指数実験の基礎

2024/6/1　千葉　豪

指数実験（指数法）について、文献 [1] では以下のように説明されている。

> 燃料集合体のように、一方向の燃料組成が一様な体系の未臨界度を測定する方法として指数法がある。組成が一様な方向を鉛直方向とするとき、水平方向の幾何学的バックリング B_h^2 が燃料の材料バックリング B_m^2 よりも大きければ、中性子束分布は高さ方向の座標を z とすると線源から遠ざかるにつれて $\exp(-\gamma z)$ で減衰する。この分布を測定して、それを指数関数にフィッティングすることで減衰定数 γ が求められる。

指数実験では、こうして求まった γ から最終的に体系の未臨界度を求める。本稿は、「なぜ高さ方向について中性子束が指数関数で減衰するのか」という、上記の説明では省略されている基本的な事項を説明するものである。なお、指数実験をしっかり理解したのであれば、文献 [1] や、[2]、[3] を参照するとよいであろう。

簡単のため、組成が一様である 2 次元矩形の未臨界の原子炉を考え、この原子炉内の中性子束分布が、以下のエネルギー 1 群の中性子拡散方程式で記述されるものとする。

$$-D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y)+\Sigma_a\phi(x,y)=\nu\Sigma_f\phi(x,y) \tag{1}$$

指数実験では、外部源が原子炉の外に局所的に配置されるので、外部源からの原子炉への中性子の流れ込みは境界条件（中性子流[1] ）で扱うこととする。考えている未臨界原子炉と中性子源との関係を **Fig. 1** の左図に、以降の議論で扱うモデルを右図に示す。右図に示すように、$x=X$、$y=Y$ にゼロ中性子束条件を与え、$x=0$、$y=0$ に対しては中性子流（中性子束の勾配）に境界条件を課すこととする。

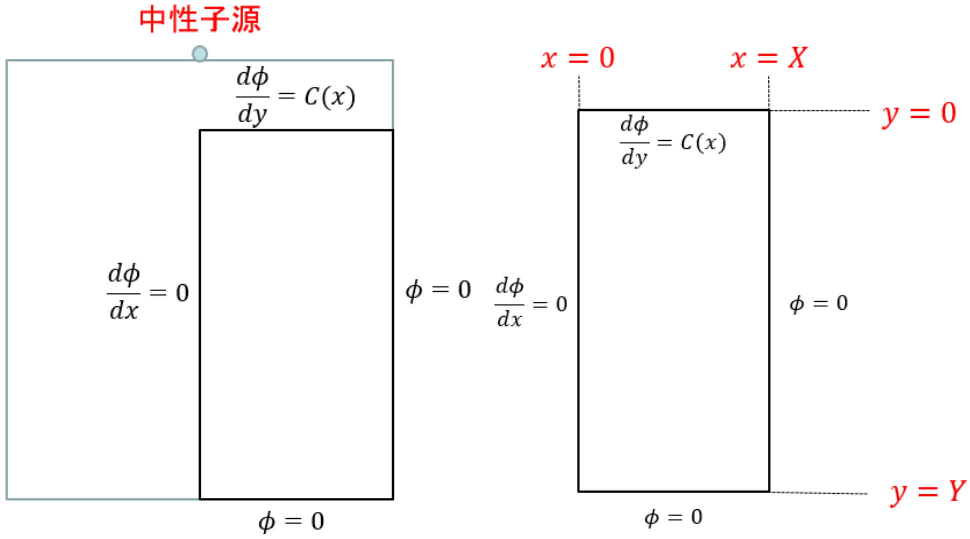

Fig. 1: Sub-critical system with point neutron source

さて、今考えている領域についての中性子拡散方程式は次のように書ける。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x,y)+B_m^2\phi(x,y)=0 \tag{2}$$

[1]例えば中性子流の x 方向成分は、拡散近似の下では $-D\dfrac{d\phi}{dx}$ と書ける。

ここで、B_m^2 は材料バックリングに対応し、エネルギー１群近似のもとでは

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D} \tag{3}$$

と定義される。この時点では、$\nu\Sigma_f$ や Σ_a にいかなる条件も与えていないため、B_m^2 は正負いずれの値もとりうる。これが負となる場合には、その平方根 B_m は虚数となる。

今考えている境界条件の下では、式 (2) の一般解 $\phi(x,y)$ は次のように変数分離できる。

$$\phi(x,y) = \phi_x(x)\phi_y(y) \tag{4}$$

これを式 (2) に代入すると、以下の式を得る。

$$\frac{1}{\phi_x(x)}\frac{d^2\phi_x(x)}{dx^2} + \frac{1}{\phi_y(y)}\frac{d^2\phi_y(y)}{dy^2} + B_m^2 = 0 \tag{5}$$

