六因子公式の整理[1]

2018/7/16 改訂　千葉　豪

本メモでは、六因子公式を二群拡散方程式及びフェルミの年齢理論から導出し、両者の比較を行う。

1　二群拡散方程式からの導出

1.1　四因子公式

燃料と減速材で構成される漏れの無い無限均質媒質の場合、中性子二群の減速方程式は次のように書ける。

$$(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2})\,\phi_1 = \frac{1}{k}\epsilon\nu\Sigma_{f,2}\phi_2, \tag{1}$$

$$\Sigma_{a,2}\phi_2 = \Sigma_{1\to 2}\phi_1 \tag{2}$$

この場合、臨界固有値は次のように書ける。

$$k=\frac{\epsilon\nu\Sigma_{f,2}\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,2}\left(\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}\right)}=\epsilon\cdot\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\Sigma_{a,2}}\cdot\frac{\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}} \tag{3}$$

ηf と p をそれぞれ

$$\eta f = \nu\Sigma_{f,2}/\Sigma_{a,2}, \tag{4}$$

$$p = \Sigma_{1\to 2}/(\Sigma_{1\to 2}+\Sigma_{a,1}) \tag{5}$$

と定義することにより、式 (3) から以下の四因子公式が得られる。

$$k=\epsilon\eta fp \tag{6}$$

1.2　六因子公式

燃料と減速材で構成される裸の均質原子炉を考える。中性子の漏れを幾何学的バックリング B^2 で考慮した場合、この体系の中性子バランス式は式 (1)、(2) の吸収断面積に DB^2 を足すことで得られる。この時の臨界固有値は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\epsilon\nu\Sigma_{f,2}\Sigma_{1\to 2}}{\left(\Sigma_{a,2}+D_2B^2\right)\left(\Sigma_{a,1}+D_1B^2+\Sigma_{1\to 2}\right)}\\
&= \epsilon\cdot\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\Sigma_{a,2}}\cdot\frac{\Sigma_{a,2}}{\Sigma_{a,2}+D_2B^2}\cdot\frac{\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}}\cdot\frac{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}+D_1B^2}\\
&= \epsilon\cdot\frac{\nu\Sigma_{f,2}}{\Sigma_{a,2}}\cdot\frac{\Sigma_{1\to 2}}{\Sigma_{a,1}+\Sigma_{1\to 2}}\cdot\frac{1}{1+L_T^2B^2}\cdot\frac{1}{1+\tau_TB^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、

$$L_T^2 = D_2/\Sigma_{a,2}, \tag{8}$$

$$\tau_T = D_1/(\Sigma_{1\to 2}+\Sigma_{a,1}) \tag{9}$$

としている。L_T^2 は拡散面積、τ_T は核分裂中性子が熱化するまでのフェルミ年齢である。

高速中性子が体系から漏れない確率 P_F、熱中性子が漏れない確率 P_T をそれぞれ

$$P_F = \frac{1}{1+B^2\tau_T}, \tag{10}$$

$$P_T = \frac{1}{1+B^2L_T^2} \tag{11}$$

とおくことにより、式 (7) から以下の六因子公式を得ることができる。

$$k=\epsilon\eta fpP_FP_T \tag{12}$$

なお、この六因子公式は通常用いられるものと P_F の定義が異なる。

[1] /Document/KUCA/SixFactor/

2　フェルミの年齢理論からの導出

本節の記述は、ラマーシュの「原子炉の初等理論」を参考にしている。

核分裂により生まれた高速中性子の減速を考える際、体系が有限であるとするならば、中性子の減速と同時に拡散も考えなければならない。この問題を解析的に扱うためにフェルミが導出したモデルが**フェルミの年齢理論**である。中性子の原子核との散乱反応による減速は離散的な現象であるが、このモデルでは、衝突回数や衝突によって得る中性子のレサジーを連続変数として扱う。従って、このモデルは**連続減速モデル**とも呼ばれる。

ここで、位置 $\mathbf{r}$, レサジー u の中性子流を $\mathbf{J}(\mathbf{r},u)$ と書くと、$\mathrm{div}\mathbf{J}(\mathbf{r},u)dudV$ は、レサジー幅 du にある中性子の体積要素 dV からの単位時間あたりの正味の流出量に対応する。

一方、$q(\mathbf{r},u)dV$ を、体積要素 dV において u 以上のレサジー領域へ単位時間あたりに減速されていく中性子の数として、以下の方程式を考える。なお、q は**減速密度**と呼ばれる。

$$[q(\mathbf{r},u+du)-q(\mathbf{r},u)]\,dV=\frac{\partial q(\mathbf{r},u)}{\partial u}dudV \tag{13}$$

この式は、単位時間あたりに u〜$u+du$ に減速される中性子数に対応する。

定常状態において、レサジー u において中性子源も中性子吸収もないとするならば、以下の式が成り立つ。

$$\mathrm{div}\mathbf{J}(\mathbf{r},u)+\frac{\partial q(\mathbf{r},u)}{\partial u}=0 \tag{14}$$

