

中性子の減速におけるエネルギー損失の平均値¹

2023/12/31 千葉 豪

本稿を詳細にしたものが「炉物理の研究」の第74号に掲載されている。なお、本稿末尾の「なぜ熱外エネルギー領域の中性子スペクトルが $1/E$ になるか」については、新たに追加したものである。

エネルギー E_0 の中性子が原子核と弾性散乱したあとに、 E から $E + dE$ のエネルギーになる確率 $P(E)dE$ は以下の式で記述される。

$$P(E)dE = \frac{dE}{(1-\alpha)E_0} \quad (1)$$

ここで α は、中性子の質量を m 、衝突した原子核の質量を M とし、 $A = M/m$ としたとき、

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 \quad (2)$$

で定義されるパラメータである。式 (1) の意味するところは、「エネルギー E_0 で弾性散乱した中性子は、エネルギー区間 $[\alpha E_0, E_0]$ のあるエネルギーに等確率でなりうる」という、極めて簡単なものである。

以降では、簡単のため、中性子と軽水素との弾性散乱のみを考えることとする。この場合、 $M = m$ となるため、 $\alpha = 0$ となり、弾性散乱により、中性子は完全にそのエネルギーを失う場合もある、ということになる。

「軽水素との一回の衝突で、中性子は平均的にどの程度エネルギーを失うか」という問いに対して（著者も含めて）多くの人が「半分」と答えるであろう。このように考えると、例えば3回の衝突では $1/2$ の3乗ということで、大体8分の1くらいまでエネルギーが小さくなるということになる。また、1MeVの中性子が1eVに減速されるまでに必要な平均衝突回数は20程度と計算される。

しかしこれは間違いで、本来はもっと少ない回数で減速が行われることになる。

この点についてはどの炉物理の教科書にも詳細に記述してあるが、分かりやすい解説としては文献 [1] のものが挙げられる。この文献の記述を参考にして説明しよう。例えば、 I 回の弾性散乱を行うものとして、 i 回目の散乱で中性子エネルギーが β_i 倍となるとしよう。ここで、 $0 \leq \beta_i \leq 1$ である。さて、 I 回の弾性散乱後の中性子エネルギーは $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_I$ 倍となるわけだが、この散乱一回あたりの平均のエネルギー変化を $\bar{\beta}$ とするならば、 $\bar{\beta}$ は以下の式で決められることになるであろう。

$$\bar{\beta}^I = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_I \quad (3)$$

従って、 $\bar{\beta}$ は

$$\bar{\beta} = \sqrt[I]{\beta_1\beta_2 \cdots \beta_I} \quad (4)$$

と定義される。以上の議論は、平均のエネルギー変化は単純平均ではなく幾何平均で考えるべきである、ということを示している。平均のエネルギー変化を $1/2$ とするのは単純平均であって、これを用いるべきではないということになる。式 (4) の両辺の対数をとることにより、以下の式を得る。

$$\ln \bar{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^I \ln \beta_i}{I} \quad (5)$$

この式は、幾何平均に基づく散乱後の中性子の平均エネルギーとしては、エネルギーの対数についての平均を考えるべきことを示している。つまり、散乱後の平均エネルギー \bar{E} は以下の式で計算されるべきということになる。

$$\ln \bar{E} = \int_0^{E_0} \ln E P(E) dE = \int_0^{E_0} \frac{\ln E}{E_0} dE = \ln E_0 - 1 = \ln \left(\frac{E_0}{e} \right) \quad (6)$$

¹/Document/Fundamental/AveEnergySlowingDown

従って、一回の衝突で中性子エネルギーは平均的に $1/e$ 倍となる、ということが言える。

さて、中性子の軽水素との衝突による減速過程について、もう少し詳細に考えてみよう。

ここでは中性子エネルギーの損失割合を考えるので、簡単のため初期エネルギーを 1 として考えることとする。

はじめに、 i 回の弾性散乱後の中性子エネルギーの確率密度関数 $P_i(E)$ について考えよう。 $i = 1$ については、初期エネルギーを 1 としているので $P_1(E) = 1$ が得られる。また、 $P_2(E)$ については以下のように得られる。

$$P_2(E) = \int_E^1 P_1(E') P_2(E' \rightarrow E) dE' = \int_E^1 \frac{dE'}{E'} = [\ln E']_E^1 = -\ln E \quad (7)$$

