

1 次元平板体系中中性子輸送ベンチマーク問題の作成とその参照解¹

2025/8/2 改訂 千葉 豪

ここで扱う平板は全て厚さ 100 cm の一様平板とし、外部中性子源強度は $1.0 \text{ n/cm}^3/\text{s}$ とする。なお、外部中性子源は等方であるとする。

断面積の数値は各問題毎に与えるものとする。数値自体は、小林ベンチマーク [1] を参考に設定したものである。

計算対象は（スカラー）中性子束の空間分布とするが、問題によっては角度中性子束の高次の Legendre 展開係数の値（角度中性子束の Legendre モーメント）も与えるものとする。

参照解は CBZ コードシステムの SNR モジュールにより計算した²。空間メッシュは 1 cm あたり 1 メッシュとなるように設定し、角度求積セットは Gauss-Legendre セットを用いた。

1 前提条件

散乱断面積 Σ_s の散乱角 θ_0 に対する依存性を、以下のように散乱角の余弦 $\mu_0 = \cos \theta_0$ についてのルジャンドル多項式で展開する。

$$\Sigma_s(\mu_0) = \sum_l \frac{2l+1}{2} \Sigma_{s,l} P_l(\mu_0) \quad (1)$$

また、1 次元平板体系では、極角の余弦 μ を向く角度中性子束 $\psi(\mu)$ を以下のようにルジャンドル多項式で展開する。

$$\psi(\mu) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \phi_l P_l(\mu) \quad (2)$$

このとき、 ϕ_l は以下のように定義される。

$$\phi_l = 2\pi \int_{-1}^{+1} \psi(\mu) P_l(\mu) d\mu \quad (3)$$

従って、 ϕ_0 は

$$\phi_0 = 2\pi \int_{-1}^{+1} \psi(\mu) d\mu \quad (4)$$

と定義され、これは「スカラー中性子束」に対応していることが分かる。

以上のように $\Sigma_{s,l}$ 、 ϕ_l を定義した場合、一次元平板体系の中性子輸送方程式は以下のように記述される。

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \Sigma_t(x) \psi(x, \mu) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \Sigma_l(x) \phi_l(x) + S(x, \mu) \quad (5)$$

外部源が等方であるとするならば、 $S(x, \mu) = 1/(4\pi) \cdot S(x)$ となる。基本的にはこの式に基づいて計算コードを作成すればよいであろう。なお、Lewis&Miller のテキスト中では、一次元平板体系の輸送方程式として以下が与えられている（p.117 の式 (3-1)）。

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \Sigma_t(x) \psi(x, \mu) = \sum_l (2l+1) P_l(\mu) \Sigma_l(x) \phi_l(x) + S(x, \mu) \quad (6)$$

右辺第一項に乗ぜられている定数に差異があるが、これは Lewis&Miller では ϕ_l を以下のように定義していることに由来する（式 (3-3)）。

$$\phi_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(\mu) \psi(\mu) d\mu \quad (7)$$

このように定義した場合、 ϕ_0 はスカラー中性子束ではなく「角度中性子束の平均値」に対応することになる。

¹Document/Study/ScatteringSourceTreatment/1D_Sn

²ソースは CBGICAL/Kobayashi/main.1d.cal.cxx。

2 問題0：無限媒質

左右の外部境界を反射境界条件とし、中性子源が空間的に一様であるとするならば、このような問題は空間依存性の無いものとなる。

そこで、 Σ_t を 0.1 /cm、 $\Sigma_{s,0}$ を 0.0 /cm としたものを問題 0.1 とする。散乱断面積がゼロであるため、 $\Sigma_a = \Sigma_t$ であり、吸収反応による消滅と外部中性子源による生成、すなわち吸収反応率と外部中性子源からの生成が釣り合うことから、以下の式が成り立つ。

$$\Sigma_a \phi = S \quad (8)$$

従って、この問題では中性子束は全ての位置で S/Σ_a 、すなわち 10.0 とならなければならない。

また、 Σ_t を 0.1 /cm、 $\Sigma_{s,0}$ を 0.05 /cm としたものを問題 0.2 とする。この場合は $\Sigma_a = 0.05$ となるため、 ϕ は 20.0 とならなければならない。

