考えることで、以下のように記述することが出来るであろう。

$$\Delta n = \{(1 - \beta)kn - n\} \frac{\Delta t}{l} \quad (10)$$

$$\Delta C = \beta kn \frac{\Delta t}{l} \quad (11)$$

また、先行核はその崩壊定数に従って崩壊し遅発中性子を放出する。先行核の崩壊定数を  $\lambda$  としたとき、 $\Delta t$  という時間内で  $\lambda C \Delta t$  個の先行核が崩壊して中性子を発生する。 $\Delta t$  における  $n$ 、 $C$  の変動にこの点を加味すると、以下の式を得ることができる。

$$\Delta n = \{(1 - \beta)kn - n\} \frac{\Delta t}{l} + \lambda C \Delta t \quad (12)$$

$$\Delta C = \beta kn \frac{\Delta t}{l} - \lambda C \Delta t \quad (13)$$

これらの式について  $\Delta t \rightarrow 0$  の極限をとることによって、 $n$ 、 $C$  が従う以下の動特性方程式を得ることが出来る。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(1 - \beta)k - 1}{l} n(t) + \lambda C(t), \quad (14)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta k}{l} n(t) - \lambda C(t) \quad (15)$$

## 2.2 中性子拡散方程式からの動特性方程式の導出

次に、中性子拡散方程式に基づいて動特性方程式を導出する。

原子炉内の中性子の振る舞いについて、エネルギー群を 1 群とし拡散近似を導入するとする。この場合、原子炉内の中性子、遅発中性子先行核の時間的な変動は以下の式で表される。

$$\frac{dn(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{1}{v} \frac{d\phi(\mathbf{r}, t)}{dt} = D \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) + \nu_p \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) + \lambda C(\mathbf{r}, t), \quad (16)$$

$$\frac{dC(\mathbf{r}, t)}{dt} = y \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) - \lambda C(\mathbf{r}, t) \quad (17)$$

ここで、 $\nu_p$ 、 $y$  はそれぞれ核分裂反応あたりに発生する即発中性子数、遅発中性子先行核数を示す。遅発中性子先行核を 1 群で扱った場合、核分裂あたりに発生する遅発中性子数  $\nu_d$  は  $y$  と等しい (遅発中性子先行核は 1 個の遅発中性子を発生させると考えるため)。また、核分裂あたりに発生する全中性子数を  $\nu$  とした場合、核分裂で発生する全中性子に対する遅発中性子の割合  $\beta$  は  $\beta = \nu_d / (\nu_p + \nu_d) = \nu_d / \nu$  と書ける。

拡散方程式における漏洩項をバックリング  $B^2$  を用いて  $\nabla^2\phi = -B^2\phi$  と書き換え、中性子束  $\phi$  と遅発中性子先行核密度  $C$  について、以下のように、時間と空間に対する依存性が分離できると仮定する。

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})\phi(t) = \varphi(\mathbf{r})vn(t), \quad (18)$$

$$C(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})C(t) \quad (19)$$

これを式 (16) に代入することにより、以下の式が得られる。

$$\frac{dn(t)}{dt} = -DB^2vn(t) - \Sigma_a vn(t) + (1 - \beta)\nu\Sigma_f vn(t) + \lambda C(t) \quad (20)$$

系の中性子実効増倍率  $k$  は

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} \quad (21)$$

と書けるので、式 (16)(17) は以下のように整理される。

$$\frac{dn(t)}{dt} = (\Sigma_a + DB^2) \{(1 - \beta)k - 1\} vn(t) + \lambda C(t), \quad (22)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = (\Sigma_a + DB^2)k\frac{y}{\nu}vn(t) - \lambda C(t) \quad (23)$$

ここで、 $(\Sigma_a + DB^2)vn$  が単位時間あたりの中性子の (漏れを含んだ) 消滅反応率を示していることより、 $(\Sigma_a + DB^2)v$  が単位時間あたりの 1 個の中性子の消滅回数を示し、その逆数  $1/\{(\Sigma_a + DB^2)v\}$  が 1 個の中性子の 1 消滅反応あたりに要する時間を示していることが分かる。これを即発中性子寿命と呼び  $l$  と記述する。

即発中性子寿命を用いることで、簡易的なモデルと同様の動特性方程式を以下のように得ることができる。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(1 - \beta)k - 1}{l}n(t) + \lambda C(t), \quad (24)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{k y}{l \nu}n(t) - \lambda C(t) = \frac{\beta k}{l}n(t) - \lambda C(t) \quad (25)$$

