面積比法による反応度の測定

千葉豪

平成 29 年 4 月 6 日

未臨界度（未臨界体系の反応度）を実験的に求める方法として、体系に連続的にパルス中性子を打ち込んだ際の中性子密度の時間積分情報を用いる「面積比法」と呼ばれる方法がある [1]。この方法について、簡単な解説を行う。

1 「原子炉物理実験」における解説

教科書「原子炉物理実験」[2] の p.184 に面積比法に関する簡単な説明が行われているので、ここで引用する。

未臨界体系に対して打ち込まれた中性子数を S としたとき、この中性子によって生成される全中性子数は、体系の中性子増倍係数を k としたとき、$S+kS+k^2S+\cdots=S/(1-k)$ と書ける。一方、パルス状に中性子が打ち込まれた場合には、即発中性子のみによる成分は中性子打ち込み後に急速に減衰するものと考えられる。この即発中性子のみによる成分は、即発中性子のみの中性子増倍係数 $k_p=(1-\beta)k$ を用いて、$S+k_pS+k_p^2S+\cdots=S/(1-k_p)=S/(1-(1-\beta)k)$ と書ける。ここで β は遅発中性子割合を示す。従って、即発中性子のみによる成分を A_1、遅発中性子のみによる成分を A_2 としたとき、これらは以下のように書ける。

$$A_1 = \frac{S}{1-(1-\beta)k}, \tag{1}$$

$$A_2 = \frac{S}{1-k}-\frac{S}{1-(1-\beta)k}=\frac{S\beta k}{(1-k)(1-(1-\beta)k)} \tag{2}$$

(3)

従って、この比をとると、以下の式が得られる。

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{1-k}{\beta k}=-\left(\frac{\rho}{\beta}\right) \tag{4}$$

A_1、A_2 はパルス中性子打ち込み後の中性子計数の時間積分値から求めることができるため、反応度を実験的に求めることができる。

2 遅発中性子先行核一群、一点炉動特性方程式からの導出

ここでは遅発中性子先行核を一群として扱った一点炉動特性方程式から面積比法を導出する。

この場合の動特性方程式は以下のように書ける。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho-\beta}{\Lambda}n(t)+\lambda C(t), \tag{5}$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda}n(t)-\lambda C(t) \tag{6}$$

この微分方程式の解を得るために、$n(t) = \tilde{n}\exp(\omega t)$、$C(t) = \tilde{C}\exp(\omega t)$ とおいて上式に代入すると、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \omega\tilde{n} &= \frac{\rho-\beta}{\Lambda}\tilde{n} + \lambda\tilde{C}, && (7) \\ \omega\tilde{C} &= \frac{\beta}{\Lambda}\tilde{n} - \lambda\tilde{C} && (8) \end{aligned}$$

これらを以下のように行列形式で記述する。

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho-\beta}{\Lambda} - \omega & \lambda \\ \frac{\beta}{\Lambda} & -(\omega+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{n} \\ \tilde{C} \end{pmatrix} = \mathbf{An} = \mathbf{0} \tag{9}$$

ω の値、および $\tilde{n}$ と $\tilde{C}$ の関係は、$\det(\mathbf{A}) \neq 0$ を満足するという条件から導かれる。

$\rho - \beta \approx 0$ でない場合には、ω は $\dfrac{\rho-\beta}{\Lambda}$、$\dfrac{\lambda\rho}{\beta-\rho}$ として得られる [3]。以下では、ω が各々の場合について、$\tilde{n}$ と $\tilde{C}$ に間に成り立つ関係を示す。

- $\omega = \dfrac{\rho-\beta}{\Lambda}$ のときは、以下の式が成り立つ。

$$\tilde{n} = \left(\frac{\rho-\beta}{\beta} + \frac{\lambda\Lambda}{\beta}\right)\tilde{C} \approx \frac{\rho-\beta}{\beta}\tilde{C} \tag{10}$$

- $\omega = \dfrac{\lambda\rho}{\beta-\rho}$ のときは、以下の式が成り立つ。

$$\tilde{n} = \frac{\Lambda\lambda}{\beta-\rho}\tilde{C} \tag{11}$$

時間的にデルタ関数で記述されるパルス中性子が $t = 0$ において打ち込まれたとすると、$n(t)$ は以下のように記述される。

$$n(t) = n_1 \exp\left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda}t\right) + n_2 \exp\left(\frac{\lambda\rho}{\beta-\rho}t\right) \tag{12}$$

また、パルス中性子の強度を S とすると以下の式が成り立つ。

$$n(0) = n_1 + n_2 = S \tag{13}$$

また、$C(t)$ についても同様に以下のように記述する。

$$C(t) = C_1 \exp\left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda}t\right) + C_2 \exp\left(\frac{\lambda\rho}{\beta-\rho}t\right) \tag{14}$$

また、$C(0) = 0$ であるので、以下の式が成り立つ。

$$C(0) = C_1 + C_2 = n_1\frac{\beta}{\rho-\beta} + n_2\frac{\beta-\rho}{\Lambda\lambda} = 0 \tag{15}$$

ここでは式 (10)、(11) を用いている。

式 (13)、(15) より、n_1、n_2 が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{S}{1 + \frac{\beta\Lambda\lambda}{(\rho-\beta)^2}} = \frac{S}{1+\gamma} && (16) \\ n_2 &= \frac{\gamma S}{1+\gamma} && (17) \end{aligned}$$

従って、最終的に $n(t)$ は以下のように書ける。

$$n(t) = \frac{S}{1+\gamma}\exp\left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda}t\right) + \frac{\gamma S}{1+\gamma}\exp\left(\frac{\lambda\rho}{\beta-\rho}t\right) \tag{18}$$

式 (18) の右辺第一項は急速に減衰する項なので、即発中性子成分と考えることができる。また、右辺第二項は緩やかに減衰する項であり、$\rho \to -\infty$ のときは $-\lambda$ に漸近していくので、遅発中性子成分と考えることができる。右辺第一項の $[0,\infty]$ における時間積分 A_1 は以下のように計算される。

$$A_1 = \int_0^\infty \frac{S}{1+\gamma}\exp\left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda}t\right) = -\frac{S}{1+\gamma}\cdot\frac{\Lambda}{\rho-\beta} \tag{19}$$

同様に、右辺第二項の $[0,\infty]$ における時間積分 A_2 は以下のように計算される。

$$A_2 = -\frac{S}{1+\gamma}\cdot\frac{\gamma(\beta-\rho)}{\lambda\rho} \tag{20}$$

従って、A_1 と A_2 の比をとると、以下の式が得られる。

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Lambda}{\rho-\beta}\cdot\frac{\lambda\rho}{\gamma(\beta-\rho)} = -\frac{\Lambda\lambda\rho}{(\rho-\beta)^2}\cdot\frac{1}{\gamma} = -\frac{\Lambda\lambda\rho}{(\rho-\beta)^2}\cdot\frac{(\rho-\beta)^2}{\beta\Lambda\lambda} = -\frac{\rho}{\beta} \tag{21}$$

参考文献

[1] N.G. Sjostrand, “Measurement on a subcritical reactor using a pulsed neutron source,” *Arkiv Fysik*, **11**, p.233 (1956).

[2] 三澤毅、宇根崎博信、卞哲浩、「原子炉物理実験」、京都大学学術出版会 (2010).

[3] 千葉豪、「原子炉動特性の基礎 (1) 一点炉遅発中性子一群動特性方程式」