問題 0.0 及び 0.1 に対する CBZ/SNR による計算結果を Fig. 1 に示す。

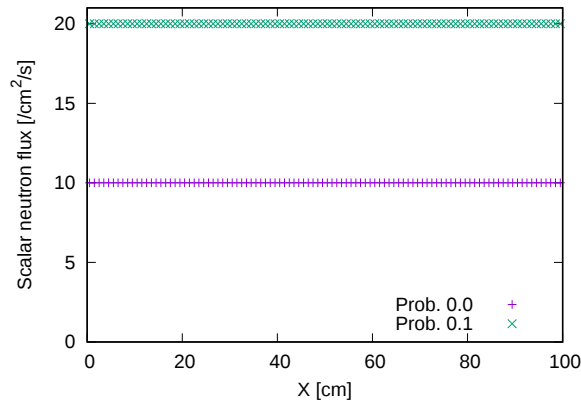


Fig. 1: Reference solutions for problems 0.1 and 0.2 obtained by CBZ/SNR

3 問題1：散乱の無い有限体系

これ以降の問題では左右の外部境界を真空境界条件とする。

問題 1 は、中性子源が空間的に一様であるとし、問題 0.1 と同様に、 Σ_t を 0.1 /cm、 $\Sigma_{s,0}$ を 0.0 /cm としたものとす。CBZ/SNR による計算結果を Fig. 2 に示す。

また、練習として、角度中性子束の 1 次の Legendre 展開係数も計算してみよう。角度中性子束 $\psi(\mu)$ を前掲のように Legendre 展開で記述する。

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \phi_l(x) \quad (9)$$

この $\phi_l(x)$ は、角度中性子束の l 次の Legendre 展開係数であり、「角度中性子束の l 次モーメント」「中性子束の P_l 成分」とも呼称する。例えば、この展開を 1 次で打ち切った場合、 $P_1(\mu) = \mu$ であるので、 $\psi(\mu)$ は以下のように書ける。

$$\psi(x, \mu) = \frac{\phi_0(x)}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} \mu \phi_1(x) \quad (10)$$

従って、 $\phi_1(x)$ がゼロであれば $\psi(x, \mu)$ は等方であるし、 $\phi_1(x)$ が正の値であれば $\psi(x, \mu)$ は x について正の方向に偏った角度分布となることが分かる。

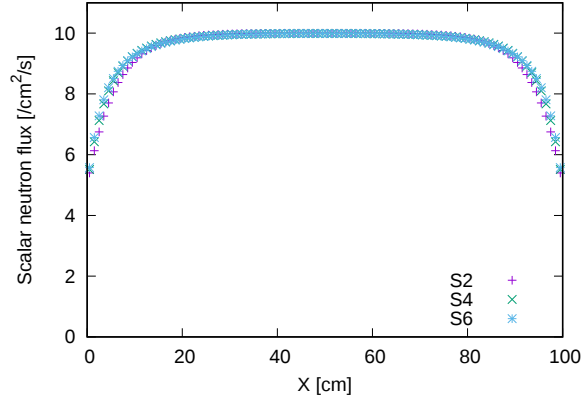


Fig. 2: Reference solutions for problem 1 obtained by CBZ/SNR

$\phi_l(x)$ は、式 (9) の両辺に $P_l(\mu)$ を乗じ、 μ について $[-1, +1]$ の範囲で積分することで、以下のように $\psi(x, \mu)$ から定義することが出来る。

$$\phi_l(x) = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_l(\mu) \psi(x, \mu) d\mu \quad (11)$$

