

# 一次元体系における中性子拡散固有値方程式の解析解

北海道大学工学研究院

千葉 豪<sup>1</sup>

## 1 エネルギー 1 群・1 領域・平板体系

この場合の中性子拡散方程式は以下で記述される。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \frac{\nu \Sigma_f}{k} \phi(x) \quad (1)$$

ここで、中性子実効増倍率は  $k$  と表記し、それ以外のパラメータの表記は通例に従うものとする。

式 (1) において漏洩項（左辺第一項）を無視したときの中性子増倍率が無限増倍率  $k_\infty$  に対応する。 $k_\infty$  は以下のように得られる。

$$k_\infty = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (2)$$

自明ではあるが、 $k_\infty > k$  が成り立つ。

中性子拡散方程式 (1) を変形することにより、以下を得ることが出来る。

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \frac{\nu \Sigma_f / k - \Sigma_a}{D} \phi(x) = \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + B^2 \phi(x) = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\nu \Sigma_f / k - \Sigma_a > 0$  となることは、 $k_\infty > k$  より示される。

式 (3) の一般解は以下となる。

$$\phi(x) = E \cos(Bx) + F \sin(Bx) \quad (4)$$

ここで  $E$ 、 $F$  は未定係数である。この平板原子炉の厚さが  $a$  であるとし、その中心が  $x = 0$  となるように座標系を設定することとする。このとき中性子束分布は  $x = 0$  で対称となることから  $F = 0$  が得られる。また、外部境界条件としてゼロ中性子束を課したとき、 $\phi(a/2) = 0$  より  $Ba/2 = \pi/2 + n\pi$  が得られる。加えて、 $\phi(x)$  がつねに非負であるという条件を課すと、 $Ba/2 = \pi/2$  となり、以下の関係式が得られ、 $k$  の解析解が得られる。

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f / k - \Sigma_a}{D} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad (5)$$

これを整理して、以下が得られる。

エネルギー 1 群、1 領域、厚さ  $a$  の平板体系 ( $[-a/2, a/2]$  で定義) の中性子実効増倍率の解析解は

$$k = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} \quad (6)$$

となり、中性子束分布は

$$\phi(x) = E \cos(Bx) \quad (7)$$

となる。ここで、 $B^2 = (\pi/a)^2$  である。

## 2 エネルギー 1 群・1 領域・球体系

この場合の中性子拡散方程式は以下で記述される。

$$-D \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) + \Sigma_a \phi(r) = \frac{\nu \Sigma_f}{k} \phi(r) \quad (8)$$

<sup>1</sup>go\_chiba@eng.hokudai.ac.jp

この方程式の解析解を得るためには、 $\hat{\phi}(r) = r\phi(r)$  と変数変換すると容易となる。この場合、 $\phi(r)$  の  $r$  に対する微分は以下のように書き直せる。

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\hat{\phi}(r)}{dr} - \frac{\hat{\phi}(r)}{r^2} \quad (9)$$

従って、

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\hat{\phi}(r)}{dr} - \hat{\phi}(r) \right) = \frac{1}{r^2} \left( \frac{d\hat{\phi}(r)}{dr} + r \frac{d^2\hat{\phi}(r)}{dr^2} - \frac{d\hat{\phi}(r)}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2\hat{\phi}(r)}{dr^2} \quad (10)$$

より、これを式 (8) に代入することで、 $\hat{\phi}$  が従う以下の微分方程式が得られる。

$$-D \frac{d^2\hat{\phi}(r)}{dr^2} + \Sigma_a \hat{\phi}(r) = \frac{\nu\Sigma_f}{k} \hat{\phi}(r) \quad (11)$$

この微分方程式は一次元平板体系のものと同じ形となっており、一般解は以下となる。

$$\hat{\phi}(r) = E \cos(Br) + F \sin(Br) \quad (12)$$

従って、 $\phi(r)$  の一般解として以下が得られる。

$$\phi(r) = E \frac{\cos(Br)}{r} + F \frac{\sin(Br)}{r} \quad (13)$$

ここで、 $B$  の定義は平板体系の場合と同様である。球の中心、すなわち  $r = 0$  で  $\phi(r)$  が有限の値をとることから、 $E = 0$  が得られる<sup>2</sup>。また、この球体系の半径を  $R$  としたとき、 $\phi(R) = 0$  の境界条件と、 $\phi(r)$  が非負であるという条件を課すことにより、 $BR = \pi$  が得られ、最終的に以下が得られる。