この方程式に対して以下の拡散近似（フィックの法則）を適用する。

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},u)=-D(u)\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r},u) \tag{15}$$

ここで $\phi(\mathbf{r},u)$ は中性子束、D は拡散係数を示す。

さらに、中性子のレサジーが原子核との一回の散乱で ξ だけ増加するとするならば、$q(\mathbf{r},u)$ は以下の式で求められる。

$$q(\mathbf{r},u)=\int_{u-\xi}^{u}F(\mathbf{r},u')du' \tag{16}$$

ここで $F(\mathbf{r},u)$ は衝突密度を示す。この衝突密度がレサジー幅 ξ で一定と見做せるならば、$q(\mathbf{r},u)$ はさらに簡略化して記述できる。

$$q(\mathbf{r},u)=\xi F(\mathbf{r},u)=\xi\Sigma_s(u)\phi(\mathbf{r},u) \tag{17}$$

以上より、式 (14) は以下のように書き直せる。

$$\frac{D(u)}{\xi\Sigma_s(u)}\nabla^2 q(\mathbf{r},u)=\frac{\partial q(\mathbf{r},u)}{\partial u} \tag{18}$$

この方程式は、以下で定義される新しい変数 $\tau(u)$ を導入することによって、さらに簡略化することができる。

$$\tau(u)=\int_0^u\frac{D(u')}{\xi\Sigma_s(u')}du' \tag{19}$$

この変数を用いると、$\dfrac{\partial q}{\partial u}=\dfrac{\partial q}{\partial\tau}\dfrac{\partial\tau}{\partial u}$ より、式 (18) は次のように書き直せる。

$$\nabla^2 q(\mathbf{r},\tau)=\frac{\partial q(\mathbf{r},\tau)}{\partial\tau} \tag{20}$$

この式が**フェルミの年齢方程式**と呼ばれるものであり、τ は**フェルミ年齢**（単位は長さの 2 乗）と呼ばれている。

次に、燃料と減速材を含む均質媒質からなる一次元の裸の原子炉を考え、この原子炉が臨界定常状態にあるとする。また、この臨界状態の原子炉における熱中性子束分布 $\phi_T(x)$ は以下の拡散方程式に従うものとする。なお、熱中性子エネルギーの下限レサジーを u_T とし、それに対応するフェルミ年齢を $\tau_T=\tau(u_T)$ と記述する。

$$-D\frac{d^2\phi_T(x)}{dx^2}+\Sigma_a\phi_T(x)=pq(x,\tau_T) \tag{21}$$

ここで、$q(x,\tau_T)$ は共鳴吸収が無い場合の熱中性子減速密度であり、共鳴吸収を逃れる確率 p を乗ずることにより、共鳴吸収を考慮している。一方、減速密度 $q(x,\tau)$ は以下のフェルミの年齢方程式で記述されるものとする。

$$\frac{\partial^2 q(x,\tau)}{\partial x^2}=\frac{\partial q(x,\tau)}{\partial\tau} \tag{22}$$

熱中性子束分布 $\phi_T(x)$、減速密度分布 $q(x,\tau)$ の両者について、原子炉の両端でゼロという境界条件を与え、かつ原子炉内で正の値のみを取り得る（臨界定常状態のため）ものとすると、解が以下のように得られる。

$$q(x,\tau) = T\exp(-B^2\tau)\cos Bx, \tag{23}$$

$$\phi_T(x) = A\cos Bx \tag{24}$$

ここで、原子炉の中心位置を $x=0$ としている。また、年齢方程式における初期条件は核分裂により発生する中性子数として与えられるため、四因子公式のいくつかの因子を用いて以下のように記述される。

$$q(x,0) = \Sigma_a\phi_T(x)\cdot f\eta\epsilon \tag{25}$$

従って、

$$\frac{q(x,0)}{\phi_T(x)} = \frac{T}{A} = \Sigma_a f\eta\epsilon \tag{26}$$

より $T=\Sigma_a f\eta\epsilon A$ が得られ、減速密度と熱中性子束は以下の関係で記述できることが分かる。

$$q(x,\tau) = \exp(-B^2\tau)f\eta\epsilon\Sigma_a\phi_T(x) \tag{27}$$

フェルミ年齢が τ_T に達する（熱中性子になる）減速密度の全炉心積分値は

$$\int q(x,\tau_T)dx = \exp(-B^2\tau_T)\int f\eta\epsilon\Sigma_a\phi_T(x)dx \tag{28}$$

と書けるが、この式の右辺の $\int f\eta\epsilon\Sigma_a\phi_T(x)dx$ は単位時間あたりの高速中性子発生量の全炉心積分値となっていることから、$\exp(-B^2\tau_T)$ は「核分裂中性子が熱中性子に減速される割合」、つまり高速中性子が体系から漏れない確率 P_F に対応することになる [2]。

式 (24) と (27) を式 (21) に代入すると以下の式を得ることができる。

$$DB^2\left(A\cos Bx\right) + \Sigma_a\left(A\cos Bx\right) = p\Sigma_a f\eta\epsilon\exp(-B^2\tau_T)\left(A\cos Bx\right) \tag{29}$$