前述の通り、 $\phi_0(x)$ はスカラー中性子束に対応する。

離散座標法を用いた場合、角度中性子束は特定の方向のみが計算で得られるので、以下の求積法により $\phi_l(x)$ を計算する。

$$\phi_l(x) \approx 2\pi \sum_i w_i P_l(\mu_i) \psi(x, \mu_i) \quad (12)$$

ここで $\sum_i w_i = 2$ であるとする。例えば $\phi_1(x)$ は、以下のように計算できるであろう。

$$\phi_1(x) \approx 2\pi \sum_i w_i \mu_i \psi(x, \mu_i) \quad (13)$$

問題 1 について、 $\phi_1(x)$ の計算結果を Fig. 3 に示す。中心位置では角度中性子束は左右対称となるため ϕ_1 はゼロとなり、炉心の右側では角度中性子束は右側に偏るため ϕ_1 が正の値をとっていることが分かる。なお、CBZ では $\psi(\mu)$ の Legendre 展開の形式が式 (9) とは微妙に異なるので、分布形状が再現できればよいであろう。

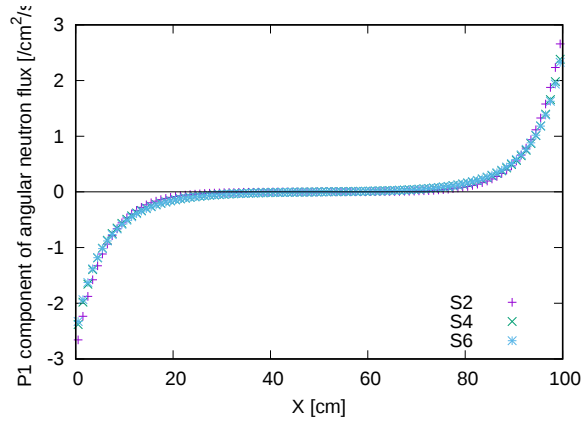


Fig. 3: Reference solutions for problem 1 obtained by CBZ/SNR (P1 component of angular neutron flux)

4 問題 2：等方散乱を含む有限体系

問題 2 は、中性子源が空間的に一様であるとし、問題 0.2 と同様に、 Σ_t を 0.1 /cm、 $\Sigma_{s,0}$ を 0.05 /cm としたものとする。CBZ/SNR による計算結果を Fig. 4 に示す。

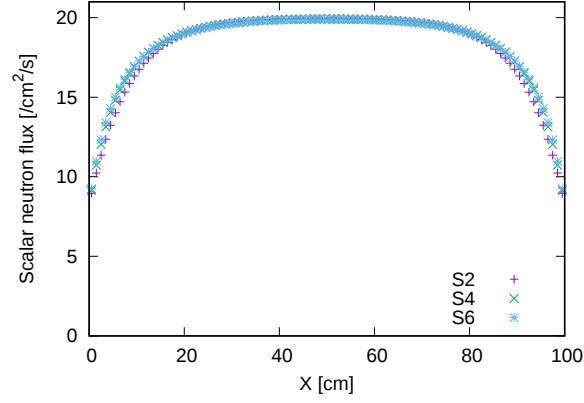


Fig. 4: Reference solutions for problem 2 obtained by CBZ/SNR

5 問題 3：局所的に中性子源が存在する、等方散乱を含む有限体系

問題 3 は、外部中性子源が 49 cm から 51 cm の原子炉の中心領域にのみ存在するとし、問題 0.2 と同様に、 Σ_t を 0.1 /cm、 $\Sigma_{s,0}$ を 0.05 /cm としたものとする。CBZ/SNR による計算結果を Fig. 5 に示す。