### 2.3 反応度と中性子生成時間を用いた動特性方程式

以上で動特性方程式を得たが、反応度  $\rho$ 、中性子生成時間  $\Lambda$  で記述するのが一般的である。

さて、即発中性子の 1 消滅反応あたりの時間、すなわち即発中性子寿命を  $l$  と定義したので、単位時間あたりの即発中性子の消滅反応回数は  $1/l$  と定義される。従って、単位時間あたりに発生する核分裂中性子は  $k/l$  と定義できるため、核分裂中性子 1 個が発生するために必要な時間は  $l/k$  となる。これを中性子生成時間とよび  $\Lambda = l/k$  と定義する。

さらに、反応度  $\rho = (k - 1)/k$  を導入すると、動特性方程式は以下のように書き直せる。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda}n(t) + \lambda C(t), \quad (26)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda}n(t) - \lambda C(t) \quad (27)$$

これが一般的に用いられる一点炉近似に基づく動特性方程式である。式 (26) の右辺は、第一項が核分裂による即発中性子の生成、第二項が先行核の崩壊による遅発中性子の生成を示し、式 (27) の右辺は、第一項が核分裂による先行核の生成、第二項が先行核の崩壊による消滅をそれぞれ示している。

## 3 一点炉近似動特性方程式の解析解の導出

一点炉動特性方程式は簡単な場合は解析的に解くことができる。方法はいろいろあるが、ここではラプラス変換を用いることとする。

初期条件として  $n(0) = n_0$ 、 $C(0) = C_0$  とし、 $t = 0$  において、この系にステップ状の反応度  $\rho$  が印加された場合を考える。

動特性方程式 (26)、(27) をラプラス変換すると、以下の式が得られる。

$$sn(s) - n_0 = \frac{\rho - \beta}{\Lambda}n(s) + \lambda C(s), \quad (28)$$

$$sC(s) - C_0 = \frac{\beta}{\Lambda}n(s) - \lambda C(s) \quad (29)$$

これらより、 $n(s)$ 、 $C(s)$  として以下の式を得る。

$$n(s) = \frac{(s + \lambda)n_0 + \lambda C_0}{(s + \lambda)s - \frac{\rho - \beta}{\Lambda}s - \lambda \frac{\rho}{\Lambda}}, \quad (30)$$

$$C(s) = \frac{\left(s - \frac{\rho - \beta}{\Lambda}\right)C_0 + \frac{\beta}{\Lambda}n_0}{(s + \lambda)s - \frac{\rho - \beta}{\Lambda}s - \lambda \frac{\rho}{\Lambda}} \quad (31)$$

これらの式において、分母が  $s$  の 2 次式、分子が  $s$  の 1 次式であり、かつ両式の分母が同一であることから、 $n(s)$ 、 $C(s)$  は以下のように書ける。

$$n(s) = \frac{a}{s - p} + \frac{b}{s - q} = \frac{(a + b)s - (aq + bp)}{(s - p)(s - q)}, \quad (32)$$

$$C(s) = \frac{c}{s - p} + \frac{d}{s - q} = \frac{(c + d)s - (cq + dp)}{(s - p)(s - q)}, \quad (33)$$

ここで、 $p$ 、 $q$  は式 (30) (31) の分母をゼロとした以下の式

$$s^2 + \left(\lambda - \frac{\rho - \beta}{\Lambda}\right)s - \frac{\rho\lambda}{\Lambda} = 0 \quad (34)$$

の解であり、

$$\frac{-(\lambda\Lambda - \rho + \beta) \pm \sqrt{(\lambda\Lambda - \rho + \beta)^2 + 4\rho\lambda\Lambda}}{2\Lambda} \quad (35)$$

と書ける。この式より、 $\rho > 0$  の場合には、 $p$ 、 $q$  として正と負の解が得られ、絶対値としては負の解が大きいこと、 $\rho < 0$  の場合には負の解のみが得られることが分かる。以降では、これら 2 つの解を  $p > q$  として定義するものとする。

