

1 バイアス因子法

設計している原子炉の核的なパラメータ（例えば実効増倍率）は核設計コードで計算出来るが、その計算値には不確かさが存在するため、その値が真値となることはまず無いであろう。例えば、計算で実効増倍率として1.0が得られた原子炉であっても、実際に作ってみてぴったり臨界状態となることはまずあり得ない。

では、事前に原子炉を作り、その原子炉の実効増倍率を実験的に得たとする。このとき、計算で予測された値を C_M とし、実験的に得られた値を E_M とする。

これと全く同じ原子炉を設計するとき、その炉の実効増倍率はいくつと予測できるであろうか？この場合は E_M と即答するであろう（実際に測られているわけだから）。

次に、事前に作った原子炉とほんのちょっとだけ異なる原子炉を設計することを考えよう。実効増倍率の計算値として C_R が得られたとすると、実効増倍率の真値をどのように予測するだろうか？勿論、 E_M と答えてもよいだろうが、事前に作った原子炉と「ほんのちょっと変わっている」ことを考慮すると、例えば、

$$E_M \cdot \frac{C_R}{C_M} \quad (1)$$

のようにして、「ちょっと変わった効果」を計算値を用いて補正の形で採り入れるのではないだろうか。もしくは

$$C_R \cdot \frac{E_M}{C_M} \quad (2)$$

として、設計している原子炉についての計算値と実測値のずれを、実際に作った原子炉のデータを用いて補正する、という考え方もあるだろう。ちなみに、式(1)と式(2)は同一である。

式(2)のように、ある対象についての計算による予測値を、それとは異なるが類似といえる対象における予測値と実測値のずれで補正し、予測の精度を高める方法をバイアス因子法と呼ぶ²。また、目的となる対象に対して、それを模擬した体系をモックアップと呼ぶ。

では、バイアス因子法による予測値 $P = C_R \cdot E_M / C_M$ の不確かさはどの程度となるであろうか？

パラメータ C_R 、 E_M 、 C_M は平均値 \bar{C}_R 、 \bar{E}_M 、 \bar{C}_M を中心として不確かな幅をもつ確率変数と考えることが出来る。予測値 P の平均値が $\bar{P} = \bar{C}_R \cdot \bar{E}_M / \bar{C}_M$ と書けるとしたとき、 P の平均値からのずれ ΔP は、各々のパラメータの平均値からのずれを用いて以下のように書ける。

$$\Delta P = P - \bar{P} = \frac{C_R E_M}{C_M} - \frac{\bar{C}_R \bar{E}_M}{\bar{C}_M} = \frac{(\bar{C}_R + \Delta C_R)(\bar{E}_M + \Delta E_M)}{\bar{C}_M + \Delta C_M} - \frac{\bar{C}_R \bar{E}_M}{\bar{C}_M} \quad (3)$$

これに対して

$$\frac{1}{\bar{C}_M + \Delta C_M} = \frac{1}{\bar{C}_M \left(1 + \frac{\Delta C_M}{\bar{C}_M}\right)} \approx \frac{1}{\bar{C}_M} \left(1 - \frac{\Delta C_M}{\bar{C}_M}\right) \quad (4)$$

とし、さらに高次の項を無視することにより、以下の式を得ることが出来る。

$$\frac{\Delta P}{\bar{P}} = \frac{\Delta C_R}{\bar{C}_R} + \frac{\Delta E_M}{\bar{E}_M} - \frac{\Delta C_M}{\bar{C}_M} \quad (5)$$

この式の両辺を2乗し、その期待値をとると、 P に対する分散の式として以下が得られる³。

$$V_P = V_{C_R} + V_{E_M} + V_{C_M} + 2(\text{cov}(C_R, E_M) - \text{cov}(C_R, C_M) - \text{cov}(E_M, C_M)) \quad (6)$$