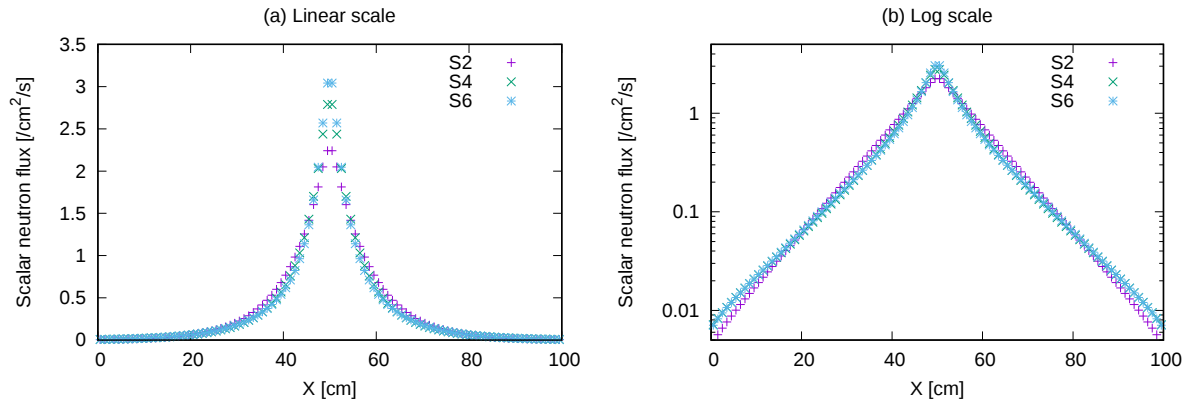


Fig. 5: Reference solutions for problem 3 obtained by CBZ/SNR

6 問題 4：局所的に中性子源が存在する、非等方散乱を含む有限体系

問題 4 は、問題 3 に対して散乱の非等方性を考慮した問題である。ここでは、散乱断面積として以下で定義される Henyey-Greenstein 位相関数 [2]（以下、HG 関数）を考えることとする。

$$\Sigma_s(\mu) = \Sigma_s \cdot \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\mu)^{3/2}} \quad (14)$$

なお、 $\Sigma_s = \int \Sigma_s(\mu) d\mu$ であり、 Σ_s は全散乱断面積を示す。また、 g は散乱の非等方性に対応するパラメータであり、平均散乱角の余弦に対応する（値域は $[-1, +1]$ となる）。 $g = 0$ のときは、 $\Sigma_s(\mu) = \Sigma_s/2$ となり $[-1, +1]$ の区間で等確率に散乱されることが分かる。

このように定義される散乱断面積を以下のように Legendre 展開で記述する。

$$\Sigma_s(\mu) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \Sigma_{s,l} P_l(\mu) \quad (15)$$

このとき、HG 関数の特徴として、 $\Sigma_{s,l} = \Sigma_s g^l$ が成り立つことが分かっている。

問題 4 では、 $g=0.8$ とし、散乱断面積 $\Sigma_s(\mu)$ を有限の Legendre 展開で記述するものとする。Legendre 展開の打ち切り次数 L を増加させていったときの $\Sigma_s(\mu)$ の振る舞いを、 $g=0.8$ とした HG 関数とともに Fig. 6 に示す。 L を大きくするに従って散乱の前方性が増し HG 関数に近づいていくことが分かるであろう。

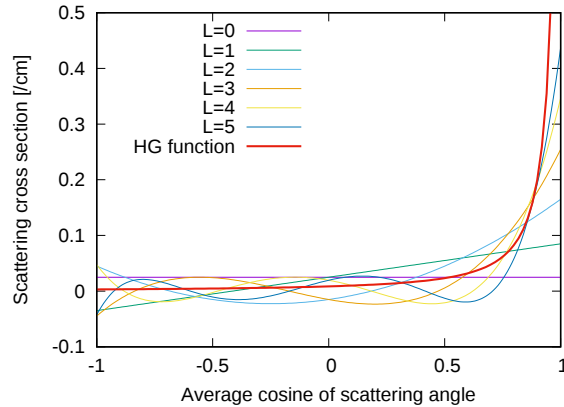


Fig. 6: Anisotropic scattering cross section in the problem 4

非等方散乱の問題では、散乱源 $S_{scat}(x, \mu)$ を以下のように計算する。

$$S_{scat}(x, \mu) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \Sigma_{s,l} \phi_l(x) \quad (16)$$

従って、散乱源を更新する際には $\phi_l(x)$ が必要となるが、これについては前述した通り、求積公式により有限の離散方向について計算される角度中性子を用いて計算する。

L を 0 から 5 まで変化させたときの参照解を Fig. 7 に示す。なお、角度中性子束の離散方向数は 16 (S16) とした。計算結果（中性子束分布）は Legendre 展開次数に関してある漸近値に近づいているものの、 $L=5$ 程度では不十分であることが見てとれる。

