

核計算の基礎：2群中性子拡散方程式の解析解

北海道大学工学研究院

千葉 豪¹

中性子拡散方程式（以下、拡散方程式）の解析解の導出方法に関して、平板体系・2領域・エネルギー1群の問題について学んだ後の次のステップとして、対象とする問題のエネルギー群数を2に拡張した場合の解説が本稿のミッションである。なお、拡散方程式の解析解の導出方法に関しては、私自身が第50回炉物理夏期セミナーテキストに寄稿しており^[1]²、本稿の内容にそれと重複する部分もあることを予め断っておく。

1 エネルギー1群問題の復習

一次元多領域・エネルギー1群の問題については、拡散方程式の解析解は以下の流れで得られるであろう。ここで、「多領域」と言っているのは、複数の異なる均質媒質領域で体系が構成されており、それぞれの均質媒質では反応断面積が空間的に一定である、ということに対応している。なお、以降では、考えている体系の全領域数を I とする。

- 各領域で拡散方程式の一般解を導出する。拡散方程式は二階の微分方程式であるので、各領域で2個の未定係数を含む一般解が得られる。従って、未定係数の総数は $2I$ となる。
- 体系の外部境界に対して境界条件が与えられるため、外部境界条件の式が体系左端と右端で計2つ得られる。
- 領域間の内部境界において中性子束と中性子流の連続条件が課される（本稿ではこれを内部境界条件と呼称する）ので、計 $2 \times (I - 1)$ の内部境界条件の式が得られる。

以上より、「未定係数の総数が $2I$ 、方程式の本数が $2 + 2 \times (I - 1) = 2I$ となり、両者が同一となるため、未定係数を一意に決めることが出来る」、と考えてしまうかもしれないが、それでは間違いとなる場合があるので注意が必要である。

では、どのような場合に間違いとなるのであろうか？

それは、解こうとしている方程式が固有値方程式の場合である。

固有値方程式の形式では、各領域の拡散方程式は以下のように書ける。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \frac{\nu \Sigma_f}{k} \phi(x) \quad (1)$$

従って、各領域の拡散方程式の一般解は2つの関数の重ね合わせで以下のように記述される。ここで、下添え字は領域の番号を示す。

$$\phi_i(x) = a_i f_i(x) + b_i g_i(x) \quad (2)$$

また、外部境界条件は一般に以下のような形式で与えられる。

$$\alpha \phi + \beta \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (3)$$

ここで $\beta = 0$ とすればゼロ中性子束条件となり、 $\alpha = 0$ とすればゼロ中性子流条件（反射境界条件）となる。例えば、領域1の左端を外部境界とし、その位置を $x = 0$ とするならば、式(2)を式(3)に代入して、以下の式を得ることが出来る。

$$\alpha (a_1 f_1(0) + b_1 g_1(0)) + \beta (a_1 f_1'(0) + b_1 g_1'(0)) = 0 \quad (4)$$

¹go_chiba@eng.hokudai.ac.jp

²個人的にはかなり出来が良いテキストだと思っている（特に図2の反射体節約の解説など）。

これを未知数 a_1 、 b_1 に関して整理すれば以下のように書き直せる。

$$(\alpha f_1(0) + \beta f_1'(0)) a_1 + (\alpha g_1(0) + \beta g_1'(0)) b_1 = 0 \quad (5)$$

また、領域 i と領域 $i+1$ が挟む内部境界の位置を $x = \bar{x}$ とするならば、中性子束と中性子流の連続条件から以下が得られる。

$$a_i f_i(\bar{x}) + b_i g_i(\bar{x}) = a_{i+1} f_{i+1}(\bar{x}) + b_{i+1} g_{i+1}(\bar{x}), \quad (6)$$

$$-D_i (a_i f_i'(\bar{x}) + b_i g_i'(\bar{x})) = -D_{i+1} (a_{i+1} f_{i+1}'(\bar{x}) + b_{i+1} g_{i+1}'(\bar{x})) \quad (7)$$

これらより、外部境界条件と内部境界条件の式を計 $2I$ 本立てたとき、以下のような連立方程式となることが想像できるであろう。

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,2I} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,2I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{2I,1} & m_{2I,2} & \cdots & m_{2I,2I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_I \\ b_I \end{pmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (8)$$

このとき、行列 \mathbf{M} が正則であるならば（逆行列が存在するならば）、式 (8) の両辺に左から \mathbf{M}^{-1} を作用させることで、 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{n} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{0}$ より $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ という自明な解が得られてしまい、意味のある解を得ることが出来ない。従って、意味のある解を得るためには、行列 \mathbf{M} が正則ではないという条件が必要になる。言い換えれば、拡散方程式の固有値 k はこの条件が満足されるように決められる、ということになる。

また、このとき、行列 \mathbf{M} の階数が $2I - 1$ であるため、 \mathbf{n} の要素のうち何か一つに値を与えることにより、それ以外の要素の値が一意に決まる。例えば a_1 にある値が与えられたとするならば、式 (8) は以下のように書き直せる。

$$\begin{pmatrix} m_{1,2} & \cdots & m_{1,2I} \\ m_{2,2} & \cdots & m_{2,2I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{2I,2} & \cdots & m_{2I,2I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_I \\ b_I \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{n}} = -a_1 \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{2I,1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$\hat{\mathbf{M}}$ は正則で逆行列が存在するため、

$$\hat{\mathbf{n}} = -a_1 \hat{\mathbf{M}}^{-1} \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{2I,1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

となり、 a_1 以外の要素は全て a_1 の定数倍で記述できることが分かる。このことは、固有値方程式を解く場合には中性子束レベルを一意に決めることができない、ということに対応し、物理的には臨界状態の原子炉の中性子束レベルは一意には決まらない（任意である）ということに対応している。

馴染みが深いであろう 1 領域の問題でも、基本的な考え方は上と同様である。例えば、厚さ X で外部境界条件が両端ともゼロ中性子束である 1 領域の原子炉を考えよう。この体系の拡散方程式の一般解は

$\phi(x) = E \cos(Bx) + F \sin(Bx)$ と与えられるため、左右の外部境界の位置をそれぞれ $x = 0$ 、 $x = X$ とするならば、式 (8) に対応するものとして以下が得られる。

$$\begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(BX) & \sin(BX) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(BX) & \sin(BX) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

この問題の行列 M が正則ではない条件は、行列式がゼロ、すなわち $1 \times \sin(BX) - 0 \times \cos(BX) = \sin(BX) = 0$ であるので、 $BX = n\pi$ が得られる。また、このとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(BX) & \sin(BX) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(BX) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

となるので、 $E = 0$ となること、また F は任意の値をとることが分かる。これらの結果、 $\phi(x)$ として $F \sin(Bx)$ (ただし $B = n\pi/X$) が得られる。

話がだいぶ遡ってしまうことになるが、「未定係数の総数が $2I$ 、方程式の本数も $2I$ となり、両者が同一となるため、未定係数を一意に決めることが出来る」ということは、外部中性子源が体系内に置かれた未臨界状態を対象とするときには成り立つ。このようなときは以下の拡散方程式を解くことになる。

$$-\frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \right) + \Sigma_a(x)\phi(x) = \nu\Sigma_f(x)\phi(x) + Q(x) \quad (13)$$

この方程式には固有値 k は含まれておらず、炉物理の分野では「固定源方程式」と呼ぶ。ある均質媒質中に一定の強さの外部中性子源が空間的に均一に分布しているとするならば、この領域の拡散方程式は以下となる。

$$-D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a\phi(x) = \nu\Sigma_f\phi(x) + Q \quad (14)$$

