落下法による制御棒反応度価値の測定の理論*

千葉豪

1 外挿法

遅発中性子先行核を 6 群としたときの動特性方程式は以下のように記述される。

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho-\beta}{\Lambda}n(t)+\sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i(t), \quad (1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t)-\lambda_i C_i(t), \quad (i=1,2,\cdots,6) \quad (2)$$

ここで、$n(t)$ は時刻 t での中性子密度、$C_i(t)$ は第 i 群の遅発中性子先行核密度を示す。

臨界かつ定常状態のときの中性子密度 n_0 と先行核密度 C_{i0} との間には、$\rho=0$、かつ $\frac{dn(t)}{dt}=0$ より以下の関係が成り立つ。

$$n_0=\frac{\Lambda}{\beta}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_{i0} \quad (3)$$

臨界定常状態の原子炉において $t=0$ で制御棒を急速に落下させたとしよう。このとき、$n(0)=n_0$、$C_i(0)=C_{i0}$ とする。臨界定常状態の原子炉に対して負の反応度を印加したとき、反応度印加直後の先行核密度の変化は非常に小さいと考えられる。これは、それまで溜まっていた先行核密度が膨大であることに由来する。従って、反応度印加後しばらくの間は、C_i は C_{i0} のまま推移すると考えて良い。そこで、反応度印加後の中性子密度が従う微分方程式を以下のように記述する。

$$\frac{dn(t)}{dt}=\frac{\rho-\beta}{\Lambda}n(t)+\sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_{i0} \quad (4)$$

これに対して式 (3) を用いて C_{i0} を消去すると以下の式を得る。

$$\frac{dn(t)}{dt}=\frac{\rho-\beta}{\Lambda}n(t)+\frac{\beta}{\Lambda}n_0 \quad (5)$$

この微分方程式を解くと以下の式を得ることができる。

$$n(t)=\frac{\beta n_0}{\beta-\rho}-\frac{\rho n_0}{\beta-\rho}\exp\left(-\frac{\beta-\rho}{\Lambda}t\right) \quad (6)$$

これは、反応度印加後しばらくの間成り立つ。

ここで、負の反応度を印加した場合、式 (6) 右辺の指数関数の肩 $-\frac{\beta-\rho}{\Lambda}t$ に着目しよう。$\rho<0$ なので、$\beta-\rho\gg\Lambda>0$ であることから、この指数関数の項は急速に減衰してゼロになる。すな

*/Document/KUCA/RodDrop

わち、負の反応度を印加した直後、中性子密度は以下で定義される n_1 に瞬時に変化すると考えて良い。

$$n_1 = \frac{\beta n_0}{\beta - \rho} \tag{7}$$

従って、反応度印加直前及び直後の中性子密度（原子炉出力）n_0、n_1 を計測することによって、ドル単位の印加反応度 ρ/β を以下の式で得ることができる。

$$-\frac{\rho}{\beta} = \frac{n_0}{n_1} - 1 \tag{8}$$

2　積分法

積分法でも同様に臨界定常状態に負の反応度を印加した場合を考える。

動特性方程式 (1)、(2) の両辺をラプラス変換すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} s\bar{n}(s) - n_0 &= \frac{\rho - \beta}{\Lambda}\bar{n}(s) + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i \bar{C}_i(s), & (9) \\ s\bar{C}_i(s) - C_{i0} &= \frac{\beta_i}{\Lambda}\bar{n}(s) - \lambda_i \bar{C}_i(s) & (10) \end{aligned}$$

また、臨界定常状態には以下の関係が成り立つ。

$$C_{i0} = \frac{\beta_i}{\Lambda\lambda_i} n_0 \tag{11}$$

これらの式から $\bar{C}_i(s)$、C_{i0} を消去することで、$\bar{n}(s)$ は以下のように記述される。

$$\bar{n}(s) = n_0 \frac{\Lambda + \displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{s+\lambda_i}}{s\Lambda + s\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{s+\lambda_i} - \rho} \tag{12}$$

これに対して、$s \to 0$ の極限をとることを考えよう。ラプラス変換の定義を用いると以下の式を得ることができる。

$$\lim_{s\to 0}\bar{n}(s) = \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \exp(-st) n(t) dt = \int_0^\infty n(t) dt \tag{13}$$

つまり、$\lim_{s\to 0}\bar{n}(s)$ は中性子密度の時間積分値に対応することが分かる。

式 (12) に対して $s \to 0$ の極限をとると以下の式を得る。

$$\lim_{s\to 0}\bar{n}(s) = n_0 \frac{\Lambda + \displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i}}{-\rho} = n_0 \frac{\Lambda + \beta\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{\lambda_i}}{-\rho} \tag{14}$$

なお、$\beta_i = \beta a_i$ である。ここで $\Lambda \ll \displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i}{\lambda_i}$ とすると

$$\lim_{s\to 0}\bar{n}(s) \approx n_0 \frac{\beta\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{a_i}{\lambda_i}}{-\rho} = \int_0^\infty n(t) dt \tag{15}$$

が得られる。

以上より、印加された反応度をドル単位で以下のように求めることができる。

$$-\frac{\rho}{\beta} = \frac{n_0 \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{a_i}{\lambda_i}}{\displaystyle\int_0^{\infty} n(t)dt} = \frac{13.04 \times n_0}{\displaystyle\int_0^{\infty} n(t)dt} \tag{16}$$

この式より、反応度印加前の中性子密度 n_0 と、反応度印加後の中性子密度の時間積分値から反応度が求められることが分かる。