エネルギー 1 群、1 領域、半径  $R$  の球体系の中性子実効増倍率の解析解は

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} \quad (15)$$

となり、中性子束分布は

$$\phi(r) = F \frac{\sin(Br)}{r} \quad (16)$$

となる。ここで、 $B^2 = (\pi/R)^2$  である。

### 3 エネルギー 1 群・2 領域・平板体系

ここでは厚さ  $a$  の燃料領域の両側が無限厚さ相当の中性子反射体領域に囲まれている平板体系を考える。そして、燃料領域の中央位置を  $x = 0$  とし、 $x > 0$  の領域での中性子拡散方程式を解くこととする（従って 2 領域体系となる）。

炉心領域と反射体領域の中性子拡散方程式は以下で記述される。

$$-D_c \frac{d^2\phi_c(x)}{dx^2} + \Sigma_{a,c}\phi_c(x) = \frac{\nu\Sigma_{f,c}}{k} \phi_c(x), \quad (17)$$

$$-D_r \frac{d^2\phi_r(x)}{dx^2} + \Sigma_{a,r}\phi_r(x) = 0, \quad (18)$$

断面積や中性子束に対する下添字「 $c$ 」、「 $r$ 」はそれぞれ炉心領域（「core」）、反射体領域（「reflector」）のものであることを示す。

<sup>2</sup>第二項については、ロピタルの定理より以下が得られる。

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(Br)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{B \cos(Br)}{1} = B \quad (14)$$

炉心領域の拡散方程式を1領域のときと同様に以下のように変形する。

$$\frac{d^2\phi_c(x)}{dx^2} + \frac{\nu\Sigma_{f,c}/k - \Sigma_{a,c}}{D_c}\phi_c(x) = \frac{d^2\phi_c(x)}{dx^2} + B_c^2\phi_c(x) = 0 \quad (19)$$

$x = 0$  で  $\phi_c(x)$  が対称であることから、この微分方程式の一般解として以下が得られる。

$$\phi_c(x) = E \cos(B_c x) \quad (20)$$

反射体領域の拡散方程式も同様に以下のように変形する。

$$\frac{d^2\phi_r(x)}{dx^2} - \frac{\Sigma_{a,r}}{D_r}\phi_r(x) = \frac{d^2\phi_r(x)}{dx^2} - \kappa_r^2\phi_r(x) = 0 \quad (21)$$

この微分方程式の一般解として

$$\phi_r(x) = G \exp(\kappa_r x) + H \exp(-\kappa_r x) \quad (22)$$

が得られるが、 $x \rightarrow \infty$  のときに  $\phi_r(x) \rightarrow 0$  となる条件より  $G = 0$  が得られ、 $\phi_r(x)$  として以下が得られる。

$$\phi_r(x) = H \exp(-\kappa_r x) \quad (23)$$

中性子拡散方程式においては中性子束  $\phi$  と中性子流  $D \frac{d\phi}{dx}$  が連続であることから、炉心領域と反射体領域の境界  $x = a/2$  で以下の式が満足されなければならない。

$$E \cos(B_c a/2) = H \exp(-\kappa_r a/2), \quad (24)$$

$$-D_c B_c E \sin(B_c a/2) = -D_r \kappa_r H \exp(-\kappa_r a/2) \quad (25)$$

この2式から以下の関係式を得ることが出来る。

$$\tan(B_c a/2) = \frac{\kappa_r D_r}{B_c D_c} \quad (26)$$

この式を解くことによって  $k$  の解析解を得ることが出来るが、それは容易ではないため、数値的に得ることになる。そのため、この式を以下のように変形する。

$$(B_c a/2) \tan(B_c a/2) = \frac{a}{2} \cdot \frac{\kappa_r D_r}{D_c} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma_{a,r} D_r}}{D_c} \quad (27)$$

ここで、炉心領域の中性子束  $\phi_c(x)$  が非負であるため  $B_c a/2 \leq \pi/2$  となること、 $x \tan(x)$  は  $x = 0$  でゼロ、 $x = \pi/2$  で  $\infty$  となり、かつ  $[0, \pi/2]$  で単調に増加する関数であることを考えると、上記の方程式を満足する  $B_c a/2$  が区間  $[0, \pi/2]$  において得られることが分かる。関数  $x \tan(x)$  を図1に示す。