この微分方程式は非同次方程式であり、その一般解は特解と同次方程式の一般解の和で記述される。この例のように非同次項 (Q) が定数である場合には何らかの定数が特解となり得るため、特解を容易に得ることが出来る³。この問題の場合、特解として $C = Q/(\Sigma_a - \nu\Sigma_f)$ が得られる。 $Q = 0$ とした同次方程式の一般解は 2 つの関数の重ね合わせになるので、この非同次微分方程式の一般解は以下のようなものになる。

$$\phi(x) = af(x) + bg(x) + C \quad (15)$$

従って、境界条件から得られる式 (8) 相当のものは以下のようなになる。

$$Mn = q \neq 0 \quad (16)$$

従って、 $n = M^{-1}q$ が得られ、一意に n 、すなわち各領域の中性子束に対する未定係数 (すなわち中性子束) が得られることが分かる。

以上、少々脱線気味となってしまったが、エネルギー 1 群の多領域拡散方程式については、各領域で一般解を求め、境界条件の式から一般解の未定係数を決定する、という流れとなる。

2 エネルギー 2 群の燃料 1 領域問題

ここからエネルギー 2 群の問題を議論していくが、最初は簡単のため燃料 1 領域の問題を考えよう。また、これ以降は固有値方程式のみを扱い、上方散乱は考えないものとする。

³ 解が定数であるとき、微分を含む項は全てゼロとなるため、非同次項以外で残るのは定数のみとなる。従って、非同次項が定数であれば、定数が特解となりうる。

エネルギー 2 群・1 領域の拡散方程式は以下のように記述される。

$$-D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \Sigma_{r,1} \phi_1 = \frac{\chi_1}{k} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2), \quad (17)$$

$$-D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} + \Sigma_{r,2} \phi_2 = \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_1 + \frac{\chi_2}{k} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2) \quad (18)$$

ここで、断面積、中性子束の下添字はエネルギー群を示し、中性子束の位置依存性の表記は省略している。なお、 Σ_r は除去断面積を示し、 $\Sigma_{r,1} = \Sigma_{a,1} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2}$ 、 $\Sigma_{r,2} = \Sigma_{a,2}$ となる。

一般的に、核分裂中性子は高速群のみに発生するものと見做すので、 $\chi_1 = 1$ 、 $\chi_2 = 0$ となり上式は以下のように簡略化される。

$$-D_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \Sigma_{r,1} \phi_1 = \frac{1}{k} (\nu \Sigma_{f,1} \phi_1 + \nu \Sigma_{f,2} \phi_2), \quad (19)$$

$$-D_2 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2} + \Sigma_{r,2} \phi_2 = \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \phi_1 \quad (20)$$

これらの式に対して、漏洩項（左辺第一項）をゼロとすることにより、この系の中性子無限増倍率 k_∞ を以下のように得ることが出来る。

$$k_\infty = \frac{\Sigma_{r,2} \nu \Sigma_{f,1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2} \nu \Sigma_{f,2}}{\Sigma_{r,1} \Sigma_{r,2}} \quad (21)$$

さて、ここで式 (19)、(20) で示した拡散方程式を眺めてみよう。1 群の中性子束に対する式 (19) においては、右辺の核分裂中性子源の項に 2 群の中性子束が現れている。一方、2 群の中性子束に対する式 (20) においては、右辺の散乱中性子源の項に 1 群の中性子束が現れている。このようにエネルギー群の間で相互に干渉し合う構造となっており、それぞれの微分方程式を独立に解くことが出来ない。そこで、これら ϕ_i に対して線形変換を施すことで、互いに独立となる連立微分方程式を得ることとする [2]。

前掲のエネルギー 2 群の中性子拡散方程式 (19)、(20) を以下のように行列形式で記述する。

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi = \frac{d^2}{dx^2} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} - \frac{\nu \Sigma_{f,1}}{k D_1} & -\frac{\nu \Sigma_{f,2}}{k D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \phi \quad (22)$$

行列 \mathbf{A} の固有値として λ_1 と λ_2 が得られた場合、以下の式が成り立つ。

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1, \quad (23)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad (24)$$

ここで、 \mathbf{x}_i は行列 \mathbf{A} の固有ベクトルである。これらの式はまとめて

$$\mathbf{A} (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) \mathbf{B} \quad (25)$$

と書けることから、行列 \mathbf{A} を以下のように記述することが可能である。

$$\mathbf{A} = \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{X}^{-1} \quad (26)$$

ここで $\mathbf{B} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ であり、 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2)$ である。これを式 (22) に代入し、両辺に左から \mathbf{X}^{-1} を作用させると、以下の式を得る。

$$\frac{d^2}{dx^2} (\mathbf{X}^{-1} \phi) = \mathbf{B} \mathbf{X}^{-1} \phi \quad (27)$$

ここで、 $\psi = \mathbf{X}^{-1} \phi$ とおくと、式 (27) は次のように書ける。

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

これより、2本の独立な微分方程式が以下のように得られることが分かる。

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = \lambda_1\psi_1(x), \quad (29)$$

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} = \lambda_2\psi_2(x) \quad (30)$$

ここで、 ψ_j をモード束と呼称するものとする。モード束はそれぞれが独立の微分方程式に従うため、その一般解を独立に得ることが出来る。全てのモード束の解が得られた後、逆の線形変換を施すこと、すなわち $\phi = X\psi$ によって、中性子束を得ることが出来る。

モード束が従う微分方程式の一般解は、固有値 λ_j の符号によって異なる。固有値が正、すなわち $\lambda_j = \kappa^2 > 0$ のときは、双曲線関数（指数関数）として

$$\psi_j(x) = E \cosh(\kappa x) + F \sinh(\kappa x) = G \exp(\kappa x) + H \exp(-\kappa x) \quad (31)$$

と得られ、固有値が負、すなわち $\lambda_j = -B^2 < 0$ のときは、三角関数として

$$\psi_j(x) = E \cos(Bx) + F \sin(Bx) \quad (32)$$

と得られる。三角関数と双曲線関数の例を Fig. 1 に示す。

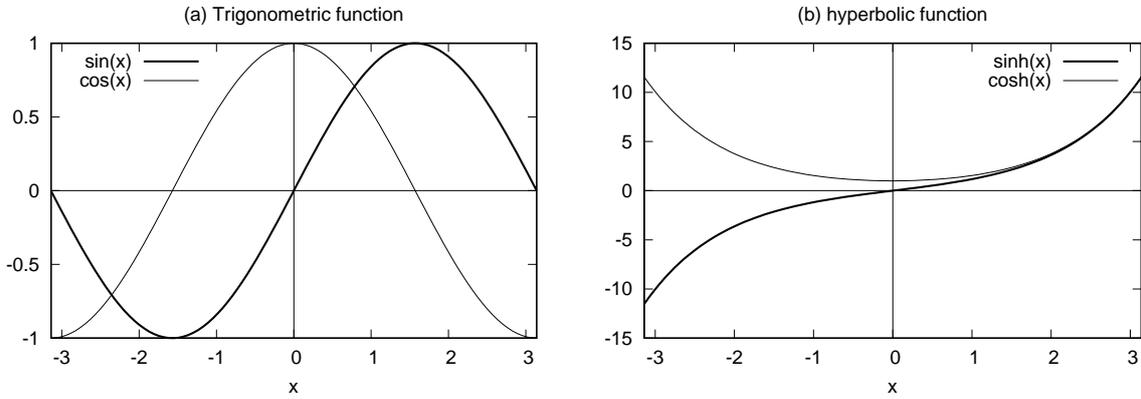


Fig. 1: 三角関数と双曲線関数の例

エネルギー 2 群の場合、行列 A の固有値 λ は以下のように計算できる。

式 (23)、(24) より、 $(A - \lambda I) \mathbf{x}_i = 0$ が得られる (I は単位行列)。この左辺の行列は正則とはならないため、行列 $(A - \lambda I)$ の行列式がゼロになるという条件を用いて以下の方程式が得られる。

$$\left(\frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1} - \lambda \right) \left(\frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \lambda \right) - \frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \nu\Sigma_{f,2}}{kD_1 D_2} = 0 \quad (33)$$