式 (32) における係数  $a$ 、 $b$  については、式 (30) と (32) の分子を比較することにより、以下の式を満足することが分かる。

$$a + b = n_0, \quad (36)$$

$$aq + bp = -(n_0 + C_0)\lambda \quad (37)$$

これより、 $a$  は

$$a = \frac{-(n_0 + C_0)\lambda - n_0p}{q - p} \quad (38)$$

と書ける。また、 $b$  は式 (36) と (38) から容易に求めることが出来る。

$n(t)$  を得るため、式 (32) に対して逆ラプラス変換を施すと、

$$n(t) = a \exp(pt) + b \exp(qt) \quad (39)$$

が得られる。

前述したように、 $\rho > 0$  の場合には、 $p$ 、 $q$  のいずれかが正、もう一方が負の値をとるため、正の値の項は単調に増加し、負の値の項は  $t \rightarrow \infty$  でゼロに漸近することが分かる。すなわち、ある程度の時間が経過した場合には、中性子数の時間変化は正の項に支配され、指数関数に従い増加していくことが分かる。一方、 $\rho < 0$  の場合には、 $p$ 、 $q$  いずれも負の値をとるため、 $n$  は時間とともに減少していく。この場合、 $p \neq q$  であるため、時間が進むにつれて、 $p$  と  $q$  の絶対値の小さい項に支配されることになる。

ここで、 $\rho$  に応じて解  $p$ 、 $q$  のとる値を評価した。 $l = 0.000015[s]$ 、 $\beta = 0.0065$ 、 $\lambda = 0.078[1/s]$  の条件における、 $\rho$  に対する  $p$ 、 $q$  を Fig. 1 に示す。

- $\rho < 0$  の場合には、負の解のひとつ (図中の  $p$ ) はゼロ近傍の値を、もうひとつ (図中の  $q$ ) は  $\rho$  に強く依存して大きな絶対値をとる。従って、後者の負の解の項は時間とともに急速に減衰し、ある程度の時間が経過すると  $n$ 、 $C$  は前者の解の項に依存して減衰することが分かる。また、前者の解は反応度の大きさに依存していないことから、どれだけ大きな負の反応度を加えたとしても、最終的な減衰の挙動は同一となることが分かる。
- $0 < \rho < \beta$  の場合は、比較的絶対値の小さい正の解 (図中の  $p$ ) と、絶対値の大きい負の解 (図中の  $q$ ) となるため、後者の解の項はやはり時間とともに急速に減衰し、ある程度時間が経過すると、前者の解の項に依存して  $n$  と  $C$  は増加していくことが分かる。

- $\rho > \beta$  の場合（すなわち即発臨界を越えた場合）は、比較的絶対値が小さい負の解（図中の  $q$ ）と、絶対値が大きい正の解（図中の  $p$ ）となるため、 $n$ 、 $C$  は後者の解の項が支配的となり、急速に増加していくことになる。

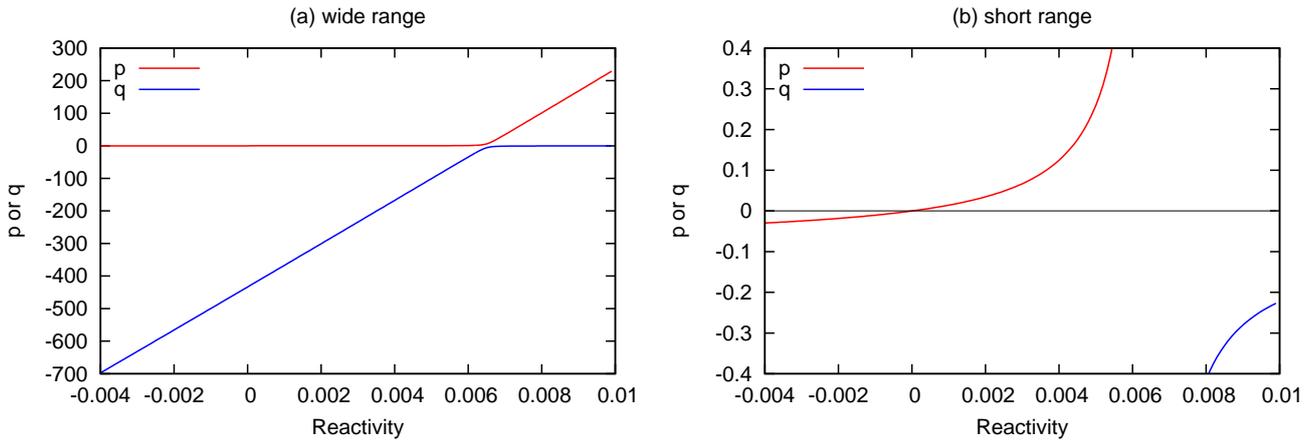


Fig. 1:  $p$  and  $q$  dependent on  $\rho$

次に、根  $p$ 、 $q$  の近似値を求めよう。印加された反応度  $\rho$  が  $\beta$  に近い値をとらない、すなわち

$$|\beta - \rho| \gg \lambda\Lambda \quad (40)$$

が成り立つとすると、

$$\frac{4\lambda\Lambda\rho}{(\beta - \rho + \lambda\Lambda)^2} \ll 1 \quad (41)$$