また、中性子束分布における未定係数  $E$ 、 $H$  については、式(24)を用いて

$$H = \cos(B_c a/2) \exp(\kappa_r a/2) E \quad (28)$$

という関係式を得ることが出来る。

以上の議論を以下にまとめる。

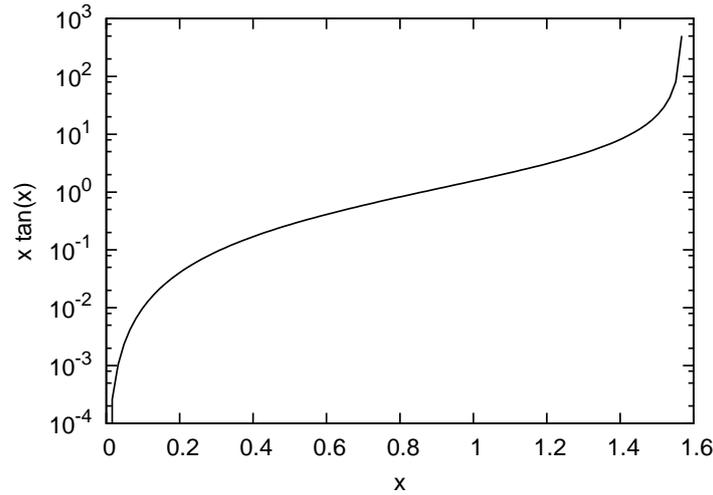


図 1: 関数  $x \tan(x)$

エネルギー 1 群で厚さ  $a$  の燃料 ( $[-a/2, a/2]$  で定義) が無限厚さの反射体で囲まれる平板体系の中性子実効増倍率の解析解は

$$k = \frac{\nu \Sigma_{f,c}}{\Sigma_{a,c} + D_c B_c^2} \quad (29)$$

となり、中性子束分布は

$$\phi_c(x) = E \cos(B_c x), \quad (30)$$

$$\phi_r(x) = E \cos(B_c a/2) \exp(-\kappa_r (x - a/2)) \quad (31)$$

となる (ただし  $x > 0$ )。ここで、 $B_c$  は以下を満足する。

$$(B_c a/2) \tan(B_c a/2) = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Sigma_{a,r} D_r}}{D_c} \quad (32)$$

また、

$$\kappa_r^2 = \frac{\Sigma_{a,r}}{D_r} \quad (33)$$

である。

ここで、反射体節約  $\delta$  について考えよう。

反射体節約は反射体付き炉心を裸の炉心に置き換えるためのパラメータであり、ある特定の燃料寸法を持った反射体付きの炉心を、その寸法に反射体節約を加えた寸法を持った裸炉心と見做すことが可能となる。従って、厚さ  $a$  の反射体付き平板炉心は厚さ  $a + 2\delta$  の裸平板炉心と見做すことが出来る。両者の実効増倍率が同一であるとするならば (実効増倍率が同一となることをもって反射体節約の定義とするならば)、裸平板炉心の実効増倍率の表式 (式 (6)) は反射体炉心のものと同じになることから、以下の式が成り立つ。

$$B_c^2 = \left( \frac{\pi}{a + 2\delta} \right)^2 \quad (34)$$

この式より以下が得られる。

$$\frac{a + 2\delta}{2} B_c = \frac{\pi}{2} \quad (35)$$

ここで、図 1 の横軸に対応する  $x$  が

$$x = \frac{a}{2} B_c \quad (36)$$

であることに着目すると、式 (27) の右辺の値によって決まる  $x (= a/2 \cdot B_c)$  の値の  $\pi/2$  との差異が反射体節約  $\delta$  と関連付けられることになる。例えば、 $x$  の値が  $\pi/2$  に近い場合には  $\delta$  は  $a$  に対して小さい値となり、逆に  $x$  の値が  $\pi/2$  から離れるほど  $\delta$  が  $a$  に対して大きな値となっていく。 $D_c$  が大きくなるほど、また  $D_r$  もしくは  $\Sigma_{a,r}$  が小さくなるほど式 (27) の右辺は小さくなっていくことから、 $x$  の値と  $\pi/2$  の差異が大きくなり、反射体節約が大きくなるということが分かる。この考え方について図 2 に示す。