輸送近似の精度を評価するため、 L を 200 とした結果を参照解とし、 L を 1 から 5 までとした場合、及び輸送近似を適用した場合（ L は 0 から 4）のスカラー中性子束の誤差を評価した。求積セットは全て S500 を用いた。結果を Fig. 8 に示すが、輸送近似の適用の有無に関わらず L を大きくすることによって誤差の低減が図られていること、輸送近似の適用により誤差の低減が図られていることが分かる。

L を 200 としたときの中央の外部源付近での中性子束の角度依存性を Fig. 9 に示す。

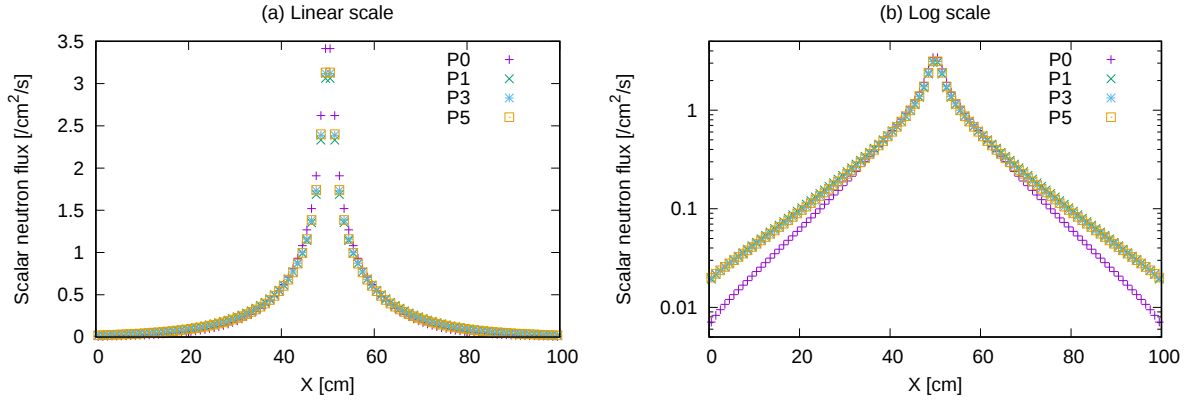


Fig. 7: Reference solutions for problem 4 obtained by CBZ/SNR

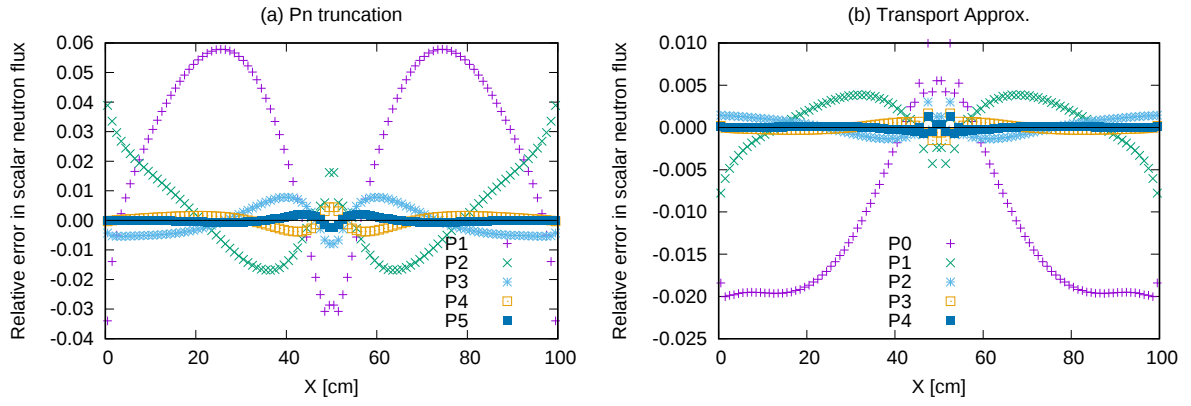


Fig. 8: Errors in scalar neutron flux for problem 4 with low-order Pn truncation

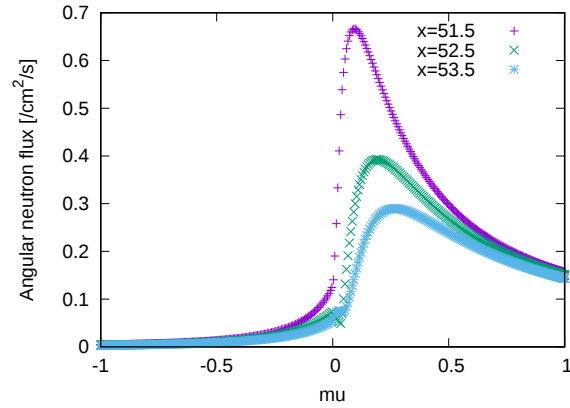


Fig. 9: Angular distribution of neutron flux around the external neutron source

7 問題 5：局所的に中性子源が存在する、複数の異なる媒質を含む有限体系

問題 5 は、問題 3 に対して、20 から 40 cm、及び 60 から 80 cm の領域を異なる媒質に置換した問題である。ここで、置換媒質の断面積は Σ_t を 0.1 /cm、 Σ_a を 0.1 /cm とした（完全吸収媒質である）。CBZ/SNR による計算結果を Fig. 10 に示す。