なお、 $P_i(E' \rightarrow E)$ は i 回目の弾性散乱においてエネルギー E' の中性子がエネルギー E に減速される確率密度関数を示す。さて、ここで $P_i(E) = \gamma_i (\ln E)^{i-1}$ と書けるとしよう。このとき、

$$\begin{aligned} P_{i+1}(E) &= \int_E^1 P_i(E') P_{i+1}(E' \rightarrow E) dE' = \int_E^1 \gamma_i \frac{(\ln E')^{i-1}}{E'} dE' \\ &= \gamma_i \left[\frac{1}{i} (\ln E')^i \right]_E^1 = -\frac{\gamma_i}{i} (\ln E)^i = -\frac{1}{i} (\ln E) P_i(E) \quad (8) \end{aligned}$$

と書けることから、 $P_i(E)$ は以下のように書けることが分かる。

$$P_i(E) = \prod_{j=1}^{i-1} \left(-\frac{1}{j} \right) (\ln E)^{i-1} \quad (9)$$

では、ここで得られた $P_i(E)$ を用いて、 i 回の散乱後の中性子エネルギーの (単純) 平均値 \bar{E}_i を求めよう。 \bar{E}_i は以下のように記述できる。なお、以降では積分範囲の記述は省略する。

$$\begin{aligned} \bar{E}_i &= \int_E^1 E \prod_{j=1}^{i-1} \left(-\frac{1}{j} \right) (\ln E)^{i-1} dE \\ &= \prod_{j=1}^{i-1} \left(-\frac{1}{j} \right) \left\{ \left[\frac{1}{2} E^2 (\ln E)^{i-1} \right] - \int \frac{1}{2} E^2 (i-1) (\ln E)^{i-2} \frac{1}{E} dE \right\} \\ &= \prod_{j=1}^{i-1} \left(-\frac{1}{j} \right) \left(-\frac{i-1}{2} \int E (\ln E)^{i-2} dE \right) \\ &= \prod_{j=1}^{i-2} \left(-\frac{1}{j} \right) \left(\frac{1}{2} \int E (\ln E)^{i-2} dE \right) = \frac{1}{2} \bar{E}_{i-1} \quad (10) \end{aligned}$$

\bar{E}_1 は明らかに $1/2$ であるので、

$$\bar{E}_i = \left(\frac{1}{2} \right)^i \quad (11)$$

が得られる。

次に、 I 回の散乱後の中性子エネルギーから、各回のエネルギーの変化割合 $\Delta \bar{E}_I$ を求めよう。エネルギー 1 の中性子が散乱後にエネルギー E になったので、散乱 1 回あたりにエネルギーが $E^{1/I}$ 倍になっていると考えればよい。 $\Delta \bar{E}_I$ は以下で定義される。

$$\Delta \bar{E}_I = \int (E)^{1/I} P_I(E) dE \quad (12)$$

この式を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{E}_I &= \int E^{1/I} \prod_{j=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{j}\right) (\ln E)^{I-1} dE = \prod_{j=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{j}\right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-1} dE \\
&= \prod_{j=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{j}\right) \left\{ \left[\frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (\ln E)^{I-1} \right] - \int \frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (I-1) (\ln E)^{I-2} \frac{1}{E} dE \right\} \\
&= \prod_{j=1}^{I-1} \left(-\frac{1}{j}\right) \left(-\frac{I}{I+1} (I-1)\right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-2} dE \\
&= \prod_{j=1}^{I-2} \left(-\frac{1}{j}\right) \left(\frac{I}{I+1}\right) \int E^{1/I} (\ln E)^{I-2} dE \tag{13}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\int E^{1/I} (\ln E)^j dE &= \left[\frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} (\ln E)^j \right] - \int \frac{I}{I+1} E^{(I+1)/I} j (\ln E)^{j-1} \frac{1}{E} dE \\
&= -\frac{I}{I+1} \cdot j \int E^{1/I} (\ln E)^{j-1} dE \tag{14}
\end{aligned}$$