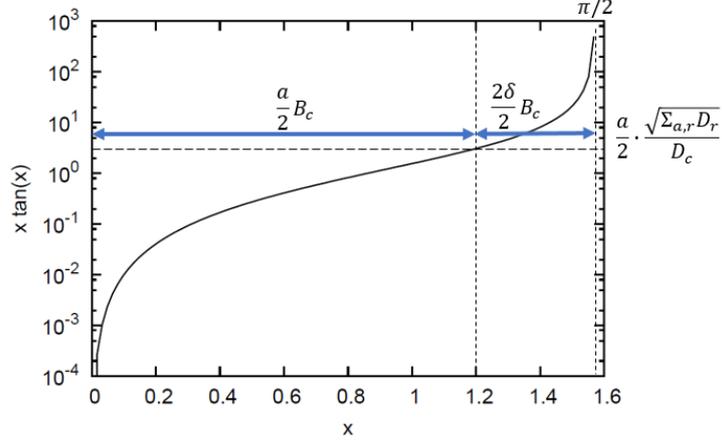


図 2: 反射体節約の評価例

#### 4 エネルギー 2 群・1 領域・平板体系

この場合の中性子拡散方程式は以下のように記述される。

$$-D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \Sigma_{r,1} \phi_1 = \frac{\chi_1}{k} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2), \quad (37)$$

$$-D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} + \Sigma_{r,2} \phi_2 = \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_1 + \frac{\chi_2}{k} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2) \quad (38)$$

ここで、断面積、中性子束の下添字はエネルギー群を示し、中性子束の位置依存性の表記は省略している。なお、 $\Sigma_r$  は除去断面積を示し、 $\Sigma_{r,1} = \Sigma_{a,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$ 、 $\Sigma_{r,2} = \Sigma_{a,2}$  となる。

一般的に、核分裂中性子は高速群に発生するものと見做すので、 $\chi_1 = 1$ 、 $\chi_2 = 0$  となり上式は以下のように簡略化される。

$$-D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \Sigma_{r,1} \phi_1 = \frac{1}{k} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2), \quad (39)$$

$$-D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} + \Sigma_{r,2} \phi_2 = \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_1 \quad (40)$$

これらの式に対して、漏洩項をゼロとすることにより、この系の中性子無限増倍率  $k_\infty$  を以下のように得ることが出来る。

$$k_\infty = \frac{\Sigma_{r,2} \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2} \nu \Sigma_{f,2}}{\Sigma_{r,1} \Sigma_{r,2}} \quad (41)$$

エネルギー 2 群の中性子拡散方程式 (39)、(40) を以下のように行列形式で記述する。

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi = \frac{d^2}{dx^2} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} - \frac{\nu \Sigma_{f,1}}{k D_1} & -\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{k D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \phi \quad (42)$$

この連立微分方程式では  $\phi_1$  と  $\phi_2$  が相互に依存する形式となっているため、これら  $\phi_i$  に対して線形変換を施すことで、互いに独立となる連立微分方程式を得ることとする。

行列  $A$  の固有値として  $\lambda_1, \lambda_2$  が得られた場合、以下の式が成り立つ。

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, \quad (43)$$

$$A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2 \quad (44)$$

ここで、 $\mathbf{x}_i$  は行列  $A$  の固有ベクトルである。これらの式はまとめて

$$A(\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2)B \quad (45)$$

と書けることから、行列  $A$  を以下のように記述することが可能である。

$$A = \mathbf{X}B\mathbf{X}^{-1} \quad (46)$$

ここで  $B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$  であり、 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2)$  である。これを式 (42) に代入し、両辺に左から  $\mathbf{X}^{-1}$  を作用させると、以下の式を得る。

$$\frac{d^2}{dx^2}(\mathbf{X}^{-1}\phi) = B\mathbf{X}^{-1}\phi \quad (47)$$

ここで、 $\psi = \mathbf{X}^{-1}\phi$  とおくと、式 (47) は次のように書ける。

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

これより、2本の独立な微分方程式が以下のように得られることが分かる。

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = \lambda_1\psi_1(x), \quad (49)$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} = \lambda_2\psi_2(x) \quad (50)$$

これらの方程式の一般解は、 $\lambda_j = \kappa^2 > 0$  のときは

$$\psi_j(x) = E \exp(\kappa x) + F \exp(-\kappa x) = G \cosh(\kappa x) + H \sinh(\kappa x) \quad (51)$$