これを λ について整理すると、以下の式を得る。

$$\lambda^2 - \left(\frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1} \right) \lambda + \frac{\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}}{D_1 D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}\Sigma_{r,2} + \Sigma_{s,1 \rightarrow 2} \nu\Sigma_{f,2}}{kD_1 D_2} = 0 \quad (34)$$

一見、かなり複雑な式となっているが、ここで式 (21) で定義される k_∞ を用いることで、以下のように簡略化して記述することが出来る。

$$\lambda^2 - \left(\frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1} \right) \lambda + \frac{\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}}{D_1 D_2} \left(1 - \frac{k_\infty}{k} \right) = 0 \quad (35)$$

さらに、

$$\alpha = \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} + \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} - \frac{\nu\Sigma_{f,1}}{kD_1}, \quad (36)$$

$$\beta = -\frac{4\Sigma_{r,1}\Sigma_{r,2}}{D_1 D_2} \left(1 - \frac{k_\infty}{k} \right) \quad (37)$$

とくと、解の公式を用いて、 λ は以下のように得られる。

$$\lambda = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta}}{2} \quad (38)$$

ここで、 α と β について考えよう。 α には $-\nu\Sigma_{f,1}/(kD_1)$ という負の項が含まれるが、熱中性子炉では一般的に $\nu\Sigma_{f,1} \approx 0$ であるので、この項は無視出来る程度となり、 $\alpha > 0$ と考えて良い。また、 β について考えると、 $k_\infty > k$ であることから $\beta > 0$ であり、 k が k_∞ に近づくにつれて $\beta \rightarrow 0$ となることが分かる。これらより、 $\alpha > 0$ 、 $\beta > 0$ なので、 λ として正と負の解が一つずつ得られること、すなわち、エネルギー 2 群の拡散方程式の一般解は 2 つのモード束の重ね合わせで記述され、うち 1 つのモード束は三角関数、もう 1 つのモード束は双曲線関数（指数関数）となることが分かる⁴。

ここで、KUCA の C 架台の単位燃料格子である C30、C35、C45 の 2 群断面積のデータを使って α 、 β 、 λ を計算した結果を示す。はじめに α 、 β についての計算結果を Fig. 2 に示す。なお、横軸は実効増倍率 k としており、C30、C35、C45 の k_∞ はそれぞれ 1.7165、1.6867、1.6265 である。これらの図より、 $|\alpha| \gg |\beta|$ であること、 k が k_∞ に近づくにつれて β がゼロに漸近していくことが分かる。次に、これらから得た λ に

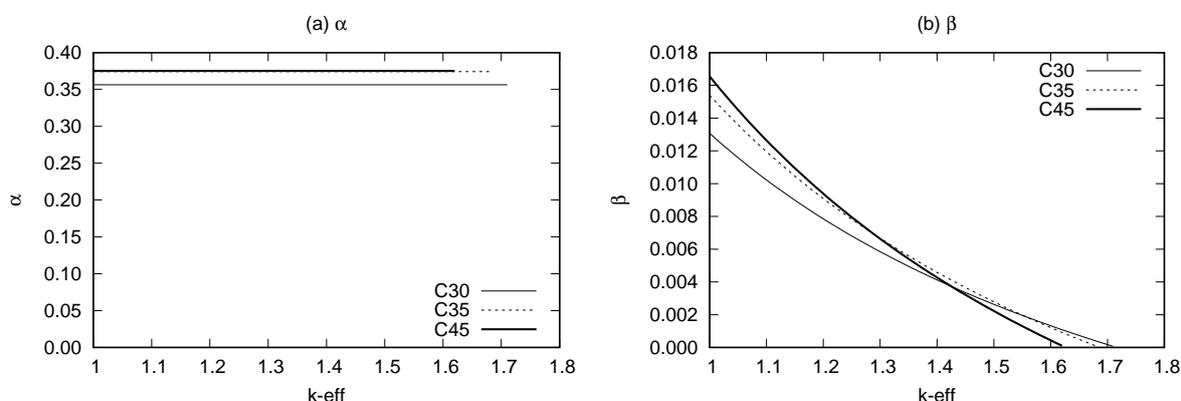


Fig. 2: KUCA の C 架台の単位燃料格子における α 、 β

についての計算結果を Fig. 3 に示す。 $|\alpha| \gg |\beta|$ なので式 (38) より、正の固有値は $\lambda_1 \approx \alpha$ となること、負の固有値は $\lambda_2 \approx -\sqrt{|\beta|}$ となることが分かるが、実際の数値計算結果もそのようになっていることが確認できる。 λ_1 はその絶対値が大きく系の実効増倍率に依存しない一方、 λ_2 はその絶対値が λ_1 に比べて小さく、かつ系の実効増倍率に強く依存する。系の実効増倍率に依存するという事は、原子炉の幾何形状、すなわち中性子の漏れの程度に依存していることになるため、 $\lambda_2 = -B^2$ としたならば、 $\cos(Bx)$ と $\sin(Bx)$ で記述されるモード束は中性子の漏れに強く依存する。一方、 $\lambda_1 = \kappa^2$ としたときの $\cosh(\kappa x)$ 、 $\sinh(\kappa x)$ は、ほぼ媒質によってのみ決まるモード束であると考えることが出来る。

さて、以降では燃料 1 領域の原子炉における 1 群、2 群の中性子束を求めよう。今考えている問題は 1 領域なので、この体系の中心位置を $x = 0$ にとった場合には $x = 0$ で $\phi_1(x)$ 、 $\phi_2(x)$ は対称となる。従って、モード束の一般解のうち非対称関数である \sinh 、 \sin に乗ぜられる未定係数はゼロとなる。この問題での行列 A の固有値を前述のように $\lambda_1 = \kappa^2$ 、 $\lambda_2 = -B^2$ とおくと、 ψ_1 、 ψ_2 として以下が得られる。

$$\psi_1(x) = E_1 \cosh(\kappa x), \quad (39)$$

$$\psi_2(x) = E_2 \cos(Bx) \quad (40)$$

また、この原子炉の厚さを X とするならば、外部境界条件より $\phi_1(X/2) = \phi_2(X/2) = 0$ なので、 $\phi = X\psi$

⁴ $\beta > 0$ であるので、「 λ として正と負の解が一つずつ得られる」という点は常に成り立つ。ただし、 $\alpha < 0$ の場合は、負の値をとる λ は $\lambda \approx \alpha$ となるので、 $\alpha > 0$ の場合とは絶対値が大きく異なるものとなるであろう。

