核反応の閾エネルギー[1]

2026/3/26　千葉　豪

標的核 X に対して粒子 a が入射したときの反応を考える。その際の生成核を Y、放出粒子を b としたとき、この核反応は以下のように記述される。

$$\mathrm{X} + \mathrm{a} \rightarrow \mathrm{Y} + \mathrm{b} + Q \tag{1}$$

ここで、Q は反応前後の運動エネルギーの増加量（核反応エネルギー）を示す。

$Q < 0$ のときは、反応により運動エネルギーが低下することを意味しており、エネルギーが必要となる反応であることから「吸熱反応」と呼ばれる。運動エネルギーは負の値をとらないことから、その反応が起こるためには、少なくとも入射粒子のエネルギー K_{a} が $-Q$ よりも大きくなければ（$K_{\mathrm{a}} > -Q$ が成り立たなければ）ならない。従って、この吸熱反応を起こす入射粒子の最小運動エネルギーを $-Q$ であると勝手に思い込んでいたが、それは大きな誤解であったことを今になって教えていただく機会を得た。このメモは、万が一、私と同様な誤解をしている人に警鐘を鳴らすため、自戒の念を込めて作成するものである。なお、基本的な内容は、オーム社の「放射線技術学シリーズ · 放射線物理学」の 5.1.4 節に基づくものであるが、最後の部分は異なっている。

そもそも上記の理解の何が誤っているかと言うと、核反応では反応前後で運動量が保存されていなければならないことが考慮されていない点にある。例えば、入射粒子の運動エネルギー K_{a} が $-Q$ であるときにこの反応が起きたとしたならば $K_{\mathrm{Y}} = K_{\mathrm{b}} = 0$ となるが、これでは運動量が保存されていないことは明らかであり、そのような反応は起こりようがないことが分かるであろう。

この核反応を **Fig. 1** に示すものとして考える。粒子、原子核の質量を m、速度を v としたとき、運動量 mv と

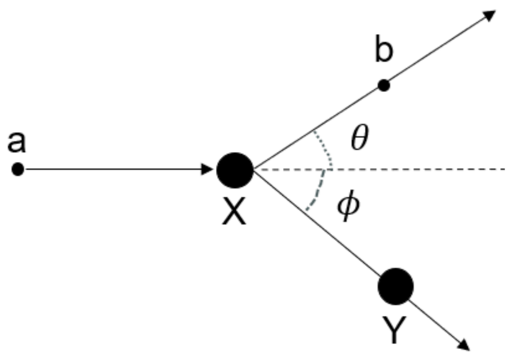

Fig. 1: 核反応における生成核、放出粒子の運動

運動エネルギー K の間には $K = (1/2)mv^2$ より、$mv = \sqrt{2mK}$ の関係があるので、x、y 方向のそれぞれについて、以下の反応前後での運動量保存式が得られる。

$$\sqrt{2m_{\mathrm{a}}K_{\mathrm{a}}} = \sqrt{2m_{\mathrm{b}}K_{\mathrm{b}}}\cos\theta + \sqrt{2m_{\mathrm{Y}}K_{\mathrm{Y}}}\cos\phi, \tag{2}$$

$$0 = \sqrt{2m_{\mathrm{b}}K_{\mathrm{b}}}\sin\theta - \sqrt{2m_{\mathrm{Y}}K_{\mathrm{Y}}}\sin\phi \tag{3}$$

これらの式はそれぞれ以下のように変形できる。

$$m_{\mathrm{Y}}K_{\mathrm{Y}}\cos^2\phi = m_{\mathrm{a}}K_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{b}}K_{\mathrm{b}}\cos^2\theta - 2\sqrt{m_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{b}}K_{\mathrm{a}}K_{\mathrm{b}}}\cos\theta, \tag{4}$$

$$m_{\mathrm{Y}}K_{\mathrm{Y}}\sin^2\phi = m_{\mathrm{b}}K_{\mathrm{b}}\sin^2\theta \tag{5}$$

これらより ϕ を消去して以下が得られる。

$$m_{\mathrm{Y}}K_{\mathrm{Y}} = m_{\mathrm{a}}K_{\mathrm{a}} + m_{\mathrm{b}}K_{\mathrm{b}} - 2\sqrt{m_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{b}}K_{\mathrm{a}}K_{\mathrm{b}}}\cos\theta \tag{6}$$

[1] /Document/Education/MinEnergyReaction

定義より、$Q=(K_\mathrm{b}+K_\mathrm{Y})-K_\mathrm{a}$ なので、これに上式を代入すると以下を得る。

$$Q=K_\mathrm{a}\left(\frac{m_\mathrm{a}}{m_\mathrm{Y}}-1\right)+K_\mathrm{b}\left(\frac{m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{Y}}-1\right)-\frac{2\sqrt{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}K_\mathrm{a}K_\mathrm{b}}}{m_\mathrm{Y}}\cos\theta \tag{7}$$