となるため、

$$(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad x \ll 1 \quad (42)$$

より

$$\begin{aligned} \sqrt{(\lambda\Lambda - \rho + \beta)^2 + 4\rho\lambda\Lambda} &= |\lambda\Lambda - \rho + \beta| \sqrt{1 + \frac{4\rho\lambda\Lambda}{(\lambda\Lambda - \rho + \beta)^2}} \\ &\approx |\lambda\Lambda - \rho + \beta| \left( 1 + \frac{2\rho\lambda\Lambda}{(\lambda\Lambda - \rho + \beta)^2} \right) = |\lambda\Lambda - \rho + \beta| + \frac{2\rho\lambda\Lambda}{|\lambda\Lambda - \rho + \beta|} \end{aligned} \quad (43)$$

が得られ、 $p$ 、 $q$  の近似解として

$$s_1 \approx \frac{\rho\lambda}{\lambda\Lambda - \rho + \beta} \approx \frac{\rho\lambda}{\beta - \rho}, \quad (44)$$

$$s_2 \approx -\frac{\lambda\Lambda - \rho + \beta}{\Lambda} - \frac{2\rho\lambda\Lambda}{\lambda\Lambda - \rho + \beta} \approx -\frac{\beta - \rho}{\Lambda} \quad (45)$$

が得られる。 $s_1$  については、 $\rho$  について  $\infty$  もしくは  $-\infty$  の極限をとったときに有限の値となることが分かる。なお、 $\beta > \rho$  のとき  $p = s_1$ 、 $q = s_2$  となり、 $\beta < \rho$  のとき  $p = s_2$ 、 $q = s_1$  となることから、 $\rho \rightarrow -\infty$  の極限をとったときには  $p$  が  $-\lambda$  に、また  $\rho \rightarrow +\infty$  のときには  $q$  が  $-\lambda$  に漸近することになる<sup>5</sup>。

この近似式で得た  $p$ 、 $q$  の、厳密な解析値との比をとったものを Fig. 2 に示す。 $\rho \approx \beta$  近傍では近似式の精度は悪いが、それ以外では良好であることが確認できる。

最後に、中性子数の時間変動  $n(t)$  において、肩が負の値になる指数関数の成分  $\exp(qt)$  に掛かる係数  $b$  の符号について整理する。なお、ここでは  $|\beta - \rho| \gg \lambda\Lambda$  かつ  $0 < \rho < \beta$  の場合（即発臨界よりもある程度小さい正の反応度が印加された場合）について考える。

このとき、式 (36)、(38) より、

$$b = n_0 - a = \frac{(n_0 + C_0)\lambda + n_0q}{q - p} \quad (46)$$

<sup>5</sup>なお、反応度  $\rho$  のとりうる最大値はその定義より  $+1$  となる。

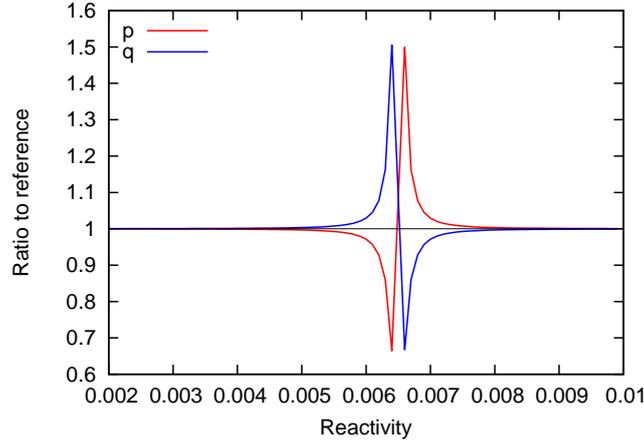


Fig. 2: Accuracy of approximation for  $p$  and  $q$

と書ける。また、 $|q| \gg |p|$  なので、 $q - p \approx q$  と出来るため、式 (46) は次のように書き直せる。

$$b = \frac{-\Lambda\lambda(n_0 + C_0)}{\beta - \rho} + n_0 = \frac{(\beta - \rho - \Lambda\lambda)n_0 - \Lambda\lambda C_0}{\beta - \rho} \approx n_0 - \frac{\Lambda\lambda}{\beta - \rho} C_0 \quad (47)$$