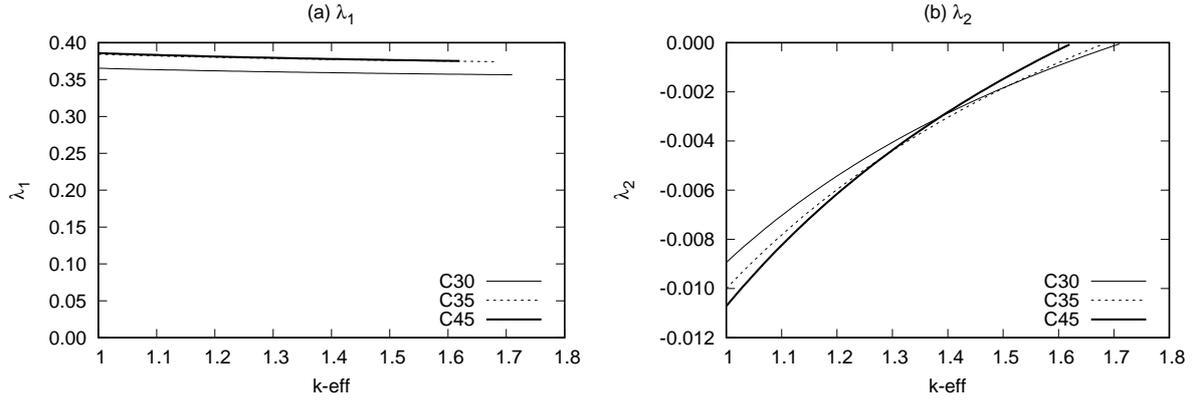


Fig. 3: KUCA の C 架台の単位燃料格子における λ

より以下の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \phi_1(X/2) \\ \phi_2(X/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \psi_1(X/2) \\ \psi_2(X/2) \end{pmatrix} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} E_1 \cosh(\kappa X/2) \\ E_2 \cos(BX/2) \end{pmatrix} \quad (41)$$

行列 \mathbf{X} は正則であり、逆行列が存在することから、以下が得られる。

$$\begin{pmatrix} E_1 \cosh(\kappa X/2) \\ E_2 \cos(BX/2) \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (42)$$

関数 $\cosh(x)$ は Fig. 1 に示されているように全ての x について非ゼロの値をとることから、 $E_1 = 0$ でなければならない。従って、 $\psi_1(x) = 0$ となり、1 領域問題では正の固有値に対応するモード束の寄与は現れないことになる。また、さらに $E_2 = 0$ としてしまうと $\phi = 0$ という自明な解が得られてしまうことになるため、 $\cos(BX/2) = 0$ が成り立たなければならない。従って、 $BX/2 = \pi/2 + n\pi$ が得られる。最終的に、中性子束を記述するモード束は $\cos(Bx)$ のみとなることから、中性子束分布として、

$$\phi_1(x) = E_1 \cos\left(\frac{\pi}{X}x\right), \quad (43)$$

$$\phi_2(x) = SE_1 \cos\left(\frac{\pi}{X}x\right) \quad (44)$$

が得られ、エネルギーを 2 群に拡張した場合であっても、1 領域問題では単一の三角関数のみで各群の中性子束が記述されることが分かる。エネルギー 1 群の中性子束の空間分布は核分裂中性子源の分布に従って決まり、2 群の中性子束は 1 群からの散乱源によって決まる。単一の組成で構成される体系で 1 群と 2 群の中性子束の空間分布が同一となることは直感的にはよく理解できるであろう。なお、式 (44) における係数 S の決定法については文献 [1] を参照されたい。

3 エネルギー 2 群・2 領域・平板体系

次は多領域に問題を拡張して考えよう。未知数と方程式の数については、以下のように整理できるであろう。

- 各領域で定義される拡散方程式から、モード束が従う 2 本の互いに独立な二階の微分方程式が得られる。その各々の一般解には未定係数が 2 つ含まれることから、各領域で 4 つの未定係数が得られる。従って、総領域数が I であるとき、 $4I$ の未定係数を考慮する必要がある。
- 外部境界条件は各群の中性子束に対して定義されるため、左端と右端で計 4 本の外部境界条件を記述する方程式が得られる。

- 内部境界条件も各群の中性子束、中性子流に対して定義されるため、 $(I - 1) \times 4$ 本の方程式が得られる。

例えば2領域で構成される原子炉の場合は、計8つの未定係数について考える必要があり、式(8)におけるMは 8×8 の行列となる。このような問題に対して解析的にアプローチしようとするのは、なかなか困難となりそうであることは容易に想像できるであろう。

ここでは、燃料と反射体が接する体系を考え、炉心領域の中心位置を $x = 0$ 、反射体厚さを無限相当とし、 $x > 0$ の領域のみで考えるような2領域問題とする。この場合、燃料領域における対称性と、反射体領域における無限の境界条件の取り扱いによって、辛うじて解析的なアプローチが可能となる。

燃料領域の中性子束分布 $\phi_{c,g}(x)$ は、対称条件を用いることで、前節で説明したように、 \cos と \cosh の重ね合わせで記述されることになる。

$$\phi_{c,1}(x) = F \cos(B_c x) + G \cosh(\kappa_c x), \quad (45)$$

$$\phi_{c,2}(x) = S_{c1} F \cos(B_c x) + S_{c2} G \cosh(\kappa_c x) \quad (46)$$

ここで、 B_c 、 κ_c は炉心領域で定義される行列 A (ここでは A_c と表記する) の固有値から、 S_{c1} 、 S_{c2} は行列 A_c の固有ベクトルから、それぞれ決められる。また、 F 、 G は未定係数である。

一方、反射体領域で定義される行列 A (同様に A_r とする) は以下のように記述される。

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} & 0 \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{pmatrix} \quad (47)$$

従って、固有値として、いずれも正の値である $\Sigma_{r,1}/D_1$ 、 $\Sigma_{r,2}/D_2$ が得られる。このことから、反射体領域における中性子束分布は必ず双曲線関数 (指数関数) 成分で記述されることが分かる。炉心燃料領域については双曲線関数を用いたが、これは対称性を利用する上で便利であるからであった。一方、反射体領域では、 $x \rightarrow \infty$ のときに $\phi \rightarrow 0$ となる境界条件を適用するのであれば、双曲線関数ではなく指数関数で記述したほうが便利である。これら固有値を $\kappa_{r,j}^2 = \Sigma_{r,j}/D_j$ と定義したとき、 $\exp(\kappa_{r,j} x)$ の項はこの境界条件を満足しないことから、反射体領域の中性子束分布は2つの指数関数 $\exp(-\kappa_{r,j} x)$ の重ね合わせで記述されることになる。また、行列 A_r の固有ベクトルを求めると、 $\lambda = \kappa_{r,2}^2$ に対応するものはその第一成分がゼロになることが容易に示されるため、固有ベクトルで構成される行列 X は以下のように記述されることになる。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad (48)$$

中性子束 ϕ は $\phi = \mathbf{X}\psi$ より求められることから、第2群の中性子束は2つのモード束の重ね合わせで記述されるが、1群中性子束は単一のモード束 $\exp(-\kappa_{r,1} x)$ のみで記述されることになる。このことは、反射体領域における1群の中性子束の減衰には2群の情報は無関係であることから理解できるであろう (2群の中性子束の場合は、1群からの減速中性子の影響を受けることを考える必要がある)。以上より、反射体領域の中性子束分布 $\phi_{r,g}(x)$ は以下となる。

$$\phi_{r,1}(x) = J \exp(-\kappa_{r,1} x), \quad (49)$$

$$\phi_{r,2}(x) = S_r J \exp(-\kappa_{r,1} x) + K \exp(-\kappa_{r,2} x) \quad (50)$$

ここで、 S_r は行列 A_r の固有ベクトルから決められる。また、 J 、 K は未定係数である。

以上で、燃料領域と反射体領域の中性子束分布が得られたので、これらに対して以下で示される内部境界位置での中性子束と中性子流の連続条件を課す。なお、燃料領域の中心位置を $x = 0$ とし厚さを X として