Q の値が与えられているとしたとき、θ に対応する K_b は以下の方程式の解として得られる。

$$\sqrt{K_\mathrm{b}}^2-\frac{2\cos\theta\sqrt{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}K_\mathrm{a}}}{m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y}}\sqrt{K_\mathrm{b}}+\frac{(m_\mathrm{a}-m_\mathrm{Y})\,K_\mathrm{a}-m_\mathrm{Y}Q}{m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y}}=0 \tag{8}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\cos\theta\sqrt{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}K_\mathrm{a}}}{m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y}}, & (9)\\ \beta &= \frac{(m_\mathrm{a}-m_\mathrm{Y})\,K_\mathrm{a}-m_\mathrm{Y}Q}{m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y}} & (10)\end{aligned}$$

のようにパラメータ α、β を定義すると、$\sqrt{K_\mathrm{b}}$ の解として以下が得られる。

$$\sqrt{K_\mathrm{b}}=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\beta} \tag{11}$$

これより、K_b が正の実数となるべき条件として $\alpha^2-\beta\geq 0$ が得られる。これに式 (9)、(10) を代入すると、以下が得られる。

$$\cos^2\theta\frac{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}K_\mathrm{a}}{(m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y})^2}-\frac{(m_\mathrm{a}-m_\mathrm{Y})\,K_\mathrm{a}-m_\mathrm{Y}Q}{m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y}}>0 \tag{12}$$

これを K_a について整理すると、以下が得られる。

$$K_\mathrm{a}>-\frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y})}{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}\cos^2\theta+m_\mathrm{Y}^2-m_\mathrm{b}^2}Q \tag{13}$$

この式が、Q、θ が与えられたときに K_a が取りうる値の範囲を示す。我々は K_a の最小値に関心があるが、この式より K_a は θ について $\cos\theta=1$ であるときに最小値をとることが分かるため、$\cos\theta=1$ の場合について考えるとするならば以下の式が得られる（この場合、生成核 Y の散乱方向は $\cos\phi=1$ を満足する)。

$$K_\mathrm{a}>-\frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y})}{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y}^2-m_\mathrm{b}^2}Q=-fQ \tag{14}$$

ここで、以下の式変形を行う。

$$\begin{aligned}f &= \frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y})}{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y}^2-m_\mathrm{b}^2}=\frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y})}{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}+(m_\mathrm{Y}+m_\mathrm{b})\,(m_\mathrm{Y}-m_\mathrm{b})}=\frac{m_\mathrm{Y}}{\dfrac{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}}{m_\mathrm{Y}+m_\mathrm{b}}+(m_\mathrm{Y}-m_\mathrm{b})}\\ &= \frac{m_\mathrm{Y}}{m_\mathrm{Y}+m_\mathrm{b}\left(\dfrac{m_\mathrm{a}}{m_\mathrm{Y}+m_\mathrm{b}}-1\right)} \end{aligned} \tag{15}$$

$m_\mathrm{a}<m_\mathrm{Y}+m_\mathrm{b}$ であるので、$f>1$ であること、すなわち、K_a の最小値が $-Q$ よりも大きい値となることが分かる。

　また、f を簡略化するため、以下の近似を導入する。

$$m_\mathrm{a}+m_\mathrm{X}\approx m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y} \tag{16}$$

これを用いると以下が得られる。

$$\begin{aligned}f &= \frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{b}+m_\mathrm{Y})}{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}+(m_\mathrm{Y}+m_\mathrm{b})\,(m_\mathrm{Y}-m_\mathrm{b})}\approx\frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{a}+m_\mathrm{X})}{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}+(m_\mathrm{X}+m_\mathrm{a})\,(m_\mathrm{Y}-m_\mathrm{b})}\\ &= \frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{a}+m_\mathrm{X})}{m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}+m_\mathrm{a}m_\mathrm{Y}-m_\mathrm{a}m_\mathrm{b}+m_\mathrm{X}m_\mathrm{Y}-m_\mathrm{X}m_\mathrm{b}}=\frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{a}+m_\mathrm{X})}{m_\mathrm{X}m_\mathrm{Y}+m_\mathrm{a}m_\mathrm{Y}-m_\mathrm{X}m_\mathrm{b}}\end{aligned} \tag{17}$$

$m_\mathrm{X}m_\mathrm{Y}\gg m_\mathrm{a}m_\mathrm{Y}-m_\mathrm{X}m_\mathrm{b}$ と考えてよいので、以下のようにさらに簡略化できる。

$$f\approx\frac{m_\mathrm{Y}\,(m_\mathrm{a}+m_\mathrm{X})}{m_\mathrm{X}m_\mathrm{Y}}=\frac{m_\mathrm{a}+m_\mathrm{X}}{m_\mathrm{X}} \tag{18}$$

以上より、核反応エネルギー Q（ただし $Q<0$）に対する入射粒子の閾エネルギーとして、$-\dfrac{m_\mathrm{a}+m_\mathrm{X}}{m_\mathrm{X}}Q$ が得られることが分かる。