$C_0 = 0$ 、すなわち反応度が入った瞬間に遅発中性子先行核密度がゼロである場合には、 $b > 0$  となり、急速に減衰する項は正の寄与となる。一方、臨界定常状態に反応度が入った場合には、 $C_0 = \frac{\beta}{\Lambda\lambda} n_0$  より、 $b = -\frac{\rho}{\beta - \rho} n_0 < 0$  が得られる。この場合は、急速に減衰する項は負の寄与となる。

#### 4 一点炉動特性方程式の計算例

はじめに、臨界状態に  $\rho = 0.004$  が印加されたときの中性子数および遅発中性子先行核の時間変化を計算した結果を Fig. 3 に示す。なお、 $l = 0.000015[\text{sec}]$ 、 $\lambda = 0.078[\text{/sec}]$ 、 $\beta = 0.0065$  とした。

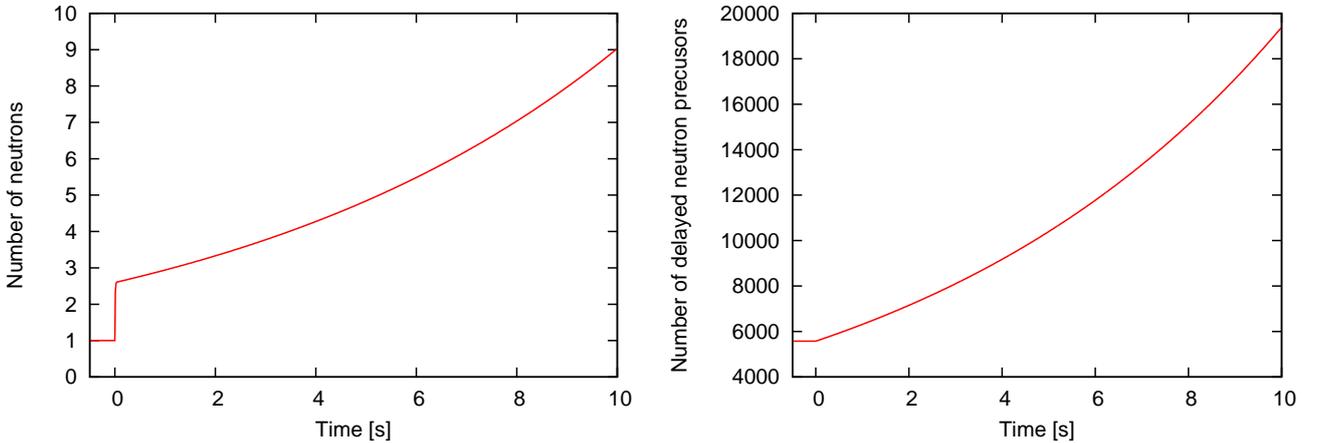


Fig. 3: Time dependence of number of neutrons and precursors ( $\rho = 0.004$ )

図から明らかなように、反応度が挿入された直後に瞬間的な跳躍があり、その後は指数関数的に変化が持続する。 $t = 0$  における中性子密度の時間に対する勾配を求めると、式 (40) の仮定のもとでは

$$\left. \frac{dn}{dt} \right|_{t=0} = ap + qb \approx \frac{\lambda\rho\beta}{(\beta - \rho)^2} + \frac{\rho}{\Lambda} \approx \frac{\rho}{\Lambda} \quad (48)$$

となり、反応度が与えられた瞬間はあたかも核分裂中性子が全部即発中性子であるかのような振る舞いをする<sup>6</sup>。これ

<sup>6</sup>式 (6) に示された即発中性子のみ的一点炉動特性方程式に対して、 $\rho = \frac{k-1}{k}$ 、 $\Lambda = \frac{l}{k}$  を代入して得られる式と同一となるため。