となることから、

$$\Delta \bar{E}_I = \left(\frac{I}{I+1}\right)^I \tag{15}$$

が得られる。

そして、 $I \rightarrow \infty$ の極限をとった場合には以下となる。

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \Delta \bar{E}_I = \lim_{I \rightarrow \infty} \left(\frac{I}{I+1}\right)^I = \lim_{I \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+1/I}\right)^I = \frac{1}{\lim_{I \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{I}\right)^I} = \frac{1}{e} \tag{16}$$

つまり、衝突回数が大きくなった場合には、中性子と軽水素との1回の弾性散乱において、平均的にエネルギーが $1/e$ 倍となることが分かる。Fig. 1 に、中性子が軽水素と有限回数弾性散乱したときの、散乱1回あたりに失われる中性子エネルギー相対値の平均を示す。1回だけの衝突では平均は当然 0.5 となるが、回数が大きくなるにつれて $1/e$ に漸近していく様子が分かる。

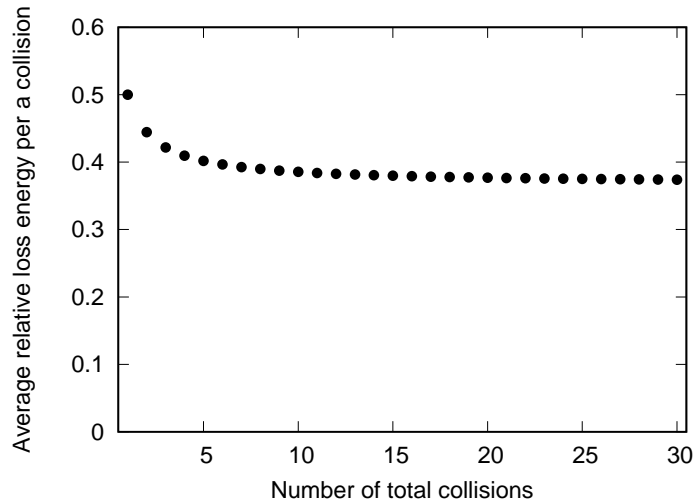


Fig. 1: Average loss energy of neutron per one elastic scattering with hydrogen-1

以上では、軽水素との弾性散乱を考えたが、質量数が2以上の原子核との散乱の場合、 i 回の弾性散乱後の中性子エネルギーの確率密度分布 $P_i(E)$ はどう計算されるだろうか？

この場合、 E' から E に散乱される確率密度関数 $P(E' \rightarrow E)$ は

$$P(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)E'} & (\alpha < E < 1) \\ 0 & (0 < E < \alpha) \end{cases} \quad (17)$$

と与えられる。このように、確率密度数がエネルギーの範囲に応じて変わることが $P_i(E)$ の導出を困難にする。

以下では、中性子の初期エネルギーを 1 として、 $P_i(E)$ について考える。

$P_1(E)$ については以下のように与えられる。

$$P_1(E) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)} & (\alpha < E < 1) \\ 0 & (0 < E < \alpha) \end{cases} \quad (18)$$

$P_2(E)dE$ は以下のように書ける。

$$P_2(E)dE = \int_E^1 P_1(E')dE' P_2(E' \rightarrow E)dE = \int_E^1 P_1(E')dE' \frac{dE}{(1-\alpha)E'} = \frac{dE}{1-\alpha} \int_E^1 \frac{P_1(E')}{E'} dE' \quad (19)$$

$P_1(E)$ が式 (18) に示されているようにエネルギー領域によって異なることから、この積分は場合分けで計算する必要がある。 $\alpha < E < 1$ であれば、積分区間で $P_1(E)$ は同一の式となるので、

$$P_2(E)dE = \frac{dE}{1-\alpha} \int_E^1 \frac{P_1(E')}{E'} dE' = \frac{dE}{1-\alpha} \int_E^1 \frac{1}{(1-\alpha)E'} dE' = -\frac{dE}{(1-\alpha)^2} \ln E \quad (20)$$