両辺から $A\cos Bx$ を除し、四因子公式 (6) を用いることで、この式は以下のように簡略化される。

$$DB^2 + \Sigma_a\left\{1 - k_\infty\exp(-B^2\tau_T)\right\} = 0 \tag{30}$$

この式を変形し、以下を得る。

$$k_\infty\frac{\Sigma_a}{DB^2+\Sigma_a}\exp(-B^2\tau_T) = k_\infty\frac{1}{1+B^2L_T^2}\exp(-B^2\tau_T) = 1 \tag{31}$$

考えている系は臨界であるため、上式は中性子実効増倍率に対応しており、

$$P_F = \exp(-B^2\tau_T), \tag{32}$$

$$P_T = \frac{1}{1+B^2L_T^2} \tag{33}$$

とおくことにより、以下の六因子公式が得られる。

$$k = 1 = \epsilon\eta f p P_F P_T \tag{34}$$

また、フェルミ年齢 τ_T であるが、式 (19) にその定義が与えられている。エネルギー二群近似の場合は、$\xi\Sigma_s$ は $\Sigma_{1\to 2}$ に置き換えることが出来る。さらに、高速中性子の吸収は上述の年齢理論では無視されており、六因子公式の計算では共鳴を逃れる確率として考慮されている。従って、年齢理論においては、高速中性子の吸収は熱中性子への散乱の一部と考えることが妥当である。これらを踏まえると、このときの τ_T の定義は式 (9) と同一のものとなる。

3 高速中性子が体系から漏れない確率 P_F における違いについて

これまで述べたように、高速中性子が体系から漏れない確率 P_F は、二群拡散方程式からは $1/(1+B^2\tau_t)$ として得られる一方、フェルミの年齢理論からは $\exp(-B^2\tau_T)$ として得られることが分かった。なお、B^2 が小さい場合には $\exp(-B^2\tau_T)\approx 1/(1+B^2\tau_T)$ となるため、両者は一致することになる。また、フェルミ年齢 τ_T の定義は、二群定数から求める場合には、両者で同一となることが分かった。

一体、どちらが「より正確」と言えるのだろうか？

[2] この結論については、式 (23) からそのまま得ることができるが、テキスト「原子炉物理実験」の付録 1B、2-2 節を補足する意味でこのような記述とした。

4 KUCA 体系でのフェルミ年齢の計算

τ_T について、テキスト「原子炉物理実験」の表 1-3（p.42）の二群断面積から式 (9) を用いて得られる値と表 1-2（p.36）の値を比較したものを **Table 1** に示す。これより、**表 1-2 で与えられているフェルミ年齢は二群断面積から**

Table 1: Comparison in Fermi-age

	D_1	$\Sigma_{a,1}$	$\Sigma_{1\to 2}$	τ_T from 2-group constant	τ_T given in 表 1-2
C30	1.58	0.00320	0.0178	75.2	64.1
C35	1.54	0.00286	0.0212	64.0	56.2
C45	1.50	0.00237	0.0254	54.0	48.4

計算されるものと比較して大きい値となっていることが分かる。

六因子公式では、P_F は $\exp(-B^2\tau_T)$ で記述される。そこで、二群拡散理論から導出される高速中性子が漏れない確率 P_F が再現されるように六因子公式で用いる τ_T を決めることを考える。すなわち、二群断面積を用いて式 (9) から得られるフェルミ年齢を τ_T^{2g} とした場合、六因子公式で用いるフェルミ年齢 τ_T^c を以下の式を満足するように決める。

$$\exp(-B^2\tau_T^c) = \frac{1}{1+B^2\tau_T^{2g}} \tag{35}$$

この式を変形すると、以下を得る。

$$\tau_T^c = \frac{\ln(1+B^2\tau_T^{2g})}{B^2} \tag{36}$$

この式から明らかなように τ_T^c は B^2 に依存することになる。三辺が 55、45、75cm の直方体の裸炉心を想定すると、$B^2 = 0.01$ が得られ、τ_T^c が **Table 2** のように計算される。

Table 2: Comparison in Fermi-age (2)

	τ_T from 2-group constant	τ_T given in 表 1-2	τ_T^c
C30	75.2	64.1	56.2
C35	64.0	56.2	49.6
C45	54.0	48.4	43.3

フェルミの年齢理論に基づく六因子公式を用いて k を予測する場合、フェルミ年齢として τ_T^c を用いることにより、二群拡散計算とほぼ同一となる結果が得られることが期待される。実際に、裸の炉心（C35、6 列）を構築し、二群計算（式 (7)）と τ_C^T を用いた六因子公式との臨界予測値を比較したところ、X 方向長さで 2cm 以内で一致することを確認した。

また、C35、4 列の反射体付き原子炉に対しても同様の評価を行い、Table 2 で得た τ_T^c を用いて六因子公式で計算を行うと二群定数を用いた場合とほぼ同一の値となり、六因子公式の精度は反射体の有無に依存しないことを確認した。