を即発跳躍という<sup>7</sup>。

また、遅発中性子先行核密度には中性子密度で見られた即発跳躍は観察されず、ほぼ単一の指数関数に従って増加していることが分かる。

## 5 即発跳躍の解釈について

ここで、即発跳躍について別な観点から考察を行う。

これまでの議論で、反応度印加後ある程度の時間が経過した場合、 $n$ 、 $C$  の時間変化は同一の指数関数で記述されることが示された。この状態を漸近状態と定義すると、漸近状態では  $C$  と  $n$  の割合  $C/n$  は時間に対して不変となる。漸近状態の  $n$  と  $C$  の時間依存性をそれぞれ  $n = n' \exp(pt)$ 、 $C = C' \exp(pt)$  と記述し、式 (26) に代入すると、以下の関係式を得る。

$$\frac{C'}{n'} = \frac{1}{\lambda} \left( p - \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \right) \quad (49)$$

ここで、 $p$  に対する近似式 (44) を用いると、

$$\frac{C'}{n'} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\rho\lambda}{\beta - \rho} - \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \right) \approx \frac{1}{\lambda\Lambda} (\beta - \rho) \quad (50)$$

と書ける。一方、臨界定常状態の  $C$  と  $n$  の比は  $C_0/n_0 = \frac{\beta}{\Lambda\lambda}$  と与えられるため、 $C'/n' < C_0/n_0$  となる。つまり、正の反応度が印加された系での漸近状態における中性子密度の遅発中性子先行核密度に対する比は、臨界状態よりも大きいということが言える。すなわち、即発跳躍とは、「臨界状態でバランスしていた中性子と遅発中性子先行核が、反応度印加体系の漸近状態におけるバランス状態に遷移するために中性子がステップ状に増加する」現象であるとも言える。従って、例えば、初期状態として  $C_0 = \frac{\beta - \rho}{\Lambda\lambda} n_0$  を仮定して計算した場合には即発跳躍は観察されず単調な指数関数に従うし、 $C_0$  をさらに小さくすると「prompt dip」が観察されることになる。

原子炉動特性に詳しい伴氏は即発跳躍について以下のようにコメントしている [6]。即発跳躍は即発中性子と遅発中性子のバランスが崩れて起きる。即発中性子の非常に短い時定数によって核分裂は見掛け上急激に増加するが、即発臨界未満では即発中性子のみでは連鎖反応を維持できないため、中性子の増加は徐々に減少していく。99%以上は即発中性子なので、この過程は緩慢であるが、即発中性子の寿命が非常に短いため、あたかも急激に即発中性子の反応が減少したように見える。ちなみに、中性子生成時間を長くすると、この即発中性子の減衰過程と遅発中性子先行核の崩壊がバランスするため、即発跳躍の程度は緩和されていく。以上より、即発跳躍は「即発中性子の反応の減衰過程」と考えることが出来る。

実際に即発中性子寿命を大きくした場合の中性子数の時間挙動を Fig. 4 に示すが、伴氏の指摘通り、即発跳躍の程度は即発中性子寿命が大きくなるに従って緩和されていく。

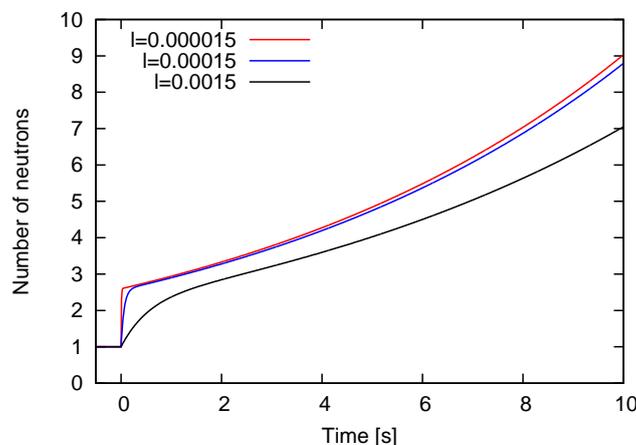


Fig. 4: Time dependence of number of neutrons.  $l$  is changed.