と得られ、 $\lambda_j = -B^2 < 0$  のときは

$$\psi_j(x) = G \cos(Bx) + H \sin(Bx) \quad (52)$$

と得られる。

行列  $A$  の固有値  $\lambda$  は以下のように計算する。まず、行列  $(A - \lambda I)$  の行列式がゼロになるという条件を用いて以下の方程式を得る。なお、 $I$  は単位行列である。

$$\left( \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1} - \lambda \right) \left( \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \lambda \right) - \frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}\nu\Sigma_{f,2}}{kD_1D_2} = 0 \quad (53)$$

これを  $\lambda$  について整理し、以下の式を得る。

$$\lambda^2 - \left( \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1} \right) \lambda + \frac{\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}}{D_1D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}\Sigma_{r,2} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}\nu\Sigma_{f,2}}{kD_1D_2} = 0 \quad (54)$$

式 (41) で定義される  $k_\infty$  を用いることで、この式は以下のように簡略化して記述することが出来る。

$$\lambda^2 - \left( \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1} \right) \lambda + \frac{\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}}{D_1D_2} \left( 1 - \frac{k_\infty}{k} \right) = 0 \quad (55)$$

解の公式を用いて、 $\lambda$  は以下のように得られる。

$$\frac{\left( \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1} \right)^2 - \frac{4\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}}{D_1D_2} \left( 1 - \frac{k_\infty}{k} \right)}}{2} \quad (56)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1}, \quad (57)$$

$$\beta = -\frac{4\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}}{D_1D_2} \left(1 - \frac{k_\infty}{k}\right) > 0 \quad (58)$$

とおくと、 $\lambda$  は

$$\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta}}{2} \quad (59)$$

と記述でき、 $\alpha$  がいかなる値をとった場合でも  $\lambda$  として正と負の解が一つずつ得られることが分かる<sup>3</sup>。そこで、これらを  $\lambda_1 = \kappa^2$ 、 $\lambda_2 = -B^2$  とおくと、 $\psi_1$ 、 $\psi_2$  として以下が得られる。なお、この体系の中心位置を  $x = 0$  にとった場合、 $x = 0$  で  $\phi_1(x)$ 、 $\phi_2(x)$  は対称となることから、非対称関数である  $\sinh$ 、 $\sin$  にかかる未定係数はゼロとなる。従って、以下が得られる（未定係数の記号は変更した）。

$$\psi_1(x) = E \cosh(\kappa x), \quad (60)$$

$$\psi_2(x) = F \cos(Bx) \quad (61)$$

また、外部境界条件として  $\phi_1(a/2) = \phi_2(a/2) = 0$  を課すと、 $\phi = \mathbf{X}\psi$  より以下の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \phi_1(a/2) \\ \phi_2(a/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \psi_1(a/2) \\ \psi_2(a/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \cosh(\kappa a/2) \\ F \cos(Ba/2) \end{pmatrix} \quad (62)$$

行列  $\mathbf{X}$  は non-singular であり、逆行列が存在することから、以下が得られる。

$$\begin{pmatrix} E \cosh(\kappa a/2) \\ F \cos(Ba/2) \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (63)$$

関数  $\cosh(x)$  は全ての  $x$  について正の値をとることから、 $E = 0$  が得られる。また、 $F = 0$  とすると  $\phi = \mathbf{0}$  という自明な解が得られてしまうことになるため、 $\cos(Ba/2) = 0$  が得られる。従って、 $Ba/2 = \pi/2$ 、すなわち  $B = \pi/a$  が得られる。その結果、中性子束分布として、

$$\phi_1(x) = F \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), \quad (64)$$

$$\phi_2(x) = SF \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (65)$$

が得られる<sup>4</sup>。式 (65) における係数  $S$  は行列  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda_2$  に対応する固有ベクトルから決められるが、これら中性子束が拡散方程式 (40) を満足することが分かっているため、これらを式 (40) に代入することにより以下のように  $S$  を決めることが出来る。

$$S = \frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2(\pi/a)^2 + \Sigma_{r,2}} = \frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2B^2 + \Sigma_{r,2}} \quad (66)$$

また、 $\lambda_2 = -B^2$  としてこれを式 (54) に代入することで、中性子実効増倍率  $k$  の解析解を得ることが出来る。

以上の議論を以下にまとめる。

<sup>3</sup>なお、 $\alpha = \frac{1}{D_1} \left( \Sigma_{r,1} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{k} \right) + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2}$  と書いたとき、一般的には  $\Sigma_{r,1} > \nu\Sigma_{f,1}/k$  となるため、 $\alpha$  は正となることが分かる。