測定値 E_M と計算値 C_M 、 C_R の不確かさには関連がなく無相関と考えてよいので、この式は以下のように簡略化される。

$$V_P = V_{C_R} + V_{E_M} + V_{C_M} - 2\text{cov}(C_R, C_M) \quad (7)$$

¹/Document/Education/BiasFactor

²英語のテキストでは、「bias factor method」「bias-factor transposition method」と呼ばれているようである。

³ここで定義される分散 V 、共分散 cov はいずれも相対値である。

ここで V_{C_R} はバイアス因子法を導入しなかったときの予測値の分散である。バイアス因子法を導入することによって、この分散にモックアップ体系の誤差に相当する V_{E_M} 、 V_{C_M} が加えられるが、 $\text{cov}(C_R, C_M)$ が正の大きい値をとれば (C_R と C_M に強い正の相関があれば)、 P の不確かさを低減できる可能性があることが分かる。通常、モックアップパラメータは目的のパラメータと類似となるものが選ばれるため、 C_R と C_M は強い正の相関を持つことになり、モックアップパラメータの実験に由来する誤差 (すなわち V_{E_M}) がある程度の大きさに抑えられていれば、バイアス因子法では予測値の不確かさが低減される。

次に $\text{cov}(C_R, C_M)$ について考える。

C_R 、 C_M といった、計算により得られるパラメータの不確かさには、数値計算に起因する不確かさと、核データに起因する不確かさが含まれる。前者に起因する不確かさによる C の平均値からのずれを ΔC^n 、核データ σ_i の平均値からのずれを $\Delta\sigma_i$ と書くと、 ΔC_R 、 ΔC_M は以下のように書ける。

$$\Delta C_R = \sum_i S_i^R \Delta\sigma_i + \Delta C_R^n, \quad (8)$$

$$\Delta C_M = \sum_i S_i^M \Delta\sigma_i + \Delta C_M^n \quad (9)$$

この二式の両辺を乗じ、その期待値をとることにより、 $\text{cov}(C_R, C_M)$ が得られる。一般に、核データの不確かさと数値計算に起因する不確かさは無関係と考えてよいので、 $\text{cov}(C_R, C_M)$ として以下の式が得られる。

$$\text{cov}(C_R, C_M) = \sum_i \sum_j S_i^R S_j^M \text{cov}(\sigma_i, \sigma_j) + \text{cov}(C_R^n, C_M^n) = \text{cov}(C_R^\sigma, C_M^\sigma) + \text{cov}(C_R^n, C_M^n) \quad (10)$$

ここで、 $\text{cov}(C_R^\sigma, C_M^\sigma)$ は核データの不確かさに起因する C_R と C_M の共分散であることを示す。

また、

$$V_{C_R} = \sum_i \sum_j S_i^R S_j^R \text{cov}(\sigma_i, \sigma_j) + V_{C_R^n} = V_{C_R^\sigma} + V_{C_R^n}, \quad (11)$$

$$V_{C_M} = \sum_i \sum_j S_i^M S_j^M \text{cov}(\sigma_i, \sigma_j) + V_{C_M^n} = V_{C_M^\sigma} + V_{C_M^n} \quad (12)$$

と書ける。

以上を用いると、 V_P は以下のように書ける。

$$V_P = (V_{C_R^\sigma} + V_{C_M^\sigma} - 2\text{cov}(C_R^\sigma, C_M^\sigma)) + (V_{C_R^n} + V_{C_M^n} - 2\text{cov}(C_R^n, C_M^n)) + V_{E_M} \quad (13)$$

右辺の (括弧で括られている) 第一項は核データに起因する不確かさの寄与を示す項であるが、相関係数 corr を用いることにより、

$$(V_{C_R^\sigma} + V_{C_M^\sigma} - 2\text{corr}(C_R^\sigma, C_M^\sigma)\sqrt{V_{C_R^\sigma}V_{C_M^\sigma}}) \quad (14)$$

と書ける。この C_R^σ と C_M^σ の相関係数を代表性因子 (Representativity factor) と呼称する場合もある [2]⁴。なお、 C_R^σ と C_M^σ の相関係数が 1.0 の場合、式 (14) は以下のように書ける。

$$(\sqrt{V_{C_R^\sigma}} - \sqrt{V_{C_M^\sigma}})^2 \quad (16)$$

この式から、例えターゲットパラメータとモックアップパラメータの核データに起因する不確かさの相関が 1.0 であったとしても、両者の相対分散に差異があれば、この節で説明したバイアス因子法では、ターゲットパラメータの核データに起因する不確かさをゼロには出来ないことが分かる。