<sup>7</sup>文献 [2] では、以下の記述が続く。「しかし、遅発中性子はこの出力変化についていけないため、変化の速度は急に衰え、最後には遅発中性子の連鎖反応系への寄与に見合った速度で変化するようになる。」

では、なぜ正の反応度が印加された後の漸近状態は、臨界状態と比べて、中性子数の遅発中性子先行核数に対する比が大きくなるのであろうか。動特性方程式 (26) を観察すると、臨界状態での中性子数は、即発中性子のみ連鎖反応による中性子数の減少（即発中性子のみでは未臨界であるため）が、蓄積された遅発中性子先行核から放出される遅発中性子による増加により補填されることで一定を保っていることが分かる。一方、臨界状態の系に対して正の反応度が印加された場合、即発中性子のみ連鎖反応による中性子数の減少幅が小さくなるため、遅発中性子生成量が卓越し、中性子数が増加する。これが即発跳躍に対応する。一方、核分裂により発生する遅発中性子先行核数の割合は非常に小さいため、遅発中性子先行核数は中性子ほど短時間に増加はしない。従って、中性子数がある程度まで増加すると、即発中性子のみ連鎖反応による中性子数の減少の（遅発中性子生成に対する）割合が大きくなるため、中性子数の増加は緩慢となる。

正の反応度印加体系において中性子数の比が大きくなることは、即発跳躍で生じる中性子数と遅発中性子先行核数との「ギャップ」により説明できないだろうか<sup>8</sup>。

即発跳躍とその後の中性子数に時間変化については、以下のような解釈をすることもできるであろう。臨界状態では即発中性子のみでは連鎖反応は持続しない。従って、臨界状態とは、「遅発中性子先行核から放出される遅発中性子を源として発生する即発中性子の総数が時間に対して一定である状態」とも言える。遅発中性子先行核濃度を  $C$  とした場合、毎秒あたりに発生する遅発中性子数は  $\lambda C$  となる。これを源とする即発中性子の和は、系の即発中性子のみ増倍率を  $k_p$  としたとき  $\lambda C / (1 - k_p)$  と書ける。次に、このような臨界状態に対してステップ状に正の反応度が印加され、即発中性子のみ増倍率が  $k'_p$  になった場合を考える。反応度印加直後の遅発中性子先行核の濃度変化は無視できる（その時点までに「溜まった」遅発中性子先行核と比べて、その増加分は無視できる程度である）ことから、即発中性子の和は  $\lambda C / (1 - k'_p)$  と書けるであろう。すなわち、即発中性子の和は「瞬時に」 $(1 - k_p) / (1 - k'_p)$  倍に増加する。これが即発跳躍である。その後、遅発中性子先行核濃度の増加が徐々に「有意に」なっていく。従って、 $\lambda C / (1 - k'_p)$  の分子の項が増加していく。これが即発跳躍後の中性子数の増加に対応するであろう。

文献 [1] にも上記と類似の記述がある (p.67) ので下記に簡単に示す。(遅発)臨界状態の場合、式 (25) より以下が得られる。

$$0 = \frac{\beta k_{\text{eff}}}{l} n - \lambda C = \frac{1 - k_p}{l} n - \lambda C \quad (51)$$

これより、以下の関係式が得られる。

$$n = \frac{l \lambda C}{1 - k_p} \quad (52)$$

文献 [1] の言葉を借りると「遅発臨界状態とは先行核を中性子源としてそこから定常的に供給される中性子が  $k_p$  によって増倍されて一定の中性子レベルになっているものと解釈される」となる。

次に、遅発中性子割合を小さくした ( $\beta = 0.005$ ) 計算を行い、これまでの結果と比較した。計算結果を Fig. 5 に示すが、 $\beta$  が小さくなることによって、即発中性子の割合が大きくなり、漸近状態での中性子の増倍率が大きくなる事が分かる。

最後に、即発臨界前後の反応度を与えた場合の振る舞いについて Fig. 6 に示す。なお、縦軸は対数表示となっている。 $\rho = 0.0065$  で即発臨界となるが、即発臨界前後であっても、反応度挿入後に即発跳躍があり、その後、指数関数的に中性子数が増加していく様子が分かる。ただし、さらに反応度を大きくした場合は、即発跳躍を区別することは困難になっていくであろう。

## 6 逆時間方程式

これまで示されたように、中性子増倍系に反応度が印加された場合、中性子数は、ある時間が経過した後、指数関数に従って増加していく。ここでは、この増加率から、印加された反応度を評価する方法について述べる。

中性子数が  $\exp(\omega t)$  に従って増加するとした場合、 $\omega$  は式 (30) より以下を満足する。

$$(\omega + \lambda)\omega - \frac{\rho - \beta}{\Lambda}(\omega + \lambda) - \lambda \frac{\beta}{\Lambda} = 0 \quad (53)$$