この式が成り立つためには、左辺第一項、第二項ともに定数でなければならないので、それぞれを $-B_x^2$、$-B_y^2$ とおくと、以下の式を得ることが出来る。

$$\frac{d^2\phi_x(x)}{dx^2} + B_x^2\phi_x(x) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\phi_y(y)}{dy^2} + B_y^2\phi_y(y) = 0 \tag{7}$$

ここで、

$$B_x^2 + B_y^2 = B_m^2 \tag{8}$$

の関係が成り立つ。なお、B_m^2 と同様に、B_x^2、B_y^2 は正負いずれの値もとりうる。

式 (6)、(7) の一般解はそれぞれ

$$\phi_x(x) = C_{x,1}\exp(iB_x x) + C_{x,2}\exp(-iB_x x), \tag{9}$$

$$\phi_y(y) = C_{y,1}\exp(iB_y y) + C_{y,2}\exp(-iB_y y) \tag{10}$$

と書ける。これらの関数は、具体的には、B^2 が正となる場合は三角関数、負となる場合は双曲線関数（指数関数）となる。

式 (2) の一般解は、式 (8) を満足する B_x、B_y の無数の組み合わせからなるので、それらを j で区別して以下のように記述する。

$$\phi(x,y) = \sum_j \left(C_{x,j,1}\exp(iB_{x,j}x) + C_{x,j,2}\exp(-iB_{x,j}x)\right)\cdot \left(C_{y,j,1}\exp(iB_{y,j}y) + C_{y,j,2}\exp(-iB_{y,j}y)\right) = \sum_j \phi_{x,j}(x)\phi_{y,j}(y) \tag{11}$$

ここで、

$$B_{x,j}^2 + B_{y,j}^2 = B_m^2 \tag{12}$$

が成り立つ。

これらの一般解に対して境界条件を課すことにより一意解を得ることが出来る。任意の y について、$x = X$ においてゼロ中性子束条件、$x = 0$ においてゼロ中性子流条件が課される場合、$\phi_{x,j}$ は双曲線関数となり得ない[2]。これは $B_{x,j}^2$ が負の値となり得ないことを意味するので、$B_{x,j}^2$ については正の値のみを考えればよい。すると、境界条件より、$B_{x,j}^2$ は以下のように x 方向に関する幾何学的バックリング $B_{g,x,j}^2$ のみをとり得ること、$\phi_{x,j}(x)$ は三角関数となることが分かる。

$$B_{x,j}^2 = B_{g,x,j}^2 = \left(\frac{(2j+1)\pi}{X}\right)^2, \quad j = 0,1,2,... \tag{13}$$

[2] 双曲線関数が $x = X$ でゼロとなるならば、その関数は $\sinh(\alpha(x - X))$ のように記述される。従って、$x = X$ での中性子束がゼロであれば $\phi_{x,j}$ は $\sinh(B_{x,j}(x - X))$ でなければならない。ただし、この関数は $x = 0$ におけるゼロ中性子流条件を満足することが出来ないので、$\phi_{x,j}$ は双曲線関数となり得ないことになる。

さて、$B^2_{x,j}$ がとりうる値が決まったので、次は $B^2_{y,j}$ について考えよう。式 (12) より、$B^2_{y,j} = B^2_m - B^2_{g,x,j}$ として求められ、かつ、これまでの議論で $B^2_{g,x,j} > 0$ であることが分かっている。以下、B^2_m について場合分けして考える。

(1) $B^2_m < 0$ の場合：

ここで、$B^2_m = -\gamma^2_m$ と記述するものとする。この場合は、式 (3) より $\nu\Sigma_f < \Sigma_a$ となるので $k_\infty < 1$ となる。

B^2_m が負、$B^2_{g,x,j}$ が正であるため、$B^2_{y,j}$ は必ず負となる。そこで $\gamma^2_{y,j} = -B^2_{y,j}$ と書くとすると、式 (12) より

$$\gamma^2_{y,j} = B^2_{g,x,j} + \gamma^2_m \tag{14}$$

が得られる。$j \geq 1$ について、$B^2_{g,x,j} > B^2_{g,x,0}$ なので $\gamma_{y,j} > \gamma_{y,0}$ が成り立つ。$y = Y$ でのゼロ中性子束条件を課すと、$\phi_{y,j}(y)$ は

$$\phi_{y,j}(y) = C_j \sinh(\gamma_{y,j}(y - Y)) \tag{15}$$

と書け、式 (11) は

$$\phi(x,y) = \sum_{j=0} C_j \cos(B_{g,x,j}x) \sinh(\gamma_{y,j}(y - Y)) \tag{16}$$