⁴文献 [2] では、Representativity factor を r と定義すると、モックアップ実験の結果を考慮した場合の積分パラメータの不確かさ ΔR_1^2 は、考慮しない場合の不確かさ ΔR_0^2 を用いて、

$$\Delta R_1^2 = \Delta R_0^2(1 - r^2) \quad (15)$$

と書けるとされている。これと本節で述べているバイアス因子法から導かれる不確かさは同一の式とはなっていないが、これについては後の第 3 節で述べる。

2 拡張バイアス因子法

通常のバイアス因子法では単一のモックアップ体系のデータを利用するが、複数の体系のデータを利用することで、パラメータ予測値の不確かさをさらに低減することが可能となる。そのような手法として、拡張バイアス因子法 [3] があるので、それについて解説を行う。

バイアス補正の肝は、パラメータの核データに対する感度がターゲットのものにできるだけ似たモックアップデータを準備することにある。拡張バイアス因子法では、複数のモックアップデータの感度を重ね合わせることで、ターゲットとなるパラメータの感度を再現することを試みる。

複数のモックアップパラメータを p_i とし、仮想的なパラメータ p を

$$p = \prod_i p_i^{a_i} \quad (17)$$

のように定義する。 p の p_i に対する偏微分は

$$\frac{\partial p}{\partial p_i} = a_i p_i^{a_i-1} \prod_{j \neq i} p_j^{a_j} = \frac{a_i}{p_i} p_i^{a_i} \prod_{j \neq i} p_j^{a_j} = \frac{a_i}{p_i} p \quad (18)$$

と書けるので、

$$\frac{\partial p}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{p} = a_i \quad (19)$$

が得られる。従って、 p の核データ σ に対する感度係数 S_σ^p は

$$S_\sigma^p = \frac{\partial p}{\partial \sigma} \cdot \frac{\sigma}{p} = \sum_i \frac{\partial p}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{p} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \sigma} \cdot \frac{\sigma}{p_i} = \sum_i a_i S_\sigma^{p_i} \quad (20)$$

と書ける。つまり、式 (17) で定義される仮想的なパラメータ p の感度は、複数のモックアップデータの感度の線形和で記述されることが分かる。

次に、仮想的なパラメータ p に対するバイアス因子を用いた場合の予測値の不確かさについて議論する。問題を簡略化するため、ここでは核データ以外に起因する不確かさを無視することとする。パラメータ p の計算値に対する分散 V_p は以下のように書ける。

$$V_p = \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial p}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{p} \right) \text{cov}(p_i, p_j) = \sum_i \sum_j a_i a_j \text{cov}(p_i, p_j) = \sum_i \sum_j a_i a_j \mathbf{S}_i^T \mathbf{V} \mathbf{S}_j \quad (21)$$

ここで、 \mathbf{V} は核データの共分散行列、 \mathbf{S} は感度ベクトルを示すものとする。また、予測するターゲットとなるパラメータを p_R とすると、この計算値に対する分散は

$$V_{p_R} = \mathbf{S}_R^T \mathbf{V} \mathbf{S}_R \quad (22)$$

と書ける。ここで、 \mathbf{S}_R はターゲットパラメータの核データに対する感度を示す。さらに、 p と p_R の計算値の共分散は

$$\text{cov}(p, p_R) = \sum_i a_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{V} \mathbf{S}_R \quad (23)$$