いるので内部境界位置は $x = X/2$ となる。

$$\phi_{c,1}(X/2) = \phi_{r,1}(X/2), \quad (51)$$

$$-D_{c,1}\phi'_{c,1}(X/2) = -D_{r,1}\phi'_{r,1}(X/2), \quad (52)$$

$$\phi_{c,2}(X/2) = \phi_{r,2}(X/2), \quad (53)$$

$$-D_{c,2}\phi'_{c,2}(X/2) = -D_{r,2}\phi'_{r,2}(X/2) \quad (54)$$

これらより、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} F \cos(B_c X/2) + G \cosh(\kappa_c X/2) &= J \exp(-\kappa_{r,1} X/2), \\ -D_{c,1} B_c F \sin(B_c X/2) + D_{c,1} \kappa_c G \sinh(\kappa_c X/2) &= -D_{r,1} \kappa_{r,1} J \exp(-\kappa_{r,1} X/2), \\ S_{c1} F \cos(B_c X/2) + S_{c2} G \cosh(\kappa_c X/2) &= S_r J \exp(-\kappa_{r,1} X/2) + K \exp(-\kappa_{r,2} X/2), \\ -D_{c,2} B_c S_{c1} F \sin(B_c X/2) + D_{c,2} \kappa_c S_{c2} G \sinh(\kappa_c X/2) &= -D_{r,2} \kappa_{r,1} S_r J \exp(-\kappa_{r,1} X/2) \\ &\quad -D_{r,2} \kappa_{r,2} K \exp(-\kappa_{r,2} X/2) \end{aligned}$$

ここで、 $\mu = B_c X/2$ 、 $\eta = \kappa_c X/2$ 、 $\xi = -\kappa_{r,1} X/2$ 、 $\epsilon = -\kappa_{r,2} X/2$ とおくと、上述の式は行列形式で以下のよう書ける。

$$\mathbf{Mn} = \mathbf{0} \quad (55)$$

ここで、

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \mu & \cosh \eta & -\exp(\xi) & 0 \\ -D_{c,1} B_c \sin \mu & D_{c,1} \kappa_c \sinh \eta & D_{r,1} \kappa_{r,1} \exp(\xi) & 0 \\ S_{c1} \cos \mu & S_{c2} \cosh \eta & -S_r \exp(\xi) & -\exp(\epsilon) \\ -D_{c,2} B_c S_{c1} \sin \mu & D_{c,2} \kappa_c S_{c2} \sinh \eta & D_{r,2} \kappa_{r,1} S_r \exp(\xi) & D_{r,2} \kappa_{r,2} \exp(\epsilon) \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{n} = (F \ G \ J \ K)^T \quad (57)$$

である。式 (55) について、 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ という自明ではない解を得るためには、行列 \mathbf{M} が正則ではない、つまり \mathbf{M} の行列式がゼロという条件が必要である。 \mathbf{M} の行列式は以下のように簡略化して記述できる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -D_{c,1} B_c \tan \mu & D_{c,1} \kappa_c \tanh \eta & -D_{r,1} \kappa_{r,1} & 0 \\ S_{c1} & S_{c2} & S_r & 1 \\ -D_{c,2} B_c S_{c1} \tan \mu & D_{c,2} \kappa_c S_{c2} \tanh \eta & -D_{r,2} \kappa_{r,1} S_r & -D_{r,2} \kappa_{r,2} \end{vmatrix} \quad (58)$$

これがゼロとなる条件より、かなり大変ではあるが、以下の式を得ることが出来る。

$$(B_c X/2) \tan(B_c X/2) = \frac{X}{2} \cdot \frac{[-D_{r,1} D_{c,2} S_{c2} \kappa_{r,1} + D_{c,1} D_{r,2} \{\kappa_{r,2} (S_{c1} - S_r) + \kappa_{r,1} S_r\}] \kappa_c \tanh \eta + D_{r,1} D_{r,2} (S_{c1} - S_{c2}) \kappa_{r,1} \kappa_{r,2}}{D_{c,1} D_{c,2} (S_{c1} - S_{c2}) \kappa_c \tanh \eta + D_{r,1} D_{c,2} S_{c1} \kappa_{r,1} + D_{c,1} D_{r,2} \{S_r (\kappa_{r,2} - \kappa_{r,1}) - S_{c2} \kappa_{r,2}\}} \quad (59)$$

実効増倍率の解析解はこの条件を満足するものとして得られる。 κ_c 、 B_c は式 (38) により定義されるが、2 節でも述べたように一般的には $B_c \ll \kappa_c$ となる。従って、 $\pi/2 \approx B_c X/2 \ll \kappa_c X/2 = \eta$ より $\tanh \eta \approx 1$ と見做すことが出来、式 (59) は少しだけ簡略化される。関数 $\tanh(x)$ を Fig. 4 に示すが、 x が 2 を超える程度で $\tanh(x) \approx 1$ と見做せることが分かるであろう。

以上の議論から、エネルギーを 2 群で扱った場合、燃料と反射体で構成される原子炉の中性子束は、燃料領域では三角関数と双曲線関数の重ね合わせで、反射体領域では 1 群の中性子束は単一の指数関数で、2 群の中性子束は 2 つの指数関数の重ね合わせで、それぞれ記述されることが分かった。このことを確かめるた

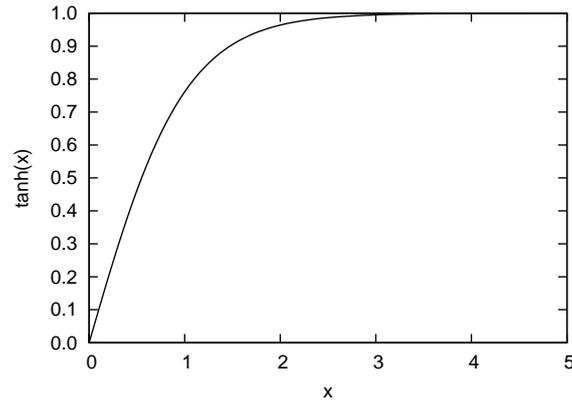


Fig. 4: 関数 $\tanh(x)$

め、KUCA の C 架台の 2 群断面積データを用いた仮想的な無限平板原子炉での中性子束の空間分布を拡散方程式より求めた。燃料厚さを 60 cm、両側の水反射体厚さを無限大とし、片側の領域のみを対象とした。なお、ここでは拡散方程式を階層領域分割型境界要素法により数値的に解いたが、得られた結果は解析解相当と考えてよい(1次元問題なので近似が導入されていない)。

はじめに、中性子束の空間分布を Fig. 5 に示す。水からなる反射体領域において中性子の熱化が進むため、燃料と反射体の境界近傍で熱中性子束が盛り上がる典型的な分布形状を示している。

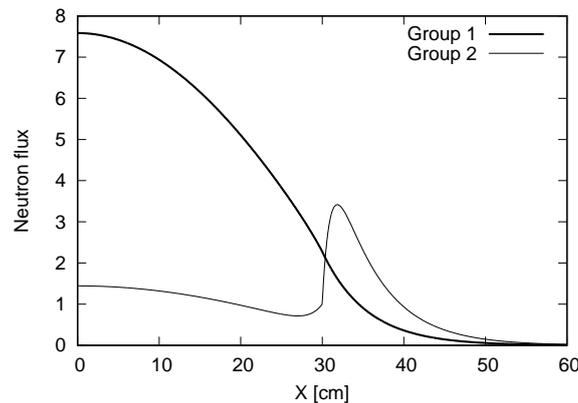


Fig. 5: 燃料・反射体炉心の中性子束分布

次に、燃料領域における各群の中性子束をモード束毎の寄与とともに Fig. 6 に示す。いずれのエネルギー群でも三角関数に対応する第 1 モード束の寄与が支配的だが、反射体との境界近傍で第 2 モード束の寄与が見られ、2 群中性子束においてその影響が大きい。

最後に、反射体領域における各群の中性子束をモード束毎の寄与とともに Fig. 7 に示す。1 群の中性子束は第 1 モード束のみで記述される一方、2 群の中性子束は第 1 モード束が支配的であるが燃料との境界近傍で第 2 モード束の影響が見られる。