となる。一方、 $\alpha^2 < E < \alpha$ であれば、

$$P_2(E)dE = \frac{dE}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \frac{1}{(1-\alpha)E'} dE' = -\frac{dE}{(1-\alpha)^2} \ln \alpha \quad (21)$$

となる。以上を整理すると、 $P_2(E)$ は以下のように書ける。

$$P_2(E) = \begin{cases} \frac{-1}{(1-\alpha)^2} \ln E & (\alpha < E < 1) \\ \frac{-1}{(1-\alpha)^2} \ln \alpha & (\alpha^2 < E < \alpha) \\ 0 & (0 < E < \alpha^2) \end{cases} \quad (22)$$

この例のように、 i が大きくなるに従い、 $P_i(E)$ の定義範囲の数は大きくなるのが考えられ、 $P_i(E)$ を導出することは容易ではないことが想像される。

なお、中性子の減速に関しては、1983 年、斎藤慶一氏が日本原子力学会誌の「私のノートから」の欄に「中性子減速の数学モデル」と題したメモを寄稿している [2]。このメモでは、中性子と軽水素との弾性散乱反応に関して、レサジー u における衝突回数 n_u の確率分布と n 回の衝突後のレサジー u_n の確率密度関数を考え、両者の平均がそれぞれ

$$\langle n_u \rangle = u, \quad (23)$$

$$\langle u_n \rangle = n, \quad (24)$$

と与えられる一方、エネルギー E における衝突回数 n_E の確率分布と n 回の衝突後のエネルギー E_n の確率密度関数の平均はそれぞれ

$$\langle n_E \rangle = \ln(E_0/E), \quad (25)$$

$$\langle E_n \rangle = E_0/2^n, \quad (26)$$

と与えられるため、 $\langle u_n \rangle \neq \ln(E_0/\langle E_n \rangle)$ となり、「衝突ごとに平均エネルギーは何倍になるか、という設問（説明）にあいまいさが生じ、1/2 か 1/e かということになる」という記述があり、古くから議論されている内容であることが分かる。また、文献 [3] も同様の内容に関するものである（が、筆者はまだ読解できていない）。

i 回の軽水素との弾性散乱後の中性子エネルギーの確率密度関数 $P_i(E)$ についての式 (9) は以下のように書き直せる。

$$P_i(E) = \frac{1}{(i-1)!} (-\ln E)^{i-1} \quad (27)$$

これを、基準エネルギーを 1 として定義したレサジー $u = -\ln E$ で変換すると、 $-P_i(u)du = P_i(E)dE$ より以下が得られる。

$$P_i(u) = \frac{1}{(i-1)!} e^{-u} u^{i-1} \quad (28)$$

減速過程に入る中性子（エネルギーが 1 の中性子）が定常的に体系に与えられるものとし、1 回の弾性散乱反応に要する時間を一定とするならば、軽水素による定常的な減速過程での中性子のレサジー分布は $P_i(u)$ を全ての i について総和をとったものと考えることが出来るので、以下が得られる。

$$\sum_{i=1} P_i(u) = \sum_{i=1} \frac{1}{(i-1)!} e^{-u} u^{i-1} = e^{-u} \sum_{i=1} \frac{1}{(i-1)!} u^{i-1} = e^{-u} e^u = 1 \quad (29)$$

このことは、軽水素による減速過程での中性子のレサジー分布が一定となること（すなわちエネルギー分布が $1/E$ となること）を示している。

本件に関して、有益なメモを作成してくれた平成 29 年度「原子炉物理」受講者である稲垣慶修君に深く感謝します。

参考文献

- [1] 原澤進、「基礎原子力講座 4、原子炉入門」、コロナ社
- [2] 斎藤慶一、「中性子減速の数学モデル」、日本原子力学会誌、**25**[10], p. 808-809 (1983).
- [3] E.R. Cohen, 'How many collisions to slow down a neutron?' *Nucl. Sci. Eng.*, **89**, p. 99-108 (1985).