と書けることになる。外部境界 $y = Y$ からある程度離れた位置ではこの式は

$$\phi(x,y) = \sum_{j=0} C'_j \cos(B_{g,x,j}x) \exp(-\gamma_{y,j}y) \tag{17}$$

と書き直すことができる[3]。また、$y \gg 0$ では $j \geq 1$ の項は減衰し

$$\phi(x,y) \approx C'_0 \cos(B_{g,x,0}x) \exp(-\gamma_{y,0}y) \tag{19}$$

と書けることになる。

(2) $B^2_m > 0$ かつ $B^2_{g,x,0} > B^2_m$ の場合：

この場合は、$k_\infty > 1$ であるが、x 方向の漏れが大きく、たとえ y 方向が無限大であったとしても臨界にはなり得ない。これは、冒頭に挙げた文献 [1] の記述（「水平方向の幾何学的バックリング B^2_h が燃料の材料バックリング B^2_m よりも大きければ」）に該当する。

$B^2_{y,j} = B^2_m - B^2_{g,x,j}$ 及び $B^2_{g,x,j} \geq B^2_{g,x,0}$ より、全ての $B^2_{y,j}$ は負となり、上記 (1) の場合と同様の議論が成り立つことになる。このことは、無限増倍率が 1 を越えるような燃料を利用したとしても、このような条件の下であれば指数実験が行えることを示している。

(3) $B^2_m > 0$ かつ $B^2_m > B^2_{g,x,0}$ の場合：

---

[3] $\sinh(x-a)$ は

$$\sinh(x-a) = \frac{e^{x-a} - e^{-(x-a)}}{2} = \frac{e^{-a}e^x - e^a e^{-x}}{2}$$

と書ける。$x = a$ で $\sinh(x-a)$ はゼロとなることから、上式分子の第一項と第二項は $x = a$ で等しくなるが、$x < a$ では第一項は x に対して単調増加関数、第二項は単調減少関数であるから、$x \ll a$ では第一項に対して第二項が卓越し、

$$\sinh(x-a) \approx -\frac{e^a e^{-x}}{2} \propto e^{-x} \tag{18}$$

と書ける。

この場合は、$k_\infty > 1$ であり、仮に y 方向の幾何学的バックリングが $B_{g,y,0}^2 < B_m^2 - B_{g,x,0}^2$ を満たすならば臨界超過となる。ただし、ここで考えている原子炉は未臨界としているので、$B_{g,y,0}^2 > B_m^2 - B_{g,x,0}^2$ が成り立たなければばならない。

この場合、$B_{y,0}^2$ は正となるが、j が大きくなるに従って $B_{g,x,j}^2$ が大きくなることから、j がある程度の大きさとなったときに $B_{y,j}^2$ は負となる。そこで、$B_{y,j}^2$ が負となる最小の j を j' と記述すると、$j \geq j'$ については ϕ_y は双曲線関数となるが、$j < j'$ については三角関数となると言える。つまり、式 (11) は

$$\phi(x,y) = \sum_{j=0}^{j'-1} C_j \cos(B_{g,x,j}x)\sin(B_{y,j}(y-Y)) + \sum_{j=j'} C_j \cos(B_{g,x,j}x)\sinh(\gamma_{y,j}(y-Y)) \tag{20}$$

と書けることになる。仮に $j' = 1$ であるとするならば、$\gamma_{y,1}$ が十分に大きければ、$y \gg 0$ において $j \geq 1$ の項は減衰するので

$$\phi(x,y) \approx C_0 \cos(B_{g,x,0}x)\sin(B_{y,0}(y-Y)) \tag{21}$$

と書くことが出来る。すなわち、このような場合には y 方向の中性子束分布は単一の三角関数で記述されることを意味する。また、$j \geq 1$ の項の寄与が無視できない場合は、$y \gg 0$ において $\phi(x,y)$ は単一の三角関数で記述されず、三角関数と指数関数の和になる。$j \geq 1$ の項の寄与に関わらず、このような条件下では、指数実験は行われない。

謝辞

毎度のことながら、名古屋大学の遠藤先生にはいろいろ教えていただいて、とても助かっています。どうも有難うございます。

参考文献

[1] 山本俊弘、「未臨界系の炉物理と測定原理」、第 46 回炉物理夏期セミナーテキスト、(2014).

[2] T. Suzaki, "Subcriticality determination of low-enriched UO_2 lattices in water by exponential experiment," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **28**, pp. 1067-1077 (1991).

[3] T. Yamamoto, *et al.,* "Effect of higher-harmonics flux in exponential experiment for subcriticality measurement," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **40**, pp. 77-83 (2003).