4 多群・多領域の拡散方程式は解析的に解けるか？

これまでにエネルギー 1 群及び 2 群の拡散方程式について、1 領域もしくは 2 領域の原子炉を想定して、解析的なアプローチでその解を得ることを試みてきた。2 群、2 領域の問題については、解析解の導出は可

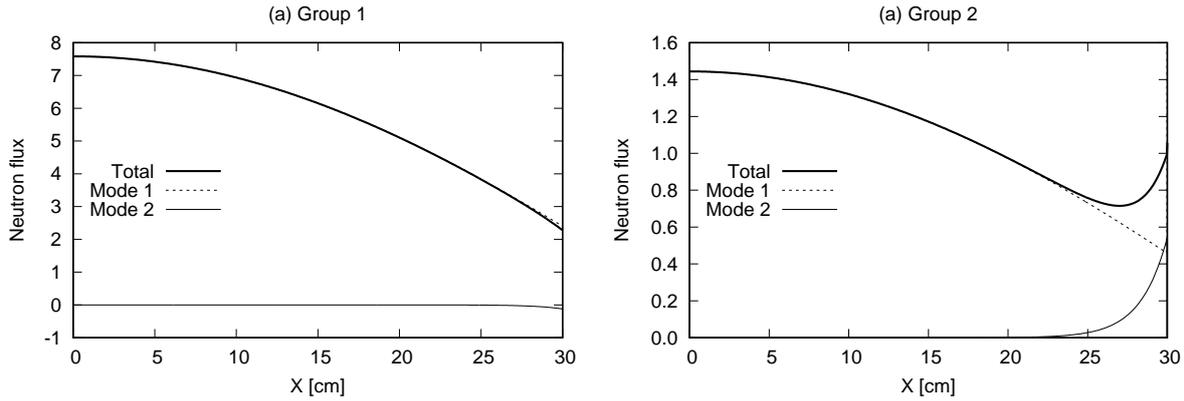


Fig. 6: 燃料領域の中性子束のモード束毎の寄与

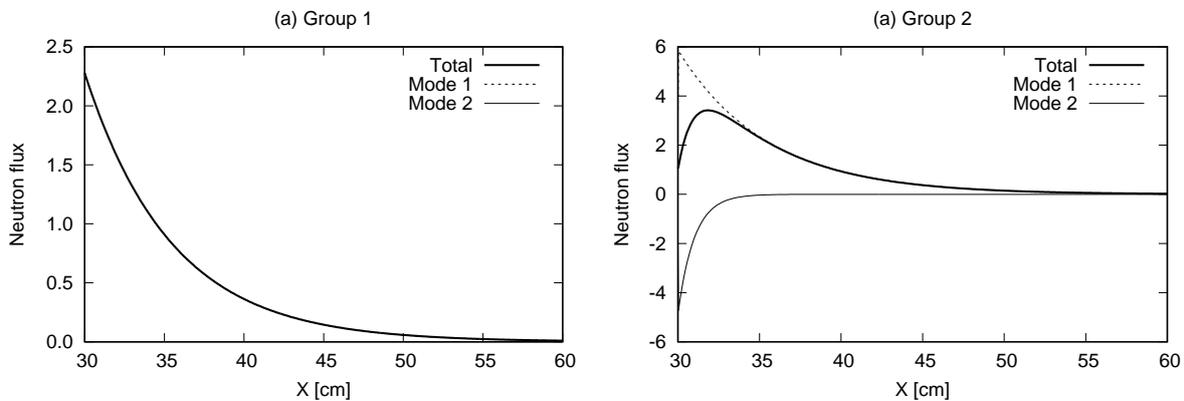


Fig. 7: 反射体領域の中性子束のモード束毎の寄与

能であるものの、かなり手続きが煩雑となることを感じてもらえたものと思う。最後に、このようなアプローチが3群以上、3領域以上の問題で可能であるか、考えてみよう。

まずは領域数が増加した場合であるが、エネルギー群数が2の場合は、総領域数を I としたとき、領域あたりの未定係数の数は4となるため、未知数の総数は $4I$ となり、境界条件の式も $4I$ 本となる。領域数が3である原子炉を考えた場合は、未知数の総数は12となり、 12×12 の行列 M の行列式を考える必要があることになる。前述のように、左右が対称で、最外側に配置される(燃料ではない)媒質が無限に続くものとした3領域の原子炉を対象としたとしても、未知数の数は中心領域からそれぞれ2、4、2、内部境界条件の方程式も各境界あたり4本で計8本となり、この場合であっても行列 M のサイズは 8×8 までにはしか下げられず、容易に解けるような代物とは言えない。

次にエネルギー群数が増加した場合を考えよう。行列 A を定義し、この固有値を得ることができれば、固有値に対応した互いに独立な微分方程式を満足するモード束を定義することが出来る。エネルギー群数が2の場合は、 2×2 の行列の固有値を求めればよいので容易に対応できるが、エネルギー群数が3以上となる場合には、それに対応する行列 A の固有値を解析的に得ることはそもそも困難である。また、エネルギー群数が2の場合は、炉心燃料媒質については、固有値の一方が負、もう一方が正となることを述べたが、3群以上の問題の場合はどうなるであろうか。例として、熱中性子炉の炉心燃料を想定した媒質から29群の断面積を計算し、そこから行列 A を求め、その固有値を計算した結果を Fig. 8 に示す⁵。この図より、固有値の1つは(絶対値が小さい)負の実数となること、それ以外の固有値は正の実数か複素数となり、複

⁵この計算結果は、北大・原子炉工学研究室に2020年9月まで所属していたQin Tian君が作成したプログラムにより得た。

素数の場合はその実数部は正となることが分かる。これが普遍性を有するものであるかは現時点では断言できないが、我々北大の研究グループが経験した範囲では、考えた全ての場合でこのような結果が得られることが分かっている。いずれにしろ、固有値が複素数となる場合は、モード束も複素数となり、行列 X の要素も複素数となる。このような問題を解析的に解こうとすることはかなり無謀と言えよう。

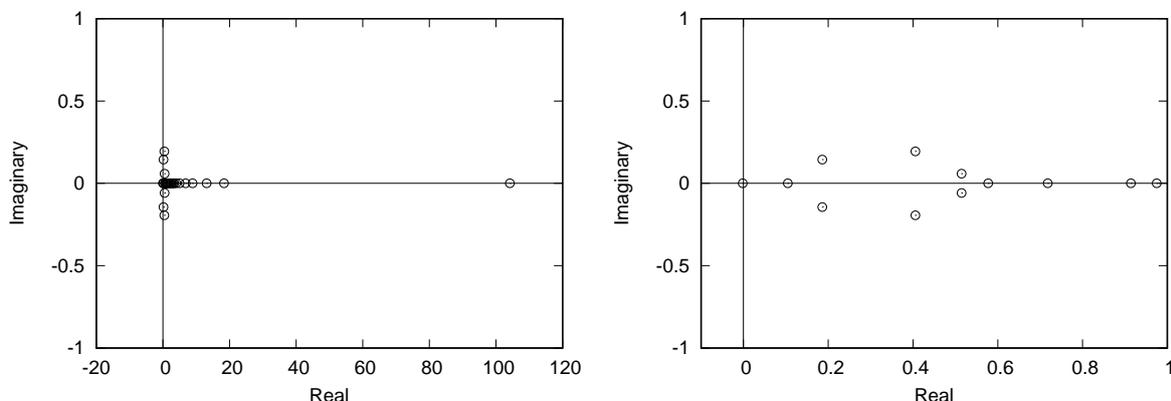


Fig. 8: 行列 A の固有値の分布

5 3群以上の拡散方程式におけるモード束の群中性子束への寄与

前節で採りあげた燃料と反射体からなる左右対称の2領域無限平板原子炉に対して、階層領域分割型境界要素法 (HDD-BEM) を用いて各群の中性子束における各モード束の寄与を評価した結果 [3] があるので、ここでそのいくつかを紹介する。