<sup>4</sup>これらの式における  $F$  は未定係数を示すパラメータとして用いており、式 (61) 等における未定係数  $F$  と一致することを意味するものではない。

エネルギー 2 群で厚さ  $a$  の平板 ( $[-a/2, a/2]$  で定義) 体系の中性子実効増倍率の解析解は

$$k = \frac{(\Sigma_{r,2} + D_2 B^2) \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2} \nu \Sigma_{f,2}}{(D_1 B^2 + \Sigma_{r,1})(D_2 B^2 + \Sigma_{r,2})} \quad (67)$$

となり、中性子束分布は

$$\phi_1(x) = F \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right), \quad (68)$$

$$\phi_2(x) = \frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2 B^2 + \Sigma_{r,2}} F \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (69)$$

となる。ここで、 $B^2 = (\pi/a)^2$  である。

上記の中性子実効増倍率の表式は以下のように書き直せる。

$$k = \frac{\nu \Sigma_{f,1}}{D_1 B^2 + \Sigma_{r,1}} + \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2} \nu \Sigma_{f,2}}{(D_1 B^2 + \Sigma_{r,1})(D_2 B^2 + \Sigma_{r,2})} \quad (70)$$

右辺第一項は

$$\frac{\nu \Sigma_{f,1}}{D_1 B^2 + \Sigma_{r,1}} = \frac{\Sigma_{a,1}}{D_1 B^2 + \Sigma_{r,1}} \cdot \frac{\nu \Sigma_{f,1}}{\Sigma_{a,1}} = P_{NL,1} k_{\infty,1} \quad (71)$$

と書け、高速中性子が漏れない確率  $P_{NL,1}$  と、高速中性子のみによる無限増倍率  $k_{\infty,1}$  の積で記述されることが分かる。一方、右辺第二項は、

$$\frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2} \nu \Sigma_{f,2}}{(D_1 B^2 + \Sigma_{r,1})(D_2 B^2 + \Sigma_{r,2})} = \frac{\Sigma_{a,1}}{D_1 B^2 + \Sigma_{r,1}} \cdot \frac{\Sigma_{1 \rightarrow 2}}{\Sigma_{a,1}} \cdot \frac{\Sigma_{a,2}}{D_2 B^2 + \Sigma_{r,2}} \cdot \frac{\nu \Sigma_{f,2}}{\Sigma_{a,2}} = P_{NL,1} P_{SCT} P_{NL,2} k_{\infty,2} \quad (72)$$

と書け、高速中性子が漏れない確率、高速中性子が吸収されずに減速される確率  $P_{SCT}$ 、熱中性子が漏れない確率  $P_{NL,2}$ 、熱中性子のみによる無限増倍率  $k_{\infty,2}$  の積で記述されることが分かる。

## 5 エネルギー 2 群・2 領域・平板体系

エネルギー 2 群での反射体付き平板体系の場合は、エネルギー 1 群の場合と同様に、炉心領域と反射体領域で拡散方程式を立てて、炉心領域と反射体領域の境界における中性子束と中性子流の連続性を満足させればよい<sup>5</sup>。

炉心領域の中心位置を  $x = 0$  とし、反射体厚さが無限相当であるとする。

このとき、炉心領域の中性子束分布  $\phi_{c,g}(x)$  は、前節で説明したように、 $\cos$  と  $\cosh$  の重ね合わせで記述されることになる。

$$\phi_{c,1}(x) = F \cos(B_c x) + G \cosh(\kappa_c x), \quad (73)$$

$$\phi_{c,2}(x) = S_{c1} F \cos(B_c x) + S_{c2} G \cosh(\kappa_c x) \quad (74)$$

ここで、 $B_c$ 、 $\kappa_c$  は炉心領域で定義される行列  $\mathbf{A}_c$  の固有値から、 $S_{c1}$ 、 $S_{c2}$  は固有ベクトルから、それぞれ決められる。また、 $F$ 、 $G$  は未定係数である。

一方、反射体領域で定義される行列  $\mathbf{A}_r$  は以下のように記述されることになる。

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} & 0 \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{pmatrix} \quad (75)$$

従って、固有値として、いずれも正の値である  $\Sigma_{r,1}/D_1$ 、 $\Sigma_{r,2}/D_2$  が得られる。そこで、これらを  $\kappa_{r,j}^2 = \Sigma_{r,j}/D_j$  と定義する。反射体領域の中性子束分布は、指数関数もしくは双曲線関数の重ね合わせで記述され

