Dancoff 係数法に関するメモ[1]

2026/5/5　千葉　豪

Dancoff 補正（Dancoff 係数）の定義として、小林先生の教科書「原子炉物理」の 7.7 節（p.488) には以下が与えられている。

- 無限大の減速材中に、着目する 1 本の燃料棒だけがある場合に比べ、他の燃料棒があると、この燃料棒にさえぎられて着目する燃料棒の表面からの入射中性子数は減少する。Dancoff 補正は、影を作る燃料棒による入射中性子の相対的減少を表す。
- Dancoff 補正は、着目している燃料棒から 1 個の中性子が飛び出したとき、この中性子が途中で他の減速材と衝突することなく、他の燃料棒に到達する確率として定義される。
- この「他の燃料棒に到達する確率」は次式で与えられる。これは減速材の断面積 Σ_M のみに依存し、燃料の断面積には無関係である。

$$\frac{\displaystyle\int_S dS \int_{4\pi} d\Omega \exp(-\Sigma_M l)(\vec{n}\cdot\vec{\Omega})}{\displaystyle\int_S dS \int_{4\pi} d\Omega (\vec{n}\cdot\vec{\Omega})} \tag{1}$$

また、同教科書には衝突確率を用いた Dancoff 係数の計算方法についても以下の説明が与えられている。格子系の脱出確率 P_e^L は、Dancoff 補正 C と孤立系の脱出確率 P_e^s を用いて以下のように書ける（p.502 の式 (7.191)）。

$$P_e^L = \frac{P_e^S(1-C)}{1-(1-\lambda^s P_e^S)C} \tag{2}$$

ここで、$\lambda^s = \Sigma_F \bar{l}$ である。これより、$\Sigma_F \to \infty$ のときは、$P_e^S \to 1/\lambda^s$ であるので、以下が成り立つ。

$$P_e^L \to \frac{1}{\lambda^S}(1-C) \tag{3}$$

Dancoff 係数は、Σ_F を十分に大きくした条件のもとで P_e^L を計算することで、式 (3) から得られる。この際に用いる減速材の断面積 Σ_M としては、上の定義に基づくならば全断面積が適当であると言えよう。

同様に、$\Sigma_F \to \infty$ のときには、式 (2) から $P_e^L = P_e^S(1-C)$ を経て以下が得られる。

$$C = \frac{P_e^S - P_e^L}{P_e^S} = \frac{P_{F\to F'} + P_{F\to F} - P_{f\to f}}{1 - P_{f\to f}} \tag{4}$$

この式の最後の項は Neutron current 法の論文 [1] 中の表式に従ったものである。

Neutron current 法の論文では、多領域系において、全ての非燃料領域に対して源と断面積の比を同一とすることで式 (4) が得られることを示しており、それが Neutron current 法による Dancoff 係数計算の理論的根拠となっている。

孤立系の燃料脱出確率 P_e^S が Bell 因子 a を用いた有理近似により以下のように書けるものとする。

$$P_e^S = \frac{a}{a+\lambda^S} \tag{5}$$

[1] /Document/Study/Watanabe_JSPS/Dancoff_Tone

これを式 (2) に代入すると以下が得られる。

$$P_e^L = \frac{a}{a + \lambda^S \left(1 + \dfrac{aC}{1-C}\right)} \tag{6}$$

従って、

$$\phi_F(E) \propto (1 - P_e^L) \propto \frac{1}{a + \Sigma_F(E)\bar{l}\left(1 + \dfrac{aC}{1-C}\right)} \propto \frac{1}{\Sigma_F(E) + \dfrac{a}{\bar{l}} \dfrac{1-C}{1+(a-1)C}} \tag{7}$$

が得られ、Dancoff 係数と Bell 因子を用いた場合の背景断面積における非均質項 γ として

$$\gamma = \frac{1}{N_F \bar{l}} \cdot \frac{a(1-C)}{1+(a-1)C} \tag{8}$$

が得られる。

東捻の方法を用いた場合、燃料-減速材の 2 領域系では $\phi_F(E)$ は以下のように得られる。

$$\phi_F(E) \propto \frac{1}{P_{F\to F} V_f \Sigma_F(E) + P_{M\to F} V_M \Sigma_M} \tag{9}$$

これに対して相反定理を適用すると以下が得られる。

$$\phi_F(E) \propto \frac{1}{P_{F\to F} \Sigma_F(E) + (1 - P_{F\to F})\Sigma_F} \tag{10}$$

これより、東捻の方法における非均質補正として以下が得られる。

$$\gamma_{\mathrm{Tone}} = \frac{1}{N_F \bar{l}} \cdot \Sigma_F \bar{l} \cdot \frac{1 - P_{F\to F}}{P_{F\to F}} \tag{11}$$

この非均質補正の表式は、久語が提案した非均質系の共鳴計算手法 [2] に基づくものと一致する。

燃料を黒体と見做すならば、式 (3) より以下が得られる。

$$P_{F\to F} \approx \frac{\Sigma_F \bar{l} - (1-C)}{\Sigma_F \bar{l}} \tag{12}$$

これを式 (11) に代入すると以下が得られる。

$$\gamma_{\mathrm{Tone}} \approx \frac{1}{N_F \bar{l}} \cdot \Sigma_F \bar{l} \cdot \frac{1-C}{\Sigma_F \bar{l} - (1-C)} = \frac{1}{N_F \bar{l}} \cdot \frac{1-C}{1 - \dfrac{1-C}{\Sigma_F \bar{l}}} \tag{13}$$

さらに、$\Sigma_F \to \infty$ とすると以下が得られる。

$$\gamma_{\mathrm{Tone}} \approx \frac{1-C}{N_F \bar{l}} \tag{14}$$

これは $a = 1$ としたときの Dancoff 係数の非均質補正（式 (8)）と一致する。

また、Σ_F を以下の式が満足されるように決めるものとする [2]。

$$\frac{a}{\Sigma_F \bar{l} + a} = \frac{1}{\Sigma_F \bar{l}} \tag{15}$$

この式は以下のように変形される。

$$\Sigma_F \bar{l} = \frac{a}{a-1} \tag{16}$$

これを式 (13) に代入すると、γ_{Tone} が Dancoff 係数の非均質補正と一致することが分かる。換言するならば、式 (15) を満足する Σ_F で衝突確率を計算することで、東捻の方法が Dancoff 係数に近い結果を与える可能性がある[2] ことが分かる。

[2] ここで「可能性がある」としているのは、議論を 2 領域系に限定していることに由来する。

参考文献

[1] Sugimura N, Yamamoto A. Evaluation of Dancoff factors in complicated geometry using the method of characteristics. J Nucl Sci Technol., **43**, pp. 1182-1187 (2006).

[2] Kugo T, Kaneko K. Spatially dependent resonance self-shielding calculation method based on the equivalence theory in arbitrary heterogeneous systems. Proc. Int. Conf. of Math. Comp., M&C99, Madrid, Spain (1999).