と書ける。以上より、仮想パラメータ p に対して与えられるバイアス因子を用いた場合の p_R の予測値 \tilde{p}_R に対する不確かさ $V_{\tilde{p}_R}$ は

$$\begin{aligned} V_{\tilde{p}_R} &= V_p + V_{p_R} - 2\text{cov}(p, p_R) = \sum_i \sum_j a_i a_j \mathbf{S}_i^T \mathbf{V} \mathbf{S}_j + \mathbf{S}_R^T \mathbf{V} \mathbf{S}_R - 2 \sum_i a_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{V} \mathbf{S}_R \\ &= \left(\mathbf{S}_R - \sum_i a_i \mathbf{S}_i \right)^T \mathbf{V} \left(\mathbf{S}_R - \sum_i a_i \mathbf{S}_i \right) \end{aligned} \quad (24)$$

と書ける。

仮想パラメータ p における指数 a_i は、 $V_{\tilde{p}_R}$ を最小にする条件 $\frac{\partial V_{\tilde{p}_R}}{\partial a_i} = 0$ から求められる。すなわち、

$$\sum_j a_j \mathbf{S}_i^T \mathbf{V} \mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i^T \mathbf{V} \mathbf{S}_R = 0, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (25)$$

を解くことによって得られる。ここで、 N はモックアップパラメータの数を示す。 $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T$ 、 $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1 \ \mathbf{S}_2 \ \dots \ \mathbf{S}_N)$ とするならば、式 (25) は以下のように書き直せる。

$$\mathbf{S}^T \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{S}^T \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{R} \quad (26)$$

従って、 a_i からなるベクトル \mathbf{A} は以下で定義される⁵。

$$\mathbf{A} = (\mathbf{S}^T \mathbf{V} \mathbf{S})^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{R}) \quad (27)$$

3 ベイズ理論からのバイアス因子法の導出

以上では、単一のモックアップパラメータを用いたバイアス因子法と複数のパラメータを用いた一般化バイアス因子法について説明してきたが、これらについては、感度係数を用いずに、炉物理パラメータに対するベイズ理論から導出出来ることが示されており [4]、現在はこのような考え方が一般的のようである [5]。ここではこの導出法について簡単に述べることにする。

複数の炉物理パラメータを考え、これをベクトルで \mathbf{R} と表記する。このとき、 \mathbf{R} が従う確率密度関数 $p(\mathbf{R})$ を以下のように記述する。

$$p(\mathbf{R}) \propto \exp\left(-\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)^T \mathbf{V}_R^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)}{2}\right) \quad (28)$$

ここで、 \mathbf{V}_R は \mathbf{R} の事前共分散行列を示す。

一方、 \mathbf{R} が得られたとしたときに、その測定値 $\hat{\mathbf{R}}$ が従う確率密度関数 $p(\hat{\mathbf{R}}|\mathbf{R})$ は以下のように書ける。

$$p(\hat{\mathbf{R}}|\mathbf{R}) \propto \exp\left(-\frac{(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R})^T \mathbf{V}_E^{-1} (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R})}{2}\right) \quad (29)$$

ここで、 \mathbf{V}_E は測定に起因する $\hat{\mathbf{R}}$ の共分散行列を示す。

なお、ここでは、 \mathbf{V}_R や \mathbf{V}_E は絶対共分散であることを付記しておく。

ベイズの定理より、炉物理パラメータの測定値 $\hat{\mathbf{R}}$ が得られたときの \mathbf{R} が従う確率密度関数 $p(\mathbf{R}|\hat{\mathbf{R}})$ は以下のように書ける。

$$p(\mathbf{R}|\hat{\mathbf{R}}) \propto p(\mathbf{R})p(\hat{\mathbf{R}}|\mathbf{R}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left((\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)^T \mathbf{V}_R^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) + (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R})^T \mathbf{V}_E^{-1} (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R})\right)\right\} \quad (30)$$

詳細は拙稿 [6] に譲るが、 $p(\mathbf{R}|\hat{\mathbf{R}})$ の最頻値 $\tilde{\mathbf{R}}$ は

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_R (\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_E)^{-1} (\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_0) \quad (31)$$

となり、分散 $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{R}}}$ は

$$\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{R}}} = \mathbf{V}_R - \mathbf{V}_R (\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_E)^{-1} \mathbf{V}_R \quad (32)$$