<sup>5</sup>本節では、三澤先生、宇根崎先生、卞先生の「原子炉物理実験」を参考にした。

ることになるが、 $x \rightarrow \infty$  のときに  $\phi \rightarrow 0$  となる境界条件を適用することを考えると、指数関数で記述したほうが便利である。このとき、 $\exp(\kappa_{r,j}x)$  の項はこの境界条件を満足しないことから、反射体領域の中性子束分布は  $\exp(-\kappa_{r,j}x)$  の重ね合わせで記述されることになる。また、行列  $A_r$  の固有ベクトルを求めると、 $\lambda = \kappa_{r,2}^2$  に対応するものはその第一成分がゼロになることが容易に示されるため、固有ベクトルで構成される行列  $X$  は以下のように記述されることになる。

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad (76)$$

中性子束  $\phi$  は  $\phi = X\psi$  より求められることから、第一群の中性子束については単一の指数関数  $\exp(-\kappa_{r,1}x)$  で記述されることになる。以上より、反射体領域の中性子束分布  $\phi_{r,g}(x)$  は以下となる。

$$\phi_{r,1}(x) = J \exp(-\kappa_{r,1}x), \quad (77)$$

$$\phi_{r,2}(x) = S_r J \exp(-\kappa_{r,1}x) + K \exp(-\kappa_{r,2}x) \quad (78)$$

ここで、 $S_r$  は行列  $A_r$  の固有ベクトルから決められる。また、 $J$ 、 $K$  は未定係数である。

以上で、炉心領域と反射体領域の中性子束分布が得られたので、これらに対して以下で示される境界位置での中性子束と中性子流の連続条件を課す。なお、炉心領域の厚さを  $a$  とするので境界位置は  $x = a/2$  となる。

$$\phi_{c,1}(a/2) = \phi_{r,1}(a/2), \quad (79)$$

$$D_{c,1} \left. \frac{d\phi_{c,1}}{dx} \right|_{x=a/2} = D_{r,1} \left. \frac{d\phi_{r,1}}{dx} \right|_{x=a/2}, \quad (80)$$

$$\phi_{c,2}(a/2) = \phi_{r,2}(a/2), \quad (81)$$

$$D_{c,2} \left. \frac{d\phi_{c,2}}{dx} \right|_{x=a/2} = D_{r,2} \left. \frac{d\phi_{r,2}}{dx} \right|_{x=a/2} \quad (82)$$

これらより、以下の式が得られる。

$$F \cos(B_c a/2) + G \cosh(\kappa_c a/2) = J \exp(-\kappa_{r,1} a/2), \quad (83)$$

$$-D_{c,1} B_c F \sin(B_c a/2) + D_{c,1} \kappa_c G \sinh(\kappa_c a/2) = -D_{r,1} \kappa_{r,1} J \exp(-\kappa_{r,1} a/2), \quad (84)$$

$$S_{c1} F \cos(B_c a/2) + S_{c2} G \cosh(\kappa_c a/2) = S_r J \exp(-\kappa_{r,1} a/2) + K \exp(-\kappa_{r,2} a/2), \quad (85)$$

$$\begin{aligned} -D_{c,2} B_c S_{c1} F \sin(B_c a/2) + D_{c,2} \kappa_c S_{c2} G \sinh(\kappa_c a/2) \\ = -D_{r,2} \kappa_{r,1} S_r J \exp(-\kappa_{r,1} a/2) - D_{r,2} \kappa_{r,2} K \exp(-\kappa_{r,2} a/2) \end{aligned} \quad (86)$$

ここで、 $\mu = B_c a/2$ 、 $\eta = \kappa_c a/2$ 、 $\xi = -\kappa_{r,1} a/2$ 、 $\epsilon = -\kappa_{r,2} a/2$  とおくと、上述の式は行列形式で以下のように書ける。

$$Mn = 0 \quad (87)$$

ここで、

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu & \cosh \eta & -\exp(\xi) & 0 \\ -D_{c,1} B_c \sin \mu & D_{c,1} \kappa_c \sinh \eta & D_{r,1} \kappa_{r,1} \exp(\xi) & 0 \\ S_{c1} \cos \mu & S_{c2} \cosh \eta & -S_r \exp(\xi) & -\exp(\epsilon) \\ -D_{c,2} B_c S_{c1} \sin \mu & D_{c,2} \kappa_c S_{c2} \sinh \eta & D_{r,2} \kappa_{r,1} S_r \exp(\xi) & D_{r,2} \kappa_{r,2} \exp(\epsilon) \end{pmatrix} \quad (88)$$

$$n = (F \ G \ J \ K)^T \quad (89)$$

である。式 (87) について、 $n \neq 0$  という自明ではない解を得るためには、行列  $M$  が singular でなくてはならないことになる。従って、 $M$  の行列式がゼロという条件が得られる。 $M$  の行列式は以下のように記述