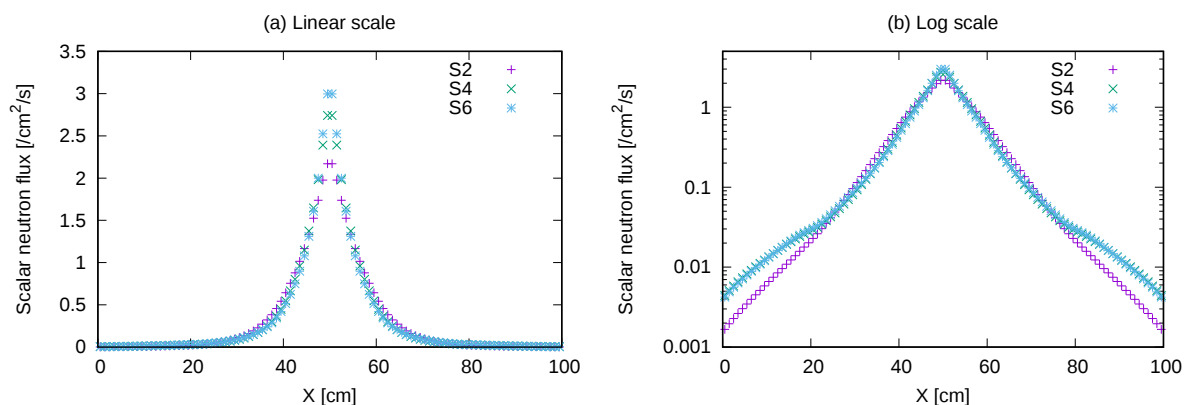


Fig. 10: Reference solutions for problem 5 obtained by CBZ/SNR

また、両側の境界条件を完全反射に置き換えた問題（問題 5-2）の CBZ/SNR による計算結果を Fig. 11 に示す。

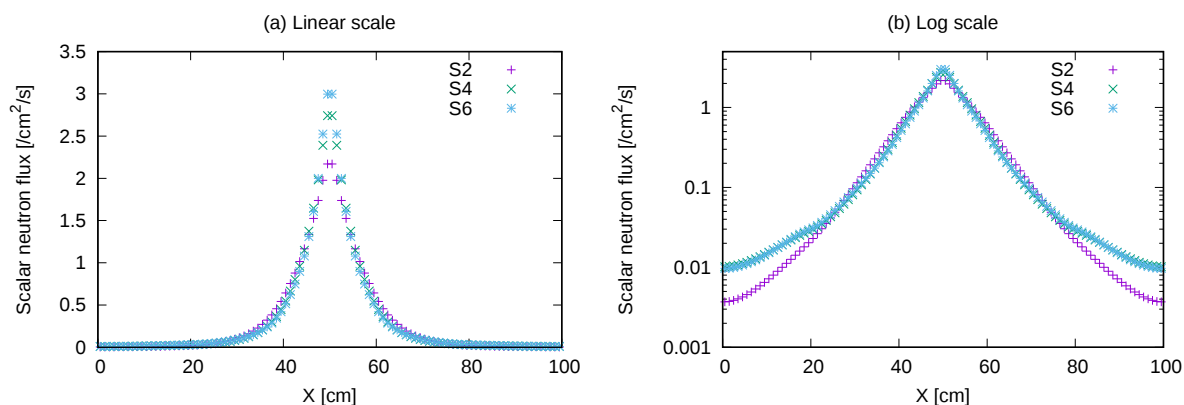


Fig. 11: Reference solutions for problem 5 with the reflective boundary condition obtained by CBZ/SNR

8 問題 6：局所的に中性子源が存在する、エネルギー 2 群の有限体系

問題 6 は、これまでとは異なりエネルギー群数を 2 とした問題である。体系を構成する媒質は 1 種類とし、外部中性子源は 49 から 51 cm に存在するものとした。媒質の断面積は、いずれに群についても Σ_t を 0.1 /cm とした。第 1 群については、 Σ_a を 0.0 /cm とし、第 1 群及び第 2 群への Σ_s をそれぞれ 0.05 /cm とした。第 2 群については、 Σ_a を 0.05 /cm とし、第 2 群への Σ_s を 0.05 /cm とした。また、外部中性子源は第 1 群のみに発生するものとし、その強度はこれまでと同様とした。従って、第 1 群については、問題 3 と同一の解が得られることになる。CBZ/SNR による計算結果を Fig. 10 に示す。

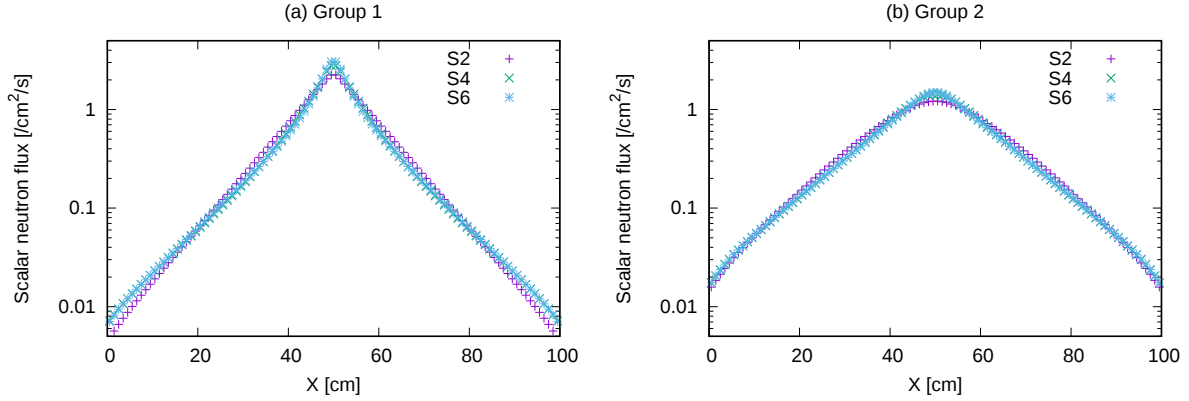


Fig. 12: Reference solutions for problem 6 obtained by CBZ/SNR

参考文献

- [1] K. Kobayashi, *et al.*, “3D radiation transport benchmark problems and results for simple geometries with void region,” *Prog. Nucl. Energy*, **39**[2], p. 119 (2001).
- [2] L.G. Henyey, L.J. Greenstein, “Diffusion radiation in the galaxy,” *J. Astrophys.*, **93**, p. 70 (1941).
- [3] L. Liu, L. Ruan, H. Tan, “On the discrete ordinates method for radiative heat transfer in anisotropically scattering media,” *Int. J. Heat Mass Transf.*, **45**(15), p. 3259 (2002).
- [4] H. Fujii, S. Okawa, Y. Yamada, Y. Hoshi, M. Watanabe, “Renormalization of the highly forward-peaked phase function using the double exponential formula for radiative transfer,” *J. Math. Chem.*, **54**, p. 2048 (2016).