となる。例えば、測定値が誤差無く得られた（真値が得られた）とするならば、 $\mathbf{V}_E = 0$ より、 $\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}$ 、 $\mathbf{V}_{\tilde{\mathbf{R}}} = 0$ となる。

さて、ここで、考えている炉物理パラメータをモックアップ（測定値が得られるもの）とターゲット（モックアップの情報を用いて予測を行うもの）の2種類に分類するものとし、それぞれを \mathbf{R}^m 、 \mathbf{R}^t と記述する。このとき、式 (31) は以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}^m \\ \tilde{\mathbf{R}}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0^m \\ \mathbf{R}_0^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R^{mm} & \mathbf{V}_R^{mt} \\ \mathbf{V}_R^{tm} & \mathbf{V}_R^{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{mm} & \mathbf{Q}^{tm} \\ \mathbf{Q}^{mt} & \mathbf{Q}^{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}^m - \mathbf{R}_0^m \\ \hat{\mathbf{R}}^t - \mathbf{R}_0^t \end{pmatrix} \quad (33)$$

ここで、 $\mathbf{Q} = (\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_E)^{-1}$ であり、 \mathbf{Q}^{**} の上添字は便宜的に付したものである。測定値が得られていないターゲットとなるパラメータについては、その測定値の分散を無限大と考えればよい [5]。すると、 $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_E$ に関して、モックアップのデータとターゲットのデータ間の相関はゼロとみなすことが出来る。従って、 \mathbf{Q}^{tm} 、 \mathbf{Q}^{mt} 、 \mathbf{Q}^{tt}

⁵文献 [8] には、拡張バイアス因子法と拡張炉定数調整法との等価性が論じられており、それについては後述する。なお、文献 [8] では重み a_i で構成されるベクトルは列ベクトルとして定義されており、 $\mathbf{A}^T = (\mathbf{S}_R^T \mathbf{V} \mathbf{S}) (\mathbf{S}^T \mathbf{V} \mathbf{S})^{-1}$ として扱われていることに留意するとよい。

はいずれもゼロとなり、 \mathbf{Q}^{mm} はモックアップに関する $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_E$ の逆行列となる。以上より、 $\tilde{\mathbf{R}}^t$ および $\mathbf{V}_{\tilde{R}^t}$ として以下が得られる。

$$\tilde{\mathbf{R}}^t = \mathbf{R}_0^t + \mathbf{V}_R^{mt} \mathbf{Q}^{mm} (\hat{\mathbf{R}}^m - \mathbf{R}_0^m), \quad (34)$$

$$\mathbf{V}_{\tilde{R}^t} = \mathbf{V}_{R_0^t} + \mathbf{V}_R^{mt} \mathbf{Q}^{mm} \mathbf{V}_R^{tm}. \quad (35)$$

なお、これらの式からターゲットパラメータの測定値に相当する $\hat{\mathbf{R}}^t$ は結果に影響していないことが確認できる。また、個々のターゲットパラメータに関する情報は別のターゲットパラメータの予測値 $\tilde{\mathbf{R}}^t$ に影響することは無い（すなわち、どのようなターゲットパラメータのセットを考慮したとしても、個々のターゲットパラメータの予測値は変わらない）ことも、ここで指摘しておく。

これらの式は論文 [4] の式 (1) および (2) にそれぞれ対応する。ターゲットパラメータがモックアップパラメータの測定値の情報を反映することによって \mathbf{R}_0^t から $\tilde{\mathbf{R}}^t$ になったことから、この比がバイアス因子に対応することになる。従って、対角成分が $R_{0,i}^t$ の逆数である対角行列を式 (34) に左から作用させたものがバイアス因子となる [4] ⁶。