できる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -D_{c,1}B_c \tan \mu & D_{c,1}\kappa_c \tanh \eta & -D_{r,1}\kappa_{r,1} & 0 \\ S_{c1} & S_{c2} & S_r & 1 \\ -D_{c,2}B_c S_{c1} \tan \mu & D_{c,2}\kappa_c S_{c2} \tanh \eta & -D_{r,2}\kappa_{r,1} S_r & -D_{r,2}\kappa_{r,2} \end{vmatrix} = 0 \quad (90)$$

これを頑張って計算すると、以下の式が得られる。

$$(B_c a/2) \tan(B_c a/2) = \frac{a}{2} \cdot \frac{[-D_{r,1}D_{c,2}S_{c2}\kappa_{r,1} + D_{c,1}D_{r,2}\{\kappa_{r,2}(S_{c1} - S_r) + \kappa_{r,1}S_r\}]\kappa_c \tanh \eta + D_{r,1}D_{r,2}(S_{c1} - S_{c2})\kappa_{r,1}\kappa_{r,2}}{D_{c,1}D_{c,2}(S_{c1} - S_{c2})\kappa_c \tanh \eta + D_{r,1}D_{c,2}S_{c1}\kappa_{r,1} + D_{c,1}D_{r,2}\{S_r(\kappa_{r,2} - \kappa_{r,1}) - S_{c2}\kappa_{r,2}\}} \quad (91)$$

実効増倍率の解析解はこの条件を満足するものとして得られ、ベクトル  $\mathbf{n}$  も決められる。なお、ベクトル  $\mathbf{n}$  の大きさは任意であるため、例えば  $G$  に対する比として  $F$ 、 $J$ 、 $K$  が決められることになる。エネルギー 1 群の反射体付き炉心に関しても同様の式 (式 (27)) が得られているが、そこでは右辺は原子炉の大きさと断面積の値のみで決まっていた。一方、上式では実効増倍率に依存するパラメータである  $\kappa_c$ 、 $S_{c1}$ 、 $S_{c2}$  が右辺に含まれている。

$\kappa_c$ 、 $B_c$  は式 (56) により定義されるが、一般的には  $B_c \ll \kappa_c$  となる。従って、 $\pi/2 \approx B_c a/2 \ll \kappa_c a/2 = \eta$  より  $\tanh \eta \approx 1$  と見做すことが出来、式 (91) は少しだけ簡略化される。関数  $\tanh(x)$  を図 3 に示すが、 $x$  が 2 を超える程度で  $\tanh(x) \approx 1$  と見做すことが出来ることが分かるであろう。

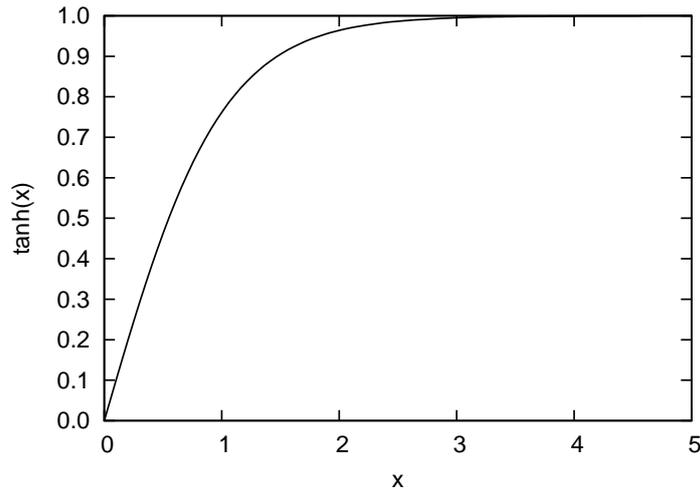


図 3: 関数  $\tanh(x)$