まずはエネルギーを3群とし、燃料領域のバックリングが全て実数となる場合の結果を Fig. 9 に示す。上図には各群の中性子束分布を示すが、1、2群が単調に振る舞う一方、3群は燃料と反射体の境界近傍で盛り上がるような分布となっている。燃料領域の群中性子束のモード束寄与は、全ての群において第1モード束が支配的であるが、反射体近傍において、1群で第3モード束の寄与が僅かに現れ、2群ではさらに第2モード束の寄与も僅かに現れ、3群では第2、第3モード束の寄与が1、2群と比べてかなり大きく現れる様子が分かる。

次に、エネルギーを同様に3群とし、燃料領域のバックリングが複素数を含む場合の結果を Fig. 10 に示す⁶。第1モード束に対応するバックリングは実数であり、第2、第3モード束に対応するバックリングが共役な複素数となっている。燃料領域の3群の中性子束において第3モード束の顕著な寄与が見られるが、第2モード束もほぼ同様の寄与をしている (図において線が重なっている)。燃料領域の3群中性子束に対する第2、第3モード束の寄与に違いが見られないことから、これらのモード束におけるバックリングの虚数成分に対応する三角関数成分は無視できる程度に小さいということが言えるであろう。

最後に、エネルギーを5群としたときの結果を Fig. 11 に示す。この場合、第2、第3モード束に対応するバックリングが共役な複素数となっている。3群の問題とは異なり、4、5群において燃料と反射体の境界近傍での中性子束分布の盛り上がりが見られ、それらは高次のモード束の寄与によるものであることが分かる。また、3群のときと同様に、複素数のバックリングに対応するモード束において、バックリングの虚数成分に対応する三角関数成分は無視できる程度に小さいことが分かる。複素数のバックリングが現れる問題において、バックリングの虚数成分に対応する三角関数成分が有意に現れるような場合があるかは、興味深い点と言えよう。

⁶この検討では、まず107群の断面積を作成し中性子束分布の計算を行った後、得られた中性子束のエネルギースペクトルを用いて、種々のエネルギー群境界を設定した縮約を行い少数群の断面積を作成している。すなわち、燃料領域のバックリングが全て実数となった問題と複素数が含まれた問題とは、3群構造のエネルギー境界が異なっている。

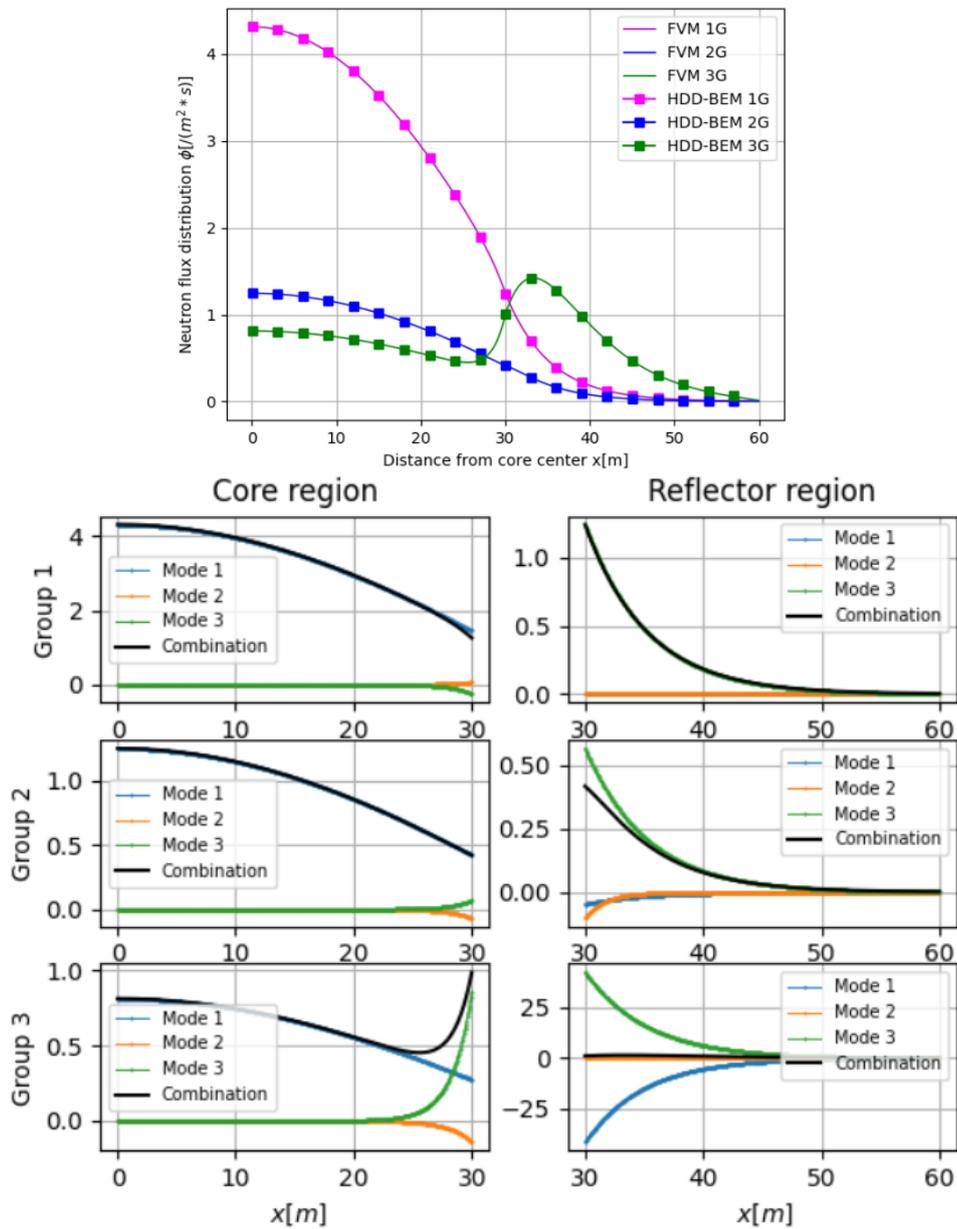


Fig. 9: バックリングが全て実数のときの、群中性子束分布へのモード束毎寄与（3群）

これらの結果は、燃料領域の中性子束分布は、単一の三角関数成分を主として、それに対し、組成が異なる媒質との境界付近で生じる「遷移成分」を反映する複数の指数関数成分が加わるような構造となっていることを示唆している⁷。

参考文献

- [1] 千葉豪、「一次元体系における中性子拡散固有値方程式の解析解」、第50回炉物理夏期セミナーテキスト、(2018)。

⁷このことが普遍性を有するかは現時点では明確に述べることは出来ない。また、このように中性子束をモード分解し、寄与が相対的に小さいモード成分を無視することで、所謂「モデルの低次元化」による計算負荷の低減が可能となるかもしれない。