文献 [4] では、このバイアス因子を用いて得られる予測値 $\tilde{\mathbf{R}}^t$ は、横山らにより提案された拡張炉定数調整法 [8] を用いて得られる予測値と同一となることが示されている（p.1496 の左欄）。また、拡張炉定数調整法の原著論文 [8] によると、単一のターゲットパラメータを考えた場合の拡張炉定数調整法は、拡張バイアス因子法とターゲットパラメータの予測値が同一となるとされている（p.1170 の右欄）⁷。これらより、単一のターゲットパラメータを考えた場合の予測値 $\tilde{\mathbf{R}}^R$ は、本節で述べたバイアス因子法、拡張炉定数調整法、拡張バイアス因子法とで、いずれも同一となることになる。ただし、拡張炉定数調整法と拡張バイアス因子法の等価性に関しては、文献 [8] において以下の近似が導入されていることに注意が必要である（p.1170 の左欄）。

$$a^x \approx 1 + (\ln a) x, \quad (36)$$

$$\ln x \approx x - 1, \quad (37)$$

$$\prod_i (1 + x_i) \approx 1 + \sum_i x_i \quad (38)$$

なお、これらの仮定は、モックアップパラメータの C/E 値が 1.0 に近いと仮定することに対応している。以上をまとめると、単一のターゲットパラメータを考えた場合には、本節で述べたバイアス因子法と拡張炉定数調整法とは厳密に同一の予測値を与えるが、拡張バイアス因子法については、拡張炉定数調整法に対していくつかの近似が導入されていることから、厳密に同一の予測値を与える保証はないと言える。

なお、本節で述べたバイアス因子法は、第 1 節で示した通常のバイアス因子法とは異なることに注意が必要である。その例として、本節で示したバイアス因子法により単一のターゲットパラメータかつ単一のモックアップパラメータを扱う場合を考えよう。このとき、本節で示したバイアス因子法では、ターゲットパラメータのバイアス因子補正後の予測値は以下のように書ける（表記は第 1 節のものを用いる）。

$$C'_R = C_R + \sqrt{V_M} \sqrt{V_R} \text{Corr}(R, M) (V_M)^{-1} (E_M - C_M) = C_R + \sqrt{V_R/V_M} \text{Corr}(R, M) (E_M - C_M) \quad (39)$$

ここで、 V_R 、 V_M は絶対分散であることに注意し、以下のように変形を施す。

$$\frac{C'_R - C_R}{C_R} = \sqrt{\frac{V_R/C_R}{V_M/C_M}} \text{Corr}(R, M) \frac{E_M - C_M}{C_M} \quad (40)$$

これより、本節で述べたバイアス因子法は、通常のバイアス因子法のように計算値と実験値の「比」で考えるのではなく、それらについての「相対差」で考えていることが分かる。また、ターゲットとモックアップの相関の大きさが考慮されているという点でも通常のバイアス因子法と異なる。このバイアス因子法を用いた場合、バイアス

⁶このような考え方は文献 [7] の「data adjustment transposition method」に対応するものと考えてよいであろう。

⁷なお、ここでの「単一の」ターゲットパラメータを考えた場合、についてであるが、このような前提を立てるのは、拡張バイアス因子法で扱うターゲットパラメータが 1 つに限定されているからである。すでに述べたように、ここで議論しているバイアス因子法及び拡張炉定数調整法では、考慮するターゲットパラメータのセットは個々のターゲットパラメータの予測値に影響を与えないため、基本的には「単一」とする前提は不要であると考えられる。

補正前後の核データに起因する不確かさの関係は代表性因子 r を用いて以下の式で記述することが出来る（第1節脚注の式の再掲）。

$$\Delta R_1^2 = \Delta R_0^2(1 - r^2) \quad (41)$$

つまり、この式は、第1節で述べた通常のバイアス因子法ではなく、本節で述べたバイアス因子法において適用可能であったということが言えよう。

なお、ここで示したバイアス因子法の式は、1988年発行のテキスト「Uncertainty analysis」において Gandini が「Data adjustment transposition method」(DATM)として解説しているものと本質的に同一である（文献中の p.244 における式(146)と式(148)）[7]⁸。また、代表性因子と不確かさの低減幅との関係についても同文献に詳しく言及されている（p.245 から p.247）。そこでは、DATM において、ターゲットパラメータとモックアップパラメータをそれぞれ1つに限定し、かつそれらの相関が強く、相対誤差が同程度であるといった前提条件を導入することにより、通常のバイアス因子法相当の式が得られる、という説明が行われている。

