制御棒落下法（外挿法）で無限に大きい負の反応度を挿入したらどうなるの？[1]

2018/7/16 改訂　千葉　豪

制御棒落下法（外挿法）の理論によると、印加反応度を ρ、制御棒挿入前後の中性子数を n_0、n_1 としたとき、以下の関係が成り立つ（実験テキスト p.83、式 (2-18)）。

$$n_1 = \frac{\beta_{\mathrm{eff}}}{\beta_{\mathrm{eff}} - \rho} n_0 \tag{1}$$

反応度の定義は p.77 の式 (2-1) において、以下のように与えられている。

$$\rho = \frac{k_{\mathrm{eff}} - 1}{k_{\mathrm{eff}}} \tag{2}$$

従って、制御棒挿入後の体系として $k_{\mathrm{eff}} \to 0$ の極限をとった場合、$\rho \to -\infty$ となり、$n_1 \to 0$ となる。物理的に考えると、ある時刻 t_0 で無限に大きい負の反応度を挿入した場合、遅発中性子が時間的に遅れて発生するため、n_1 が瞬間的にゼロとなることはあり得ない筈である。従って、式 (1) に対して $k_{\mathrm{eff}} \to 0$（$\rho \to -\infty$）の極限をとる操作に何らかの問題があるものと考えられる。

次に、制御棒の挿入により $\nu\Sigma_f = 0$ となる場合を仮定する。この場合、制御棒挿入後の動特性方程式はテキスト p.108 の式 (2G-4) を参考に、以下のように書けるであろう。

$$\frac{dn(t)}{dt} = -v\Sigma_a n(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t) \tag{3}$$

テキスト p.83 と同様に、$dC_{i0}/dt = 0$ であることから

$$\sum_i \lambda_i C_{i0} = \frac{\beta_{\mathrm{eff}}}{\Lambda} n_0 \tag{4}$$

より、

$$\frac{dn(t)}{dt} = -v\Sigma_a n(t) + \frac{\beta_{\mathrm{eff}}}{\Lambda} n_0 \tag{5}$$

が得られる。なお、中性子世代時間 Λ は $\Lambda = l/k_{\mathrm{eff}}$ で与えられるが、この k_{eff} は制御棒挿入前の値であることに注意が必要である。この微分方程式を解くことで、制御棒挿入直後の $n(t)$ として

$$n(t) = \frac{\beta_{\mathrm{eff}} l}{\Lambda} n_0 + \left(1 - \frac{\beta_{\mathrm{eff}} l}{\Lambda}\right) n_0 \exp(-t/l) \tag{6}$$

が得られる。二項目の減衰は早いため、n_1 は次式に漸近する。

$$n_1 = \frac{\beta_{\mathrm{eff}} l}{\Lambda} n_0 = \beta_{\mathrm{eff}} k_{\mathrm{eff}} n_0 \tag{7}$$

制御棒挿入前の系が臨界に近いとすると、$k_{\mathrm{eff}} \approx 1$ なので、この式は次のように書き換えられる。

$$n_1 = \beta_{\mathrm{eff}} n_0 \tag{8}$$

これより、制御棒挿入により系が中性子増倍系でなくなった直後の n_1 は n_0 に β_{eff} に乗じた値になることが分かる。これは物理的に考えると妥当であるし、ラマーシュの日本語訳教科書の記述（下巻 p.662）と整合がとれるものである。

以上の議論を整理すると、$\nu\Sigma_f$ としてゼロの極限をとった場合とゼロとした場合とで n_1 がとる値が異なることが分かった。物理的に考えると、ゼロの極限をとった場合に n_1 がゼロとなることはあり得ない。では理論のどこに問題があったのであろうか？

その答えは、実験テキスト p.83 の式 (2-16) の取扱いにおける、中性子世代時間 Λ の取扱いにあった。式 (2-16) の右辺第一項の Λ は制御棒挿入「後」のものである一方、第二項のそれは制御棒挿入「前」のものである。従って、正確には以下のようにこれらを区別して記述する必要がある。

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta_{\mathrm{eff}}}{\Lambda'} n + \frac{\beta_{\mathrm{eff}}}{\Lambda} n_0 \tag{9}$$

[1] /Document/KUCA/RodDropNegativeLargeRho/

この式を解くと、

$$n(t) = \frac{\beta_{\mathrm{eff}} n_0}{\beta_{\mathrm{eff}} - \rho} \frac{\Lambda'}{\Lambda} - \left(1 - \frac{\beta_{\mathrm{eff}} n_0}{\beta_{\mathrm{eff}} - \rho} \frac{\Lambda'}{\Lambda}\right) \exp\left(-\frac{\beta_{\mathrm{eff}} - \rho}{\Lambda'} t\right) \tag{10}$$

が得られる。この式の指数関数部を書き直すと

$$\exp\left(-\frac{\beta_{\mathrm{eff}} - \rho}{\Lambda'} t\right) = \exp\left(-\frac{k'_{\mathrm{eff}} \beta_{\mathrm{eff}} - k'_{\mathrm{eff}} + 1}{l} t\right) \tag{11}$$

となり、$k'_{\mathrm{eff}} \to 0$ の極限をとると $\exp(-t/l)$ となり、この項は急速に減衰すると考えてよい。一方、式 (10) の右辺第一項は

$$\frac{\beta_{\mathrm{eff}} n_0}{\beta_{\mathrm{eff}} - \rho} \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\beta_{\mathrm{eff}} n_0}{\beta_{\mathrm{eff}} - \rho} \frac{k_{\mathrm{eff}}}{k'_{\mathrm{eff}}} = \frac{\beta_{\mathrm{eff}} n_0}{\beta_{\mathrm{eff}} - \rho} k_{\mathrm{eff}} (1 - \rho) = \frac{\beta_{\mathrm{eff}} n_0}{\beta_{\mathrm{eff}}/\rho - 1} k_{\mathrm{eff}} (1/\rho - 1) \tag{12}$$

と書けるので、$k'_{\mathrm{eff}} \to 0$（$\rho \to -\infty$）の極限をとると、n は $\beta_{\mathrm{eff}} k_{\mathrm{eff}} n_0$ となることが分かる。