<sup>8</sup>この点についての伴氏のコメントは以下の通りである。「これは反応度が即発中性子のみ式に現れている結果であると考えられる。定常状態の  $n_0/C_0$  に反応度が増えらると、一点炉動特性方程式の即発中性子のみ反応度があるため  $n$  が増加する。そのため、 $n_0/C_0 < n'/C'$  となる。ちなみに、定常状態に遅発中性子先行核が増加したという摂動を考えると、 $n_0/C_0 > n'/C'$  となり、不等号の向きは逆になる。」

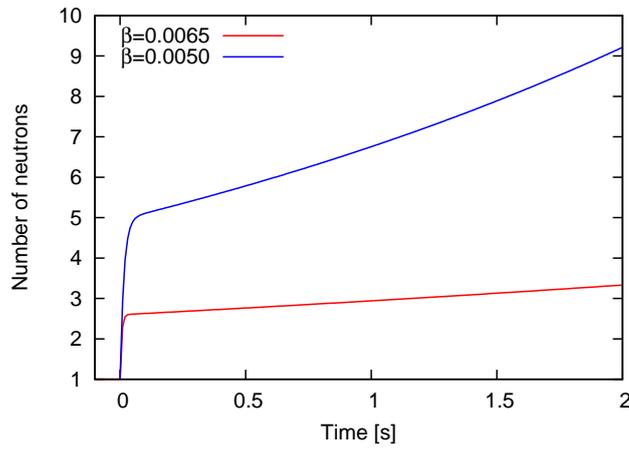


Fig. 5: Time dependence of number of neutrons.  $\beta$  is changed.

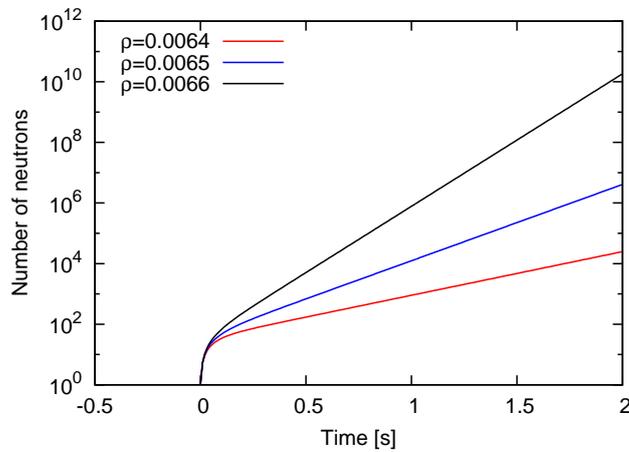


Fig. 6: Time dependence of number of neutrons (near prompt critical)

この式に対し、 $\Lambda = l/k_{\text{eff}} = l(1 - \rho)$  を代入し、変形を施すと、以下の式を得る。

$$\rho = \frac{\omega l}{\omega l + 1} + \frac{\omega}{\omega l + 1} \frac{\beta}{\omega + \lambda} \quad (54)$$

中性子数が  $e$  倍になる時間をペリオド（炉周期）と呼び、これを  $T$  と定義すると、 $T = 1/\omega$  より、

$$\rho = \frac{l}{l + T} + \frac{T}{l + T} \frac{\beta}{1 + T\lambda} \quad (55)$$

が得られる。すなわち、漸近状態になった後、その際の中性子数の変化のペリオドを測ると、逆時間方程式から反応度を得ることが出来る。実際には中性子数が 2 倍になる時間（倍増時間、doubling time） $T_d$  を測定し、 $\exp(T_d/T) = 2$  からペリオドを評価している。

なお、反応度が連続して変わる際には、漸近状態が得られないため、このような方法を適用することが出来ない。どのような状態であっても常に反応度を得られる手段を与えるのが逆動特性法による反応度計である。

## 謝辞

伴雄一郎氏には本メモに対して有益なコメントをいただいた。ここに深い謝意を表する。

## 参考文献

- [1] 伏見康治責任編集、「実験物理学講座 29 原子炉」、第二章、共立出版、(1972).

- [2] 島津洋一郎、「原子炉の動特性方程式、その特徴と数値解析」、第 37 回炉物理夏期セミナーテキスト、(2005).
- [3] 島津洋一郎、「反応度測定手法と実機 PWR への適用」、第 36 回炉物理夏期セミナーテキスト、(2004).
- [4] 辻雅司、「原子炉物理特論 原子炉動特性」、北海道大学工学研究院、(2012).
- [5] 伴雄一郎、「空間依存動特性方程式の統一的解法の開発」、名古屋大学大学院工学研究科、修士論文、(2011).
- [6] 伴雄一郎、私信.