4 核データそのものをターゲットとしたときのバイアス因子

本節では、ターゲットパラメータを核データそのものとしたときにバイアス因子がどのような値をとるか考えよう。なお、ここでのバイアス因子法は第3節で述べたものとする。

このとき、式(34)における \mathbf{V}_R^{mt} は、着目する核データ σ_i とモックアップパラメータセットの共分散となる。 σ_i とモックアップパラメータ R_j の共分散は、各々の平均値を $\bar{\sigma}_i$ 、 \bar{R}_j としたとき、 $(\sigma_i - \bar{\sigma}_i)(R_j - \bar{R}_j)$ の期待値に対応する。 $R_j - \bar{R}_j$ は感度係数 $\frac{\partial R_j}{\partial \sigma_k}$ を用いて

$$R_j - \bar{R}_j = \sum_k \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_k} (\sigma_k - \bar{\sigma}_k) \quad (42)$$

と書けるので、

$$(\sigma_i - \bar{\sigma}_i)(R_j - \bar{R}_j) = (\sigma_i - \bar{\sigma}_i) \sum_k \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_k} (\sigma_k - \bar{\sigma}_k) = \sum_k \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_k} (\sigma_i - \bar{\sigma}_i)(\sigma_k - \bar{\sigma}_k) \quad (43)$$

より、核データの共分散行列 \mathbf{V}_σ と感度係数行列 \mathbf{G} を用いて

$$\mathbf{V}_R^{mt} = (\mathbf{V}_\sigma \mathbf{G})_{i*} \quad (44)$$

と書ける。従って、モックアップパラメータの情報を反映させたあとの核データ $\tilde{\sigma}_i$ は

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma_{i,0} + (\mathbf{V}_\sigma \mathbf{G})_{i*} \mathbf{Q}^{mm} (\hat{\mathbf{R}}^m - \mathbf{R}_0^m) \quad (45)$$

となる。

この式は通常の核データ調整法における調整後核データの式と同一である。従って、核データそのものをターゲットとしたときのバイアス因子補正後の核データは、炉定数調整法における調整後核データと同一となる、ということが言えることになる。

これまでの議論から、DATM（第3節で述べたバイアス因子法を言い換えてこのように記述する）では、ターゲットパラメータセットの選択は、個々のターゲットパラメータの予測値に影響を与えないことが分かっている。従って、上記のように、核データそのものをターゲットとしたときの DATM の結果として、通常の炉定数調整法における調整後核データと同一のものが得られるとするならば、DATM を用いて積分データの情報を核データにフィードバックすることと通常の炉定数調整法を用いることは本質的に同一と考えることが出来る。これまでの議論から、DATM は基本的には拡張炉定数調整法と等価であることが示されているので、拡張炉定数調整法（すなわち DATM）と通常の炉定数調整法との違いは、計算手法に起因する不確かさにおけるターゲットとモックアップの相関を考慮するか否かにあると言えよう。DATM では、計算手法に起因する不確かさはターゲットパラメー

⁸文献 [7] の p.244 における式(146)、(148)には、計算手法に起因する不確かさが考慮されていないが、それについては同文献の p.239 に独立に記載されている。そこでは、計算手法に起因する不確かさ、バイアスを、核データと同様に新たな調整すべきパラメータとして扱うことが述べられており、そのような取り扱いを行うことで DATM は本節で述べたバイアス因子法の表式と等価になると言える。

タの予測値に反映するが、それはあくまで「計算手法の不確かさ」によるバイアスを補正しているだけであり、核データ自体にはその情報（計算手法誤差）は反映されていないと考えることが出来るであろう。

式 (45) のようにして得られた調整後核データを用いて \mathbf{R}^t を推定した場合、以下の結果が得られる。

$$\tilde{\mathbf{R}}^t = \mathbf{R}_0^t + (\mathbf{G}^t)^T (\tilde{\sigma} - \sigma_0) = \mathbf{R}_0^t + (\mathbf{G}^t)^T \mathbf{V}_\sigma \mathbf{G}^m \mathbf{Q}^{mm} (\hat{\mathbf{R}}^m - \mathbf{R}_0^m) \quad (46)$$