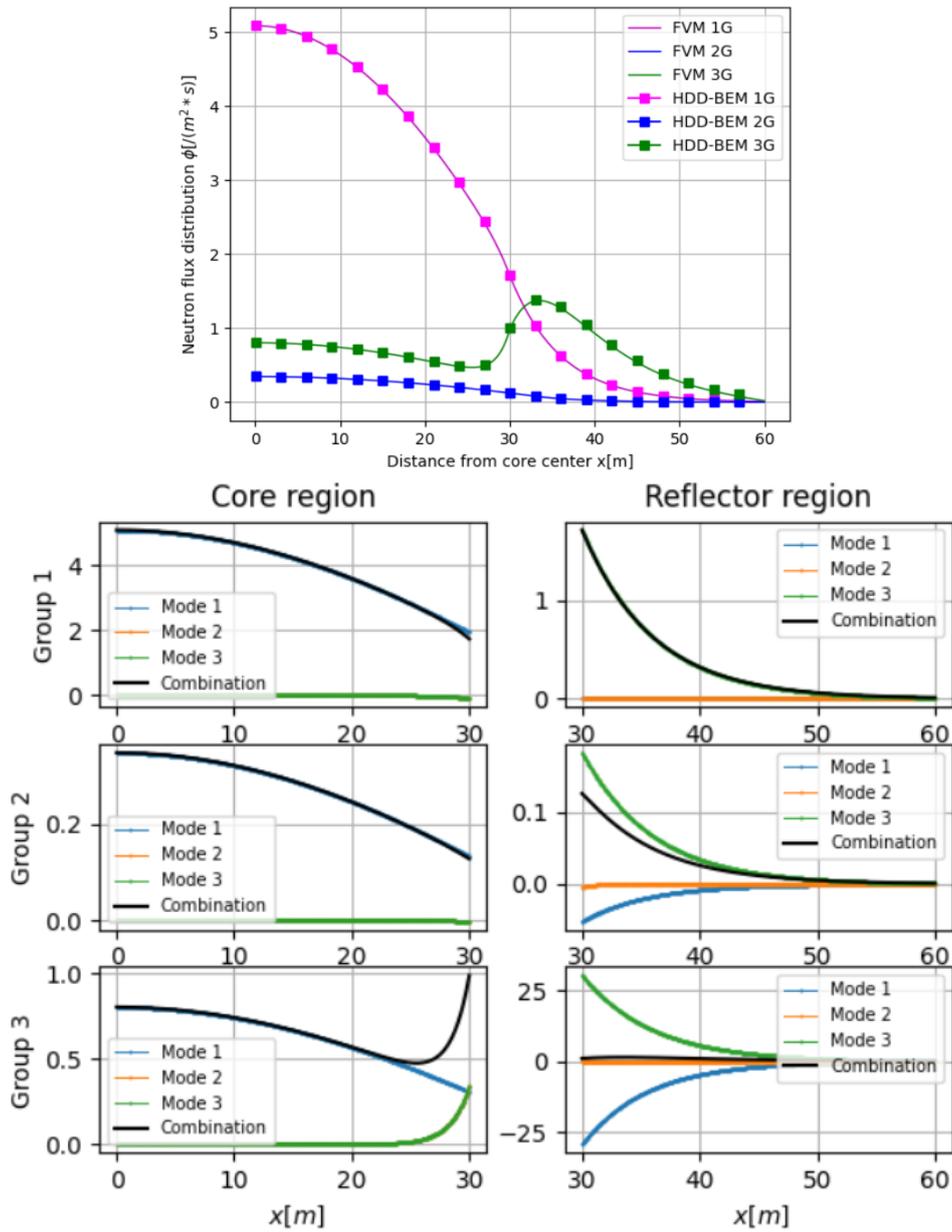


Fig. 10: バックリングが複素数を含むときの、群中性子束分布へのモード束毎寄与 (3群)

- [2] Koskinen, L. Generalized potential theory for multi-group diffusion in general multi-region reactor. *Proc. of the third international conference of the peaceful uses of atomic energy*, 4, p.67 (1965).
- [3] Qin, T. Development of the hierarchical domain decomposition boundary element method for the multi-group simplified Pn equation. Master thesis, Nuclear Reactor Engineering Laboratory, Hokkaido University (2020).

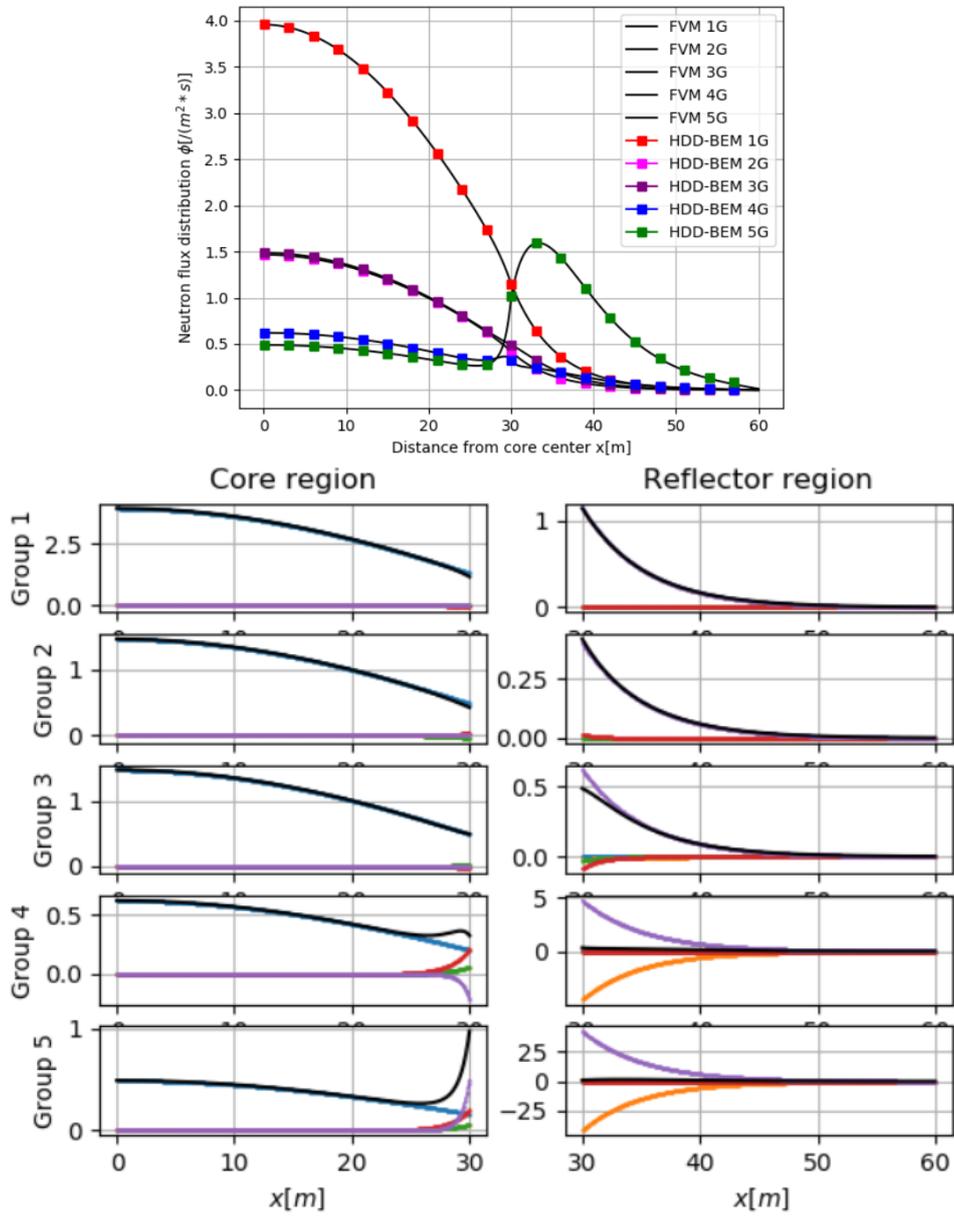


Fig. 11: バックリングが複素数を含むときの、群中性子束分布へのモード束毎寄与（5群）