この式の $(\mathbf{G}^t)^T \mathbf{V}_\sigma \mathbf{G}^m$ は式 (34) 中の \mathbf{V}_R^{mt} のうちの核データの不確かさに起因する成分に対応する。言い換えると、 \mathbf{V}_R^{mt} は、核データの不確かさに起因する成分 $\mathbf{V}_{R,\sigma}^{mt}$ と計算手法の不確かさに起因する成分 $\mathbf{V}_{R,Nume.}^{mt}$ の和として記述することが出来るため、式 (34) は以下のように書ける。

$$\tilde{\mathbf{R}}^t = \mathbf{R}_0^t + \mathbf{V}_{R,\sigma}^{mt} \mathbf{Q}^{mm} (\hat{\mathbf{R}}^m - \mathbf{R}_0^m) + \mathbf{V}_{R,Nume.}^{mt} \mathbf{Q}^{mm} (\hat{\mathbf{R}}^m - \mathbf{R}_0^m) \quad (47)$$

この式の右辺第二項が核データの不確かさに起因するバイアスを補正する成分、第三項が計算手法の不確かさに起因するバイアスを補正する成分と考えることが出来、このことはこれまでの議論と整合するものと言えるであろう。

以上では、DATM の枠組みでは、モックアップデータの情報を反映した核データは通常の炉定数調整法と同様に改訂されるものとするのが論理的に整合性が高いことを主張した。ただし、ここでは、計算手法の不確かさの共通成分を核データの反映に利用する拡張炉定数調整法が適切ではないと主張するものではない。それは、バイアス因子法と炉定数調整法とは、その活用方法の観点から大きな違いがあるからである。

バイアス因子法では、設計対象の炉物理パラメータを予測した後に、モックアップデータに基づくバイアス因子の評価が必要となる。式 (34) から明らかなように、バイアス因子の評価では \mathbf{V}_R^{mt} を計算する必要があり、設計対象の炉物理パラメータの感度係数を計算するか、ランダムサンプリングでこの共分散行列を推定する必要がある。一方、炉定数調整法では、調整された炉定数により計算された値をそのまま予測値として用いることが出来るという利点がある。通常の炉定数調整法では、設計対象とモックアップデータとの計算手法に起因するバイアスの共通成分を考慮することができないが、拡張炉定数調整法では、設計対象、もしくはそれに近い炉物理パラメータとモックアップデータとの計算手法に起因するバイアスの共通部分も考慮した評価が可能となるという利点がある。

参考文献

- [1] 山本章夫、「不確かさ評価の基礎」、第 44 回炉物理夏期セミナーテキスト、(2012).
- [2] G. Palmiotti, M. Salvatores, 'Use of integral experiments in the assessment of large liquid-metal fast breeder reactor basic design parameters,' *Nucl. Sci. Eng.*, **87**, p. 333-348 (1984).
- [3] T. Kugo, T. Mori, T. Takeda, 'Theoretical study on new bias factor methods to effectively use critical experiments for improvement of prediction accuracy of neutronics characteristics,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **44**, p. 1509-1517 (2007).
- [4] T. Endo, A. Yamamoto, T. Watanabe, 'Bias factor method using random sampling technique,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **53**, p. 1494-1501 (2016).
- [5] A. Hoefler, *et al.*, 'MOCABA: a general Monte Carlo-Bayes procedure for improved predictions of integral functions of nuclear data,' *Ann. Nucl. Energy*, **77**, pp. 514-521, (2015).
- [6] 千葉、「核データ調整の式の導出を試みた」.
- [7] A. Gandini, 'Uncertainty analysis and experimental data transposition methods based on perturbation theory,' in Y. Ronen (Ed.) 'Uncertainty Analysis', CRC press, (1988).
- [8] K. Yokoyama, M. Ishikawa, T. Kugo, 'Extended cross-section adjustment method to improve the prediction accuracy of core parameters,' *J. Nucl. Sci. Technol.*, **49**, p